Математичнийзанзібар для учнів 4–6 класів

«Ціле більше від суми його частин».
Арістотель

Розв'язання задач

4 клас

1. У Петрика в чарівному саду ростуть рослини двох типів, на деяких росте по 6 листочків, а на інших – 3 листочки та 2 квіточки. Усього на рослинах 10 квіточок та 33 листочки. Скільки рослин в саду Петрика?

Відповідь: 8.
Розв'язання. Оскільки там 10 квіточок, то другого типу рослин там 5 примірників, на яких 15 листочків. Тому інші листочки – з рослин першого типу, і їхня кількість – це $33 - 15 = 18$, а тому їх 3. Таким чином усього $5 + 3 = 8$ рослин.

2. За круглим столом сидять 30 студенток та 10 студентів. Кожна з дівчат сказала: «Я сиджу біля хлопця». Яка найменша кількість дівчат при цьому могла сказати неправду?

Відповідь: 10.
Розв'язання. Кожний з хлопців може сидіти поруч не більше ніж з двома дівчатами, тому максимум правдивою ця фраза могла бути лише в $2 \cdot 10 = 20$ студенток. Таким чином гарантовано збрехали $30 - 20 = 10$. Показати, що їх можна розсадити належним чином дуже просто.

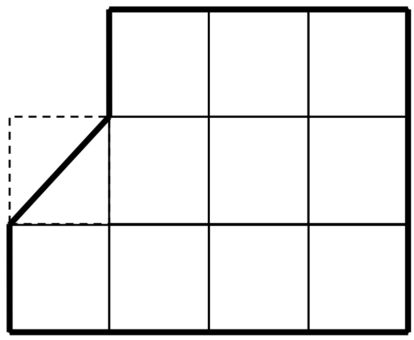
Рис. 1

3. Запишемо дату у вигляді чотирьох цифр – спочатку день а далі місяць, наприклад, 24 серпня записується як 2408. Для якого дня у 2025 році сума чотирьох записаних цифр буде мати найбільше значення? У відповідь запишіть максимальну суму цих цифр.

Відповідь: 20.
Розв'язання. Окремо знайдемо найбільше значення суми цих двох цифр для числа та для місяця. Для числа – це 29, що дає суму 11. Для місяця – це 09 з сумою 9, тому максимальна сума усіх чотирьох цифр дорівнює 20.

4. Розріжте фігуру, що зображена на рис. 1 на 3 однакові фігурки, тобто такі, які можна накласти одна на одну шляхом зсуву, повороту, перегортанню. Різати можна не обов'язково вздовж сторін маленьких квадратиків.

Відповідь: приклад показаний на рис. 2.

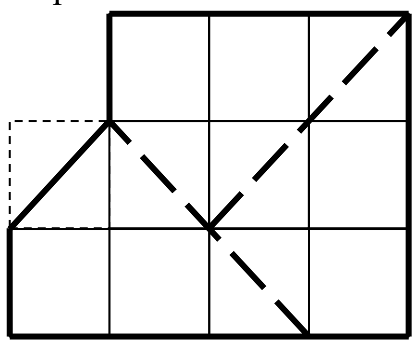
Рис. 2

5. Поділіть числа $2, 6, 9, 17, 25, 35, 42$ та 64 на дві групи по чотири числа таким чином, щоб суми чисел у кожній групі були однаковими. У відповідь запишіть добуток чотирьох чисел тієї групи, що містить число 9.

Відповідь: 28800.
Розв'язання. Порахуємо суму усіх восьми чисел, вона дорівнює

200, тому нам достатньо знайти чотири числа з сумою 100. Наприклад, $100 = 64 + 25 + 9 + 2$, тому у відповідь треба записати число

$$64 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 2 = 28800.$$

6. Яка найбільша кількість тверджень з цих 4-х може бути одночасно хибними:
У Марусі є собака та кіт;
У Марусі немає ні собаки, ні кота;
Якщо у Марусі є собака, то в неї є і кіт;
В Мерусі немає собаки, але є кіт?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Якщо у Марусі є собака та немає кота, то хибні усі 4 твердження.

7. На дошці записане число 1, за один хід Петрик може додати до записаного числа будь-яке з натуральних чисел від 1 до 9, за умови, що отримана сума не ділиться націло на 10. Яке найбільше число можна отримати після 100 ходів?

