Математичний занзібар

<u>Наймолодша ліга</u> *(7 клас)*

1. Рік називається *цікавим*, якщо він складається з чотирьох різних цифр. Наприклад, цікавим є 2019 рік. Легко побачити, що всі роки з 2013 по 2019 включно є цікавими, тобто маємо послідовність із семи цікавих років поспіль. Визначте наступну послідовність із семи послідовних цікавих років.

2. Знайдіть більше число у парі чисел a, b, якщо відомо, що $a + b = ab = a : b$.

3. Шість команд провели турнір в одне коло у «дробовий футбол». Вони набрали відповідно таку кількість очок: $10, 7, 6, 6, 3$ та 3 очки. Скільки очок нараховувалося за перемогу в зустрічах, якщо відомо, що це не обов'язково ціле число, при цьому за нічию давали 1 очко, а за поразку – 0 очок?

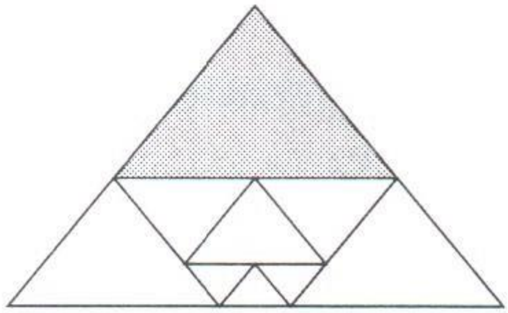

Рис. 1

4. Ми повністю покриваємо великий рівнобедрений трикутник трикутниками, подібними до великого трикутника, як на рис. 1. Яке відношення площі сірого трикутника до площі великого трикутника?

5. На дошці записані такі три числа a, b, c, що остання цифра суми $a + b$ – це остання цифра числа c, остання цифра суми $b + c$ – це остання цифра числа a та остання цифра суми $c + a$ – це остання цифра числа b. На дошку записали останні 3 цифри добутку abc. Які це можуть бути цифри?

6. Декілька піратів поділили порівну скарб, що складався з однакових золотих монет. Якби піратів було на 4 менше, то кожний з них отримав би на 10 монет більше. Якби монет було на 50 менше, то кожному б дісталося на 5 монет менше. Скільки монет містив скарб?

7. Клітинки дошки 10×10 заповнені числами. Чотириклітинний куточок (рис. 2) називається *гарним*, якщо у кожній з двох його клітинок, що має рівно двох сусідів по стороні, записані такі числа, що більше одного з сісідніх та менше іншого. Наприклад, куточок на рис. 3 є гарним, а на рис. 4 – ні. Яка найбільша кількість гарних куточків може утворитися? Гарні куточки різні – якщо в них відмінні принаймні одна клітинка, що її утворює.

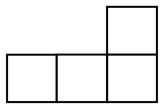

Рис. 2

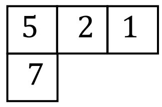

Рис. 3

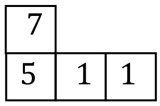

Рис. 4

8. Розмістить на числовій прямій 5 точок таким чином, щоб усі можливі попарні відстані між ними дорівнювали числам 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14 та 15.

9. Натуральні числа $M, N > 10$ мають однакову кількість цифр. При цьому виявилося, що $M = 3N$ та щоб одержати число M з числа N треба до однієї з цифр числа N треба додати 2, а до усіх інших цифр додати деяку непарну цифру. Знайдіть принаймні одну таку пару чисел.

10. Знайдіть три числа A, B та C, кожне з яких більше 2024, а значення виразу

$$(A + B - C)(B + C - A)(C + A - B)$$

більше 0 та менше $\frac{1}{2024}$.

11. У високому капелюсі є 100 карток з написаними на них числами від 1 до 100 (кожне число зустрічається рівно один раз). Ми навмання витягаємо з капелюха картки доти, доки не виявиться серед витягнутих 3 таких, що є сторонами деякого трикутника, тобто сума чисел на двох картках з меншими числами більше за число на третій картці. Наприклад, три картки з числами $10, 15, 20$ підійдуть, а картки з числами $3, 4, 7$ – ні. Яку найменшу кількість карток потрібно задля цього витягнути?
12. Проведіть на площині 6 прямих, які перетинаються рівно в 6 точках.
13. Яку найбільшу кількість попарно різних натуральних чисел можна написати на дошці, щоб сума кожних двох з них дорівнювала степені числа 2.
14. Магазин придбав іграшки, які продає покупцям по 60 гр. якщо покупець бере три іграшки, то четверту йому дарують безкоштовно. Відомо, що прибуток магазина від такого продажу як однієї іграшки, так чотирьох за ціною трьох – однаковий. За якою ціною магазин придбав ці іграшки у виробника?
15. Прямокутник 3×2023 (3 рядки та 2023 стовпчиків) заповнений числами $1, 2, \ldots, 6069$ таким чином, що сусідні числа розташовані в сусідніх по стороні клітинках, а також числа 1 та 6069 так само в сусідніх клітинках. Скільки існує варіантів такого заповнення?
16. Розріжте прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом довжиною 7 на 6 попарно різних прямокутних рівнобедрених трикутників.
17. З цифр $1, 2, \ldots, 9$, використавши кожну з них рівно один раз, утворіть декілька простих чисел з сумою, що менша за 220.
18. Три мурахи А, Б та В у вказаних напрямах з однаковою швидкістю бігали по сторонах трьох квадратів, як то показане на рис. 5. Відстань між сторонами сусідніх квадратів по 1 м з кожного боку. У той момент, коли мураха А досяг кута свого квадрату, то усі три мурах виявилися на одній прямій, при цьому мурахи Б та В були на правій стороні свого квадрату. Чому дорівнює сторона більшого квадрату?

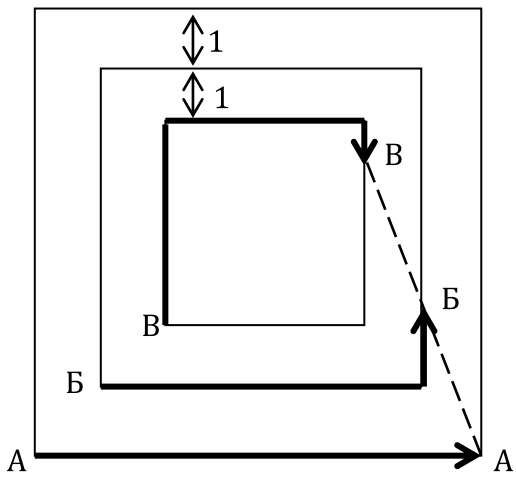

Рис. 5

19. Є 11 гир, усі різної маси, що вимірюється цілим число грамів. Відомо, що якщо на ваги покласти два набори з цих гир (не обов’язково усі гирі мають бути використані), то завжди переважить той набір, в якому гир більше. Яку найменшу вагу може мати найлегша гиря цього набору?
20. Розріжте квадрат на непарну кількість прямокутників та в кожному з яких проведіть рівно одну діагональ таким чином, щоб з проведених діагоналей утворилася замкнена ламана.