# Математичний занзібар

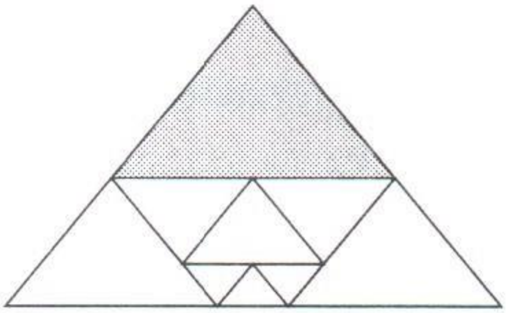
## <u>Молодша ліга</u> ***(8 клас)***

**1.** Рік називається *цікавим*, якщо він складається з чотирьох різних цифр. Наприклад, цікавим є 2019 рік. Легко побачити, що всі роки з 2013 по 2019 включно є цікавими, тобто маємо послідовність із семи цікавих років поспіль. Яка найбільша послідовність із цікавих років може йти поспіль в межах років від 1000 до 9999?

**2.** На міській олімпіаді було запропоновано 5 задач. Тих, хто розв’язав усі 5 задач виявилось у 5 разів менше ніж тих, хто розв’язав принаймні 4 задачі. Тих, хто розв’язав принаймні 4 задачі виявилось у 4 рази менше ніж тих, хто розв’язав принаймні 3 задачі. Тих, хто розв’язав принаймні 3 задачі виявилось у 3 рази менше ніж тих, хто розв’язав принаймні 2 задачі. Тих, хто розв’язав принаймні 2 задачі виявилось у 2 рази менше ніж тих, хто розв’язав принаймні 1 задачу. Тих, хто розв’язав принаймні 1 задачу виявилось стільки ж, скільки тих, хто не розв’язав жодної задачі. Скільки було тих, хто розв’язав не менше 4 задач, якщо усього дітей приймало участь в олімпіаді менше 400?

**3.** Шість команд провели турнір в одне коло у «дробовий футбол». Вони набрали відповідно таку кількість очок: $10, 7, 6, 6, 3$ та $3$ очки. Скільки очок нараховувалося за перемогу в зустрічах, якщо відомо, що це не обов’язково ціле число, при цьому за нічию давали 1 очко, а за поразку – 0 очок?

**4.** Ми повністю покриваємо великий рівнобедрений трикутник трикутниками, подібними до великого трикутника, як на рис. 1. Яке відношення площі сірого трикутника до площі великого трикутника?

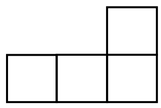


**<u>Рис. 1</u>**

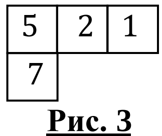
**5.** На дошці записані такі три числа $a, b, c$, що остання цифра суми $a + b$ – це остання цифра числа $c$, остання цифра суми $b + c$ – це остання цифра числа $a$ та остання цифра суми $c + a$ – це остання цифра числа $b$. На дошку записали останні 3 цифри добутку $abc$. Які це можуть бути цифри?

**6.** Декілька піратів поділили порівну скарб, що складався з однакових золотих монет. Якби піратів було на 4 менше, то кожний з них отримав би на 10 монет більше. Якби монет було на 50 менше, то кожному б дісталося на 5 монет менше. Скільки монет містив скарб?

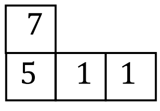
**7.** Клітинки дошки $10 \times 10$ заповнені числами. Чотириклітинний куточок (рис. 2) називається *гарним*, якщо у кожній з двох його клітинок, що має рівно двох сусідів по стороні, записані такі числа, що більше одного з сісідніх та менше іншого. Наприклад, куточок на рис. 3 є гарним, а на рис. 4 – ні. Яка найбільша кількість гарних куточків може утворитися? Гарні куточки різні – якщо в них відмінні принаймні одна клітинка, що її утворює.



**<u>Рис. 2</u>**




**<u>Рис. 3</u>**




**<u>Рис. 4</u>**

**8.** У опуклому чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів $A$ та $C$ паралельні, а бісектриси кутів $B$ та $D$ перетинаються під кутом $30°$. Знайдіть гострику кут між бісектрисами кутів $A$ та $B$.