Відповідь: 891.
Розв'язання. При додаванні 9 до записаного числа остання цифра завжди зменшиться на 1. Таким чином додати поспіль більше 8 разів число 9 не можна. Таким чином серед кожних 10 додавань можна записане число збільшити максимум на $9 \cdot 8 + 8 = 89$. Усього таких десятків ходів буде 11, тому шукане число буде

$$1 + (9 \cdot 8 + 8) \cdot 11 + 8 = 889.$$

8. Числова таблиця $n \times n$ заповнена натуральними числами від 1 до $n \cdot n$ як це показане на рис 3 для $n = 10$. Фігурку $ABCDEFG$, що складається з 7 клітинок 1×1, назвемо *пташкою* (рис. 4). Її можна розмістити на числовій таблиці таким чином, щоб кожна клітинка пташки закривала рівно одну клітинку числової таблиці, при цьому її можна повертати та перегортати, але усі клітинки пташки мають бути в межах числової таблиці. Тобто покласти пташку так, щоб клітинка C покрила клітинку таблички з числом 2, не можна. Пташку поклали так, що клітинка B пташки покриває клітинку 32 таблиці. Яке саме число при цьому може покривати клітинка G? Вкажіть усі можливі варіанти.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Рис. 3

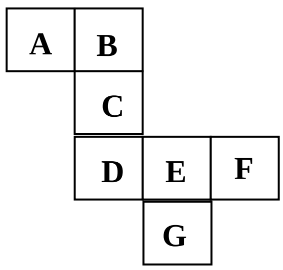

Рис. 4

Відповідь: 3, 25, 45 та 63,
Розв'язання. Пташка може займати рівно 8 різних позицій. Зображена на рис. 4 і її повороти, а також перевертаємо пташку і її повороти. Для 4-х з цих розташувань пташка вилазить за межі таблиці. Для решти можливих 4-х розташувань поле G покриватиме одну з таких клітин: 3, 25, 45 та 63.

9. Є 16 дорожніх стовпчиків, які стоять один від одного на відстані 10 м. Треба пофарбувати лінію від першого до останнього стовпчика. При цьому на перші 100 м цієї лінії було витрачено 6 л фарби. Скільки літрів фарби буде витрачено на усю лінію?

Відповідь: 9.
Розв'язання. Усього від першого до останнього стовпчика відстань 150 м. Таким чином буде витрачено 6 л на перші 100 м, а далі ще половина, тобто 3 л. таким чином буде витрачено 9 л фарби.

10. Задача знята із-за некоректної умови.

11. Усі натуральні числа від 1 до 100 виписані один за одним в єдине велике число: 123 … 89101112 … 99100. Яка цифра стоїть на 100-му місці ліворуч?

Відповідь: 5.
Розв'язання. Одноцифрові числа займають 9 перших позицій. Наступні 45 двоцифрових чисел 10, 11, …, 54 займають позиції від 10-ї до 99-ї. тому шукана цифра – це перша цифра числа 55.

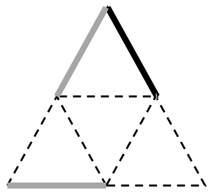
Рис. 5

12. З 6 сірників склали трикутник, який має площу, що дорівнює 4-м площам одиничних трикутників, тобто трикутникам, кожна сторона якого дорівнює 1 (рис. 5). Побудуйте з тих самих 6 сірників фігуру, площа якої дорівнює 6-ти площам одиничних трикутників

Відповідь: приклад показаний на рис. 6.

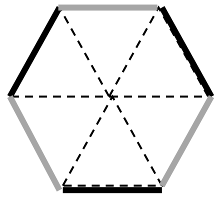
Рис. 6

13. У комірки таблиці 3×3 вписані числа таким чином, що сума чисел у кожному рядку, стовпчику та по двох діагоналях однакова. Відомі числа, що розташовані у трьох комірках (рис. 7). Яке число записане в комірці, що позначене через x?

		9
x	7	8

Рис. 7

Відповідь: 3.
Розв'язання. Запишемо послідовно ті числа, що мають бути в комірках в залежності від x (рис. 8). Сума чисел в кожному рядку складає $15 + x$, далі послідовно знаходимо число $x - 2$, 6, 11, 4. Але тепер отримуємо, що $15 + x = 4 + 6 + 8 \Rightarrow x = 3$. Далі неважко дозаповнити таблицю, щоб переконатися, що умови заповнення справджуються.

4		9
11	6	$x - 2$
x	7	8

Рис. 8

14. Кожний з трьох піратів А, Б та В зробив два висловлювання про їхню компанію.
А: У Б 2 ока.
Б: У В 2 ока.
В: У А 2 ока.
А: У нас 2 ока на трьох.
Б: У нас 3 ока на трьох.
В: У нас 4 ока на трьох.
Відомо, що кожний один раз виявився правим, а один раз помилився. Скільки насправді в кожного з них очей?

Відповідь: Б та В мають по 2, а в А – жодного або усі пірати мають по 2 ока.

Розв'язання. Зрозуміло, що з трьох останніх висловлювань принаймні 2 помилкових. Якщо правду сказав А, то в перших трьох висловлюваннях правду сказали Б та В і маємо суперечність. Якщо правду сказав Б, то в перших трьох висловлюваннях правду сказали А та В і маємо суперечність. Якщо правду сказав В, то в перших трьох висловлюваннях правду сказали А та Б і тоді маємо таку ситуацію: Б та В мають по 2, а в А – жодного. Якщо там геть не було правильних, тобто усі помилкові, то усі пірати мають по 2 ока.

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Рис. 9

15. Квадрат 3×3 заповнений числами як це показане на рис. 9. Петрик може пройти фішкою первним маршрутом так, що можна переходити з однієї клітину на іншу, що має спільну сторону, та двічі бути на одній клітині не можна. При цьому він виписує усі числа з клітин на яких він послідовно побував зліва направо. Яке найбільше число при цьому може утворитися?

Відповідь: 573618492.
Розв'язання. Зрозуміло, що число стане тим більше, чим більше в нього цифр. Тому бажано мати маршрут, що проходить через усі 9 цифр. Щоб такий маршрут був можна починати з 5 полів – кутові та центральне. Це легко показати методом фарбування, ці поля будуть чорними, інші 4 поля – білі, фішка при ході змінює колір, тому, щоб обійти усі поля треба починати з чорної. Найбільше з цих 5 полів – це 5, далі просто треба рухатися в більшу цифру з можливих. Таким чином маємо таке число: 573618492.

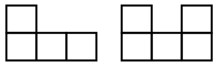

Рис. 10

16. Для якого найменшого натурального n квадрат $n \times n$ можна розрізати на однакову кількість фігурок L та U (рис. 10)?

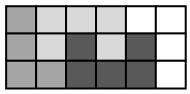

Рис. 11

Відповідь: 6.
Розв'язання. Припустимо, що ми використали по k фігурок кожного типу, тоді усього квадрат має складатися з $9k$ клітин, тобто $n \cdot n = 9k$, звідки n ділиться націло на 3. Для квадрату 3×3 заповнення неможливе, що легко перевірити шляхом перебору. Наступне найменше значення $n = 6$, для якого шукане розрізання існує. На рис. 11 показане як заповнити прямокутник 6×3, звідки зрозуміло як заповнити й квадрат 6×6.

5 клас

1. Андрій, Богдана, Василь та Дарина вчилися в одній школі. Богдана на 6 років, а Василь на 9 років молодші від Андрія. Добуток років хлопців дорівнює добутку років дівчат. Який вік у Дарини, якщо відомо, що у кожної дитини вік визначається натуральним числом та в школі можуть навчатися діти від 6 до 18 років?

Відповідь: 10.
Розв'язання. Позначимо від Андрія, Богдани, Василя та Дарини через a, b, c та d відповідно. Тоді маємо такі співвідношення між ними:

$$b = a - 6, c = a - 9, ac = bd$$

Подивимося на можливі значення років дітей. Оскільки $c \geq 6$ та $a \leq 18$, то $c = a - 9 \geq 6$ матимемо, що $a \geq 15$.
При $a = 15$ маємо, що $b = a - 6 = 9$, $c = a - 9 = 6$ та $ac = bd \Leftrightarrow 90 = 9d \Rightarrow d = 10$.
При $a = 16$ маємо, що $b = a - 6 = 10$, $c = a - 9 = 7$ та $ac = bd \Leftrightarrow 112 = 10d$ – суперечність.
При $a = 17$ маємо, що $b = a - 6 = 11$, $c = a - 9 = 8$ та $ac = bd \Leftrightarrow 136 = 11d$ – суперечність.
При $a = 18$ маємо, що $b = a - 6 = 12$, $c = a - 9 = 9$ та $ac = bd \Leftrightarrow 162 = 12d$ – суперечність.

2. Мешканці острова або лицарі, або брехуни: лицарі завжди говорять правду, а брехуни завжди брешуть. Одного разу зібралися утрьох Альберт, Білл та Чарльз. Альберт каже: «Білл – лицар». Білл каже: «Ми ... всі лицарі» (у цей момент повз проїхала вантажівка, і ніхто не почув, чи Білл сказав: «Ми всі лицарі» або «Ми не всі лицарі»). Чарльз каже: «Білл сказав, що ми не всі лицарі». Скільки з них лицарів?

Відповідь: 0.
Розв'язання. Якщо Альберт лицар, то Білл також лицар. Якщо Білл сказав, що ми усі лицарі, то маємо суперечність з словами Чарльза. Якщо він сказав, що не усі лицарі, то це означає, що Чарльз не лицар, а сказав правду – суперечність.
Значить Альберт – не лицар. І Білл також. Білл мав сказати, що ми усі лицарі, бо інакше він сказав би правду, але тоді Чарльз збрехав, тобто вони усі троє брехуни.