**9.** Чотирицифрові натуральні числа $M, N$ мають однакову кількість цифр. При цьому виявилося, що $M = 3N$ та щоб одержати число $M$ з числа $N$ треба до однієї з цифр числа $N$ треба додати 2, а до усіх інших цифр додати деяку непарну цифру. Знайдіть принаймні одну таку пару чисел.

**10.** Знайдіть три числа $A$, $B$ та $C$, кожне з яких більше 2024, а значення виразу
$$(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)$$
більше 0 та менше $\frac{1}{2024}$.

**11.** У високому капелюсі є 100 карток з написаними на них числами від 1 до 100 (кожне число зустрічається рівно один раз). Ми навмання витягаємо з капелюха картки доти, доки не виявиться серед витягнутих 3 таких, що є сторонами деякого трикутника, тобто сума чисел на двох картках з меншими числами більше за число на третій картці. Наприклад, три картки з числами $10, 15, 20$ підійдуть, а картки з числами $3, 4, 7$ – ні. Яку найменшу кількість карток потрібно задля цього витягнути?

**12.** У трикутнику $ABC$, я кого кут $ACB$ дорівнює $120°$, проведені висоти $AD$ і $BE$. Нехай $F$ – середина сторони $AB$. Знайдіть найбільший кут $\Delta DEF$.

**13.** Ми говоримо, що ціле число $n$ є *дев'ятичним*, якщо $n \geq 90$ та передостання цифра $n$ дорівнює 9. Наприклад, 10798, 1999 та 90 є дев'ятичним, тоді як 9900, 2009 та 9 не є. Для якого найменшого $k$ існують дев'ятичні числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, для яких справджується рівність: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 2020$.

**14.** На дошці записані три попарно різних натуральних числа $a, b, c$. Після цього застосовується процедура заміни цих чисел на такі: $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$. Після застосування цієї процедури 10 разів, усі три числа, що записані на дошці є натуральними. Яке найменше можливе значення може приймати сума $a+b+c$?

**15.** Прямокутник $3 \times 2024$ (3 рядки та 2024 стовпчиків) заповнений числами $1, 2, \ldots, 6072$ таким чином, що сусідні числа розташовані в сусідніх по стороні клітинках, число 1 розташоване в найлівішому стовпчику, а число $3n$ – у найправішому. Скільки існує варіантів такого заповнення?

**16.** Розріжте прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом довжиною 7 на 6 попарно різних прямокутних рівнобедрених трикутників.

**17.** З цифр $1, 2, \ldots, 9$, використавши кожну з них рівно один раз, утворіть декілька простих чисел з сумою, що менша за 220.

**18.** Три мурахи А, Б та В у вказаних напрямах з однаковою швидкістю бігали по сторонах трьох квадратів, як то показане на рис. 5. Відстань між сторонами сусідніх квадратів по 1 м з кожного боку. У той момент, коли мураха А досяг кута свого квадрату, то усі три мурах виявилися на одній прямій, при цьому мурахи Б та В були на правій стороні свого квадрату. Чому дорівнює сторона більшого квадрату?

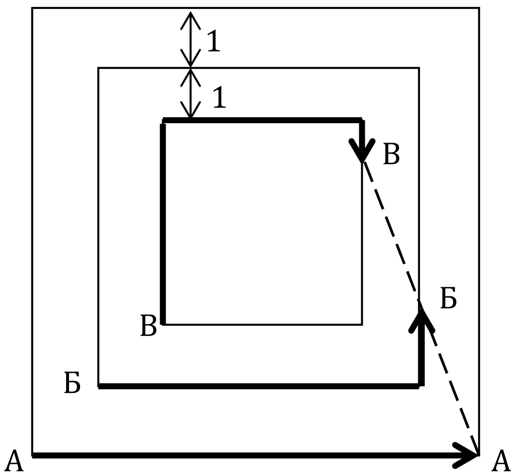


**Рис. 5**

**19.** Є 11 гир, усі різної маси, що вимірюється цілим число грамів. Відомо, що якщо на ваги покласти два набори з цих гир (не обов'язково усі гирі мають бути використані), то завжди переважить той набір, в якому гир більше. Яку найменшу вагу може мати найлегша гиря цього набору?

**20.** Розріжте квадрат на непарну кількість прямокутників та в кожному з яких проведіть рівно одну діагональ таким чином, щоб з проведених діагоналей утворилася замкнена ламана.