3. Блоха хоче стрибати по циферблату годинника. На початку вона стає на числі 12, після чого вона вибирає довільне ціле число k від 1 до 12 включно та почитає стрибати на число k за рухом годинникової стрілки, наприклад, якщо вона вибрала число $k = 5$, то перший її стрибок буде в число 5, далі – в 10, далі в 3 і так далі. Виявилося, що після 12 стрибків блоха вперше знову опинилася на числі 12. Скільки в неї було варіантів для вибору числа k?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Якщо k та 12 мають спільний дільник, що більший за 1, то блоха потрапить в число 12 раніше ніж за 12 кроків, оскільки кожного разу вона потраплятиме в число, що ділиться на k. Таким чином шуканими є числа 1, 5, 7 та 11.

4. У Петрика нарисував 5 прямокутників з цілими сторонами. Вони мали площі 74, 75, 76, 77 та 78. Який найменший периметр міг мати нарисований Петиком прямокутник?

Відповідь: 36.
Розв'язання. Для кожного із запропонованих прямокутників знайдемо сторони прямокутника, що має найменший периметр. Це можна зробити або перебором, або просто скориставшись властивістю, що периметр тим менший, чим менша різниця між сторонами. Тобто, якщо $S = ab = cd$ та при цьому $c < a \le b < d$, то $a + b < c + d$. Тоді для кожного із запропонованих прямокутників знаходимо прямокутник найменшого периметра.
$S = 74, 74 = 2 \cdot 37 \Rightarrow P = 2 \cdot (2 + 37) = 78.$
$S = 75, 75 = 5 \cdot 15 \Rightarrow P = 2 \cdot (5 + 15) = 40.$
$S = 76, 76 = 4 \cdot 19 \Rightarrow P = 2 \cdot (4 + 19) = 46.$
$S = 77, 77 = 7 \cdot 11 \Rightarrow P = 2 \cdot (7 + 11) = 36.$
$S = 78, 78 = 6 \cdot 13 \Rightarrow P = 2 \cdot (6 + 13) = 38.$

1		2	3	4
	1		2	
	2			
X			4	
				1

Рис. 12

1	**5**	2	3	4
	1		2	
	2		**1**	
X	**3**	**1**	4	**2**
2	**4**	**3**	**5**	1

Рис. 13

5. Задача № 5 4 класу.

6. У кожну комірку квадрата 5×5 була заповнена одним з чисел $1, 2, 3, 4$ або 5 таким чином, що у кожному рядку та кожному стовпчику числа не повторюються. Після цього деякі з цих чисел витерли, і залишилися відомими числа, що зображені на рис. 12. Знайдіть, яке число стояло в комірці, що позначена літерою X.

Відповідь: 5.

***Розв'язання*.** Позначимо елементи таблиці двома числами, перший з яких означатиме номер рядку зверху, а другий – номер стовпчика від лівого краю. Наприклад, $13 = 2$. Заповнимо послідовно комірки таким чином (рис. 13).

$12 = 5$, $52 = 4$, оскільки $42 \neq 4$, тоді $42 = 3$.

$34 = 1$, оскільки $54 \neq 1$, тоді $54 = 5$.

$51 = 2$, оскільки $53 \neq 2$, тоді $53 = 3$.

$43 = 1$, бо 1 в третьому стовпчику більше немає де поставити.

Так само $45 = 2$, бо 2 у п'ятому стовпчику більше немає де поставити.

Тепер з четвертого рядка маємо, що $X = 5$.

7. Задача № 7 4 класу.

8. Числова таблиця $n \times n$ заповнена натуральними числами від 1 до n^2 як це показане на рис 14 для $n = 10$. Фігурку $ABCDEFG$, що складається з 7 клітинок 1×1, назвемо *пташкою* (рис. 15). Її можна розмістити на числовій таблиці таким чином, щоб кожна клітинка пташки закривала рівно одну клітинку числової таблиці, при цьому її можна повертати та перегортати, але усі клітинки пташки мають бути в межах числової таблиці. Тобто покласти пташку так, щоб клітинка C покрила клітинку таблички з числом 2, не можна. Яку найбільшу суму можуть мати клітинки, що покриті усіма клітинами пташки?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Рис. 14

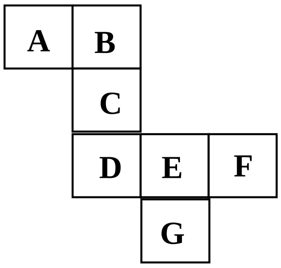

Рис. 15

***Відповідь*:** 590,

***Розв'язання*.** Виходячи з розташування чисел в таблиці, пташка буде покривати числа з максимальною сумою, якщо вона при заданій орієнтації зсовується максимально праворуч (тобто покриває принаймні одну клітинку у правому стовпчику, а також донизу (покриває принаймні одне поле нижнього рядка). Перебором можна розглянути такі випадки і отримати, що максимальне значення приймається 590 (рис. 16).

67	68							70			68						69	
	78					78	79	80		77	78	79					79	80
	88	89	90		87	88						89			87	88	89	
		99				98						99	100		97			
579					**580**					**590**					**589**			
		69	70				69			67						68		
		79				78	79	80		77	78	79			77	78		
87	88	89				88						89	90			88	89	90
	98				97	98						99						100
580					**589**					**579**					**590**			

Рис. 16

9. Петрик та Василь вийшли на зустріч один одному з постійними щвидкостями. На початку вони були на відстані 36 км. За 3 год між ними відстань вперше стала рівною 9 км. Через який час відстань між ними знову стане 9 км?

***Відповідь*:** 2.

Розв'язання. Спочатку вони зближаються і відстань між ними рівномірно зменшується. Відстань між ними стала рівною 9 км через 3 год, тобто вона зменшилася за 3 год на 27 км. Щоб між ними знову стала відстань 9 км вони мали пройти ще 18 км, а це вони б зробили за 2 год.

10. Задача № 10 4 класу.

11. Задача № 11 4 класу.

12. Задача № 12 4 класу.

13. Задача № 13 4 класу.

14. Кожний з трьох піратів А, Б та В зробив два висловлювання про їхню компанію.
А: У Б 2 ока.
Б: У В 2 ока.
В: У А 2 ока.
А: У нас 2 ока на трьох.
Б: У нас 3 ока на трьох.
В: У нас 4 ока на трьох.
Відомо, що кожний з них збрехав рівно стільки разів, скільки в нього очей. Скільки насправді в кожного з них очей?

Відповідь: у А та В по 1 оку, у Б – 2 ока.
Розв'язання. Зрозуміло, що з трьох останніх висловлювань принаймні 2 помилкових.
Якщо правду сказав А, то є 2 варіанти. У А 1 око, тоді він збрехав першим висловлюванням, тобто у Б не два ока. Б принаймні один раз збрехав, тому в нього точно 1 око і він вдруге сказав правду. Таким чином у В 2 ока. А це суперечить правдивому висловлюванню А.
Якщо А немає очей, то він двічі сказав правду. Тоді у Б 2 ока і В – немає очей. Але тоді його третє висловлювання не може бути правдою. Суперечність.
Якщо правду сказав Б, то є 2 варіанти. У Б 1 око, тоді він збрехав першим висловлюванням, тобто у В не два ока. Оскільки він збрехав другим висловлюванням, то в нього точно 1 око. Тоді в А 2 ока і суперечність, бо на всіх стає 4 ока – суперечність.
У Б немає очей, тобто він двічі сказав правду. Тоді у В 2 ока. Він двічі збрехав. Значить у А 1 око. Але його обидва твердженні брехливі. Суперечність.
Якщо правду сказав В, то є 2 варіанти. У В 1 око, тоді він збрехав першим висловлюванням, тобто у А не 2 ока, оскільки не правдиве друге, то в нього 1 око. А у Б – 2 ока. І маємо можливий варіант: у А та В по 1 оку, у Б – 2 ока.
Якщо у В очей немає. То він двічі сказав правду. Тоді у А ба Б по 2 ока, щоб разом було 4. Тобто усі їхні висловлювання брехливі. А це суперечить першому висловлюванню у А.
Останній випадок усі 3 останніх висловлювання брехливі. Тоді в кожного з них є принаймні 1 око, тобто разом мінімум 3. Не може бути ні 3, ні 4 ока, варіанти 5 або 6 очей. Але це суперечить першим трьом висловлюванням.

1	2x9	8	9x9	1	4x4	6
2	3x7	1	5x3	5	6x9	4
3	4x8	2	6x4	4	7x6	2
6		11		10		12

Рис. 17

3						
					5x5	
				7		
6		8		10		12

Рис. 18

15. Табличка 3×7 формується таким чином (рис. 17). У широких стовпчиках (другий, четвертий та шостий) записується операція множення таких двох одноцифрових чисел, чий добуток більше 10. Перша цифра цього добутку записана у вузький стовпчик лівіше від цього широкого, а друга цифра – у вузький стовпчик, що правіше. Після цього ще додається знизу неповний рядок, в якому записується сума чисел у кожному вузькому стовпчику. Заповніть повністю вузьки стовпчики таблички, в якій нам відомі лише її деякі фрагменти (рис. 18).

3	8x4	2	3x7	1	3x5	5
2		4	6x7	2	5x5	5
1		2	3x9	7	8x9	2
6		8		10		12

Рис. 19

Відповідь: дивись на рис. 19.
Розв'язання. Запишемо наведений добуток $5 \times 5 = 25$, тобто над цифрою 7 записується 2, а тому й над 2 запишемо 1. Лише один добуток починається з 7, це $8 \cdot 9 = 72$. Тоді однозначно знаходимо останній стовпчик та передостанній. На 7 завершується лише добуток $3 \cdot 9 = 27$. Добутки, що завершуються на 1 – це 21 чи 81, але зрозуміло, що першою цифрою не може бути 9, тому там має бути 21. Знаходимо число в стовпчику між двома двійками – це 4. Залишається відновити лівий стовпчик, там мають бути добутки 14 та 22, або 24 та 12. Як бачимо, можливий лише другий варіант, що й завершує заповнення. Широкі рядки тут мають варіанти: $24 = 3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$ та $12 = 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$.

16. Треба розрізати по сторонах клітинок зображену на рис. 20 рамку товщиною у 3 клітинки на вісім 12-кутників однакової площі.

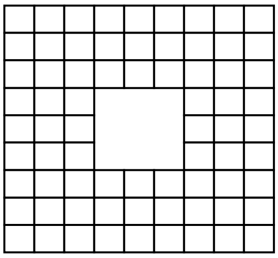

Рис. 20

Відповідь: один з можливих прикладів показаний на рис. 21.
Розв'язання. Зрозуміло, що набагато простіше вибрати варіант, коли ці 12-кутники не усі різні. Саме для такого прямокутника і буде справджуватися шукана умова (рис. 21).

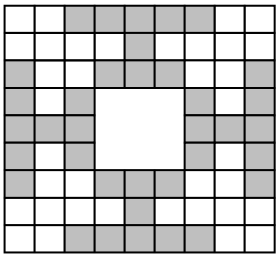

Рис. 21

6 клас

1. На олімпіаді учням дали 10 задач, де перевірялася лише відповідь. За правильну відповідь по певній задачі учасник отримував $+2$ бали, якщо в задачі відповідь не була надана, то бали не нараховувалися (тобто вона оцінювалася в 0 балів), за надану неправильну відповідь ставилося (-1) бал. Результат учасника складався з суми балів по усіх задачах. При якій кількості учасників можна гарантувати, що там було 2 учасники, що мають однаковий результат?

Відповідь: 31.
Розв'язання. Треба порахувати, які взагалі різні результати можливі. Найбільший результат – це 20. Найменший – це -10. Подивимося, які з результатів між цими значеннями неможливі. Покажемо, що 19 не можливо отримати, а решту – так. Найменший результат після 20 – це 9 правильних та 1 не надана відповідь, тобто результат 18. Далі просто, для досягнення парного результату $2k$ від 0 до 16 достатньо отримати $k+1$ правильно розв'язаних задач, решта – не надати відповіді. Для отримання результату $2k-1$ від 1 до 17 достатньо отримати k правильно розв'язаних задач, одну – неправильно, решта – не надати відповіді. Для отримання результату $-k$ від -10 до -1 достатньо отримати k неправильно розв'язаних задач, решта – не надати відповіді.
Таким чином усього різних можливих результатів – усі цілі числа від -10 до 18 та 20. Тобто усього їх 30, таким чином гарантовано будуть два однакових результати, при участі в олімпіаді мінімум 31 учасника.

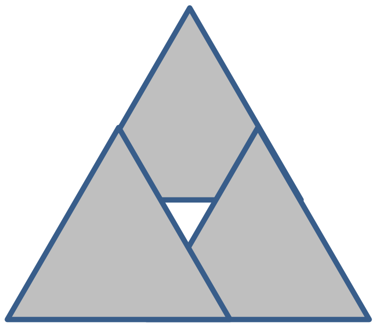

Рис. 22

2. Задача № 2 5 класу.

3. Задача № 3 5 класу.

4. Петрик розклав 3 однакових рівносторонніх сірих трикутники зі стороною 21 як це показане на рис. 22. При цьому зовнішні края цих трикутників утворили рівносторонній трикутник зі стороною 36. Чому дорівнює сторона білого рівностороннього трикутника, що утворився всередині?

Відповідь: 9.
Розв'язання. Продовжимо сторони трикутників до перетинів зі сторонами великого трикутника (рис. 23). Тоді два сірих трикутника перетинаються так, що сумарно утворюють відрізок довжини 36 замість $21 + 21 = 42$, а тому їх спільна частина має довжину 6. Таким чино всередині утворюються два трикутники зі стороною 6. Ці дві сторони та ще сторона невідомого трикутника дають сторону сірого трикутника, тобто 21. Таким чином сторона шуканого трикутника складає 9.

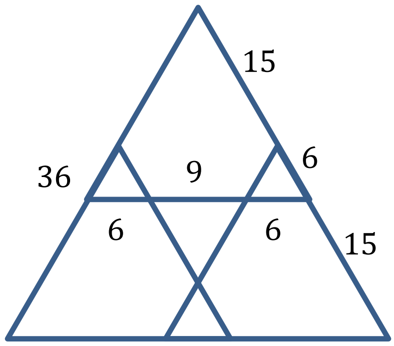

Рис. 23

5. Випишіть рядок з 20 чисел, для яких виконується така умова: сума будь-яких 4-х сусідніх з цих чисел менша 20, а сума будь-яких 7-и сусідніх з цих чисел, більша 30.

Відповідь: $6-6-6-1-6-6-6-1-6-\cdots-6-1-6-6-6-1$.
Розв'язання. Кожне четверте число робимо відмінним від перших трьох. Наприклад, рядок записаний такими четвірками, що йдуть одна за одною: $a-a-a-b-a-a-a-b-\cdots$. Щоб виписані умови справджувалися, подивимося, які числа мають її утворювати.

$$3a+b<20, 5a+2b>30, 6a+b>30.$$

Якщо вибрати, наприклад, $b=1$, то матимемо, що треба підібрати таке a, для якого

$$3a<19, 5a>28, 6a>29.$$

Зазначимо, що вони усі справджуються для $a=6$, звідки матимемо наведений приклад. Зрозуміло, що таких прикладів можна підібрати багато.

6. Задача № 6 5 класу.

7. Знайдіть усі трицифрові числа, які збільшуються у 9 разів, якщо між цифрою сотен та цифрою десятків вставити цифру 0.

Відповідь: $225, 450, 675$.
Розв'язання. Нехай a – цифра сотен шуканого числа, а b – не більше ніж двоцифрове число, що утворене його останніми двома цифрами. Тоді має справджуватися рівності:

$$9(100a+b)=1000a+b \Rightarrow 25a=2b.$$

Звідси маємо, що a – парне ненульове число, а b – кратне 25. Звідси і маємо наведені відповіді.

8. Задача № 8 5 класу.

9. Близнюки Петрик та Василь запросили друзів на свій день народження в ресторан. За домовленістю загальний рахунок мали поділити порівну на усіх, тоді б кожний сплатив би по 120 грн. Але друзі вирішили зробити подарунок братам та сплатили самі, при цьому кожний з них сплатив 160 грн. Скільки усього було друзів в ресторані, рахуючи братів-іменинників?

Відповідь: 8.
Розв'язання. Нехай усього було друзів n. Сплачена усіма сума складала S, тоді $\frac{S}{n}=120$ та $\frac{S}{n-2}=160 \Rightarrow 120n=160n-320 \Rightarrow 40n=320 \Rightarrow n=8$.

10. На острові живуть лицарі, що завжди кажуть правду та брехуни, що завжди брешуть. Андрій, Богдан та Василь сказали такі твердження.

А: Богдан– лицар.

Б: Андрій та Василь – лицарі.

В: Андрій – брехун.

Ким є кожний з трьох мешканців острова – лицарем чи брехуном?

Відповідь: Андрій та Богдан – брехуни, Василь – лицар.

Розв'язання. Якщо Андрій лицар, то Богдан так само лицар, але тоді й Василь лицар, але тоді його твердження є брехнею, тобто отримали суперечність.

Якщо Андрій брехун, то Богдан брехун, але тоді Василь – лицар. І це слушний варіант.

11. Наведіть приклад двох різних натуральних чисел, які діляться на однакову кількість натуральних чисел, при цьому більше половини з них співпадають.

Відповідь: наприклад, 12 та 18, відповідей багато.

Розв'язання. Неважко показати, що для простих чисел a, b умову задовольняють числа вигляду a^2b та ab^2. Дійсно, вони діляться водночас на числа $1, a, b, ab$, додатково вони діляться на числа a^2 та a^2b і b^2 та ab^2 відповідно. Тобто по 6 дільників і 4 – спільні.

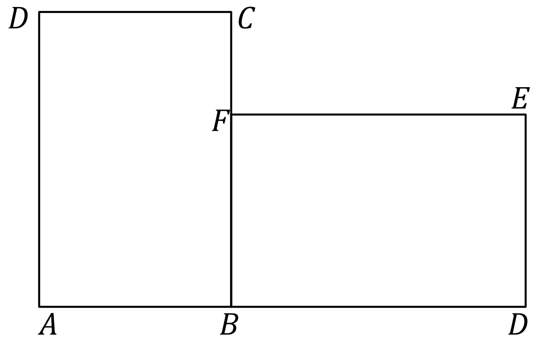

Рис. 24

12. Два однакових прямокутника $ABCD$ та $BDEF$ розташовані, як це показане на рис. 24. Виявилося, що $CF = 6$ та $AD = 44$. Чому дорівнює периметр шестикутника $ADEFCD$?

Відповідь: 138.

Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника a та b, $a > b$. Тоді маємо такі рівності: $a - b = 6$, $a + b = 44$. Звідси неважко знайти, що $a = 25$, $b = 19$. Шуканий периметр дорівнює $2a + 2b + CF + AD = 138$.

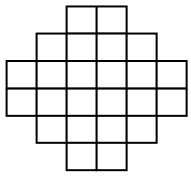

Рис. 25

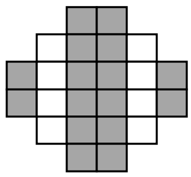

Рис. 26

13. Петрик зайшов до класу та написав на дошці число 1. Після цього зайшов Василь і записав на дошці суму усіх чисел, які вже були написані, тобто знову написав 1. Далі інші друзі стали по черзі підходити до дошки та дописувати, нічого не витираючи, суму усіх чисел, які були вже записані. Яке число напсиав 10-й з друзів?

Відповідь: 256.

Розв'язання. Якщо до приходу чергового учня на дошці була записана сума чисел x, то він допише на дошку число x, наступний напише вже число $2x$ і так далі, коджний наступний записує число удвічі більше від числа, що записав попередній. Оскільки Петрик записав 1, другий записав також 1, третій – 2, четвертий – $4 = 2^2$, …, 10-й записав $2^8 = 256$.

		A	B		
	A	E	F	B	
A	G	F	E	H	B
C	F	G	H	E	D
	C	H	G	D	
		C	D		

Рис. 27

14. Яку найбільшу кількість клітинок 1×1 можна відмітити на заданому полі (рис. 25) таким чином, щоб жодні 3 сусідні клітинки, що роздашовані по діагоналі, не були одночасно відмічені?

Відповідь: 16.

Розв'язання. На рис. 26 показано, як можна відмітити 16 полів, що задовольнятимуть умову. Те, що більше не можна випливає з розташування літер на рис. 27. Є 8 літер A, B, …, H, що розташовані вздовж однієї з діагоналей, що складається з 3-х клітинок. Тобто принаймні одна з клітин, що містять кожну з літер має бути не відміченою.

15. Табличка 3×7 формується таким чином (рис. 28). У широких стовпчиках (другий, четвертий та шостий) записується операція множення таких двох одноцифрових чисел, чий добуток більше 10. Перша цифра цього добутку записана у вузький стовпчик лівіше від цього широкого, а друга цифра – у вузький стовпчик, що правіше. Після цього ще додається знизу неповний рядок, в якому записується сума чисел у кожному вузькому стовпчику. Заповніть повністю вузьки стовпчики таблички, в якій нам відомі лише її деякі фрагменти (рис. 29).

1	2x9	8	9x9	1	4x4	6
2	3x7	1	5x3	4	6x9	4
3	4x8	2	6x4	5	7x6	2
6		11		10		12

Рис. 28

		6				
						9
4		16		9		25

Рис. 29

Відповідь: дивись рис. 3.

***Розв'язання*.** На 9 закінчується лише 49. Над цифрою 9 можуть стояти 8 та 8, або 9 та 7. Якщо там 9 та 7, то перші цифри цих добутків 4 та 2 – вони не можуть бути в цьому стовпчику. Таким чином там можуть бути лише 8 та 8 і цифри 1 та 4. Над 4 має стояти 4, бо інакше буде добуток 61 (рис. 30). У лівому стовпчику має стояти добуток 16, бо в цьому стовпчику мають стояти двічі 1 та один раз 2.

Добуток з 1 на кінці – це або 21, або 81. Тоді першою цифрою для 4 – це може бути 84, що неможливо, або 24. Значить вже ці числа можемо поставити у другий вузький стовпчик. Толі в лівому стовпчику можливі 18 та 22, або 28 та 12. Зрозуміло, що справджується лише другий варіант. Там, де не написані добутки, можливі декілька варіантів.

2	4x7	8	9x9	1	3x6	8
1		6	8x8	4	6x8	8
1		2		4	7x7	9
4		16		9		25

Рис. 30

16. Задача № 16 5 класу.