Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

Т. П. Гой, О. В. Махней

ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Частина 1.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей
«Математика», «Прикладна математика», «Статистика»
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2017

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика», «Статистика» (протокол № 4 від 26 квітня 2017 р.).

Рецензенти:

Ільків В. С., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»);

Малицька Г. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

Г 59 Гой Т. П. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 1. Диференціальні рівняння першого порядку : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Івано-Франківськ : Голіней, 2017. — 116 с.

Посібник містить короткий теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових задач, підбір задач для практичних занять і самостійної роботи з диференціальних рівнянь. Містить понад 50 прикладів і задач з детальним розв'язуванням.

Для студентів спеціальностей «Математика», «Прикладна математика», «Статистика». Може бути корисним для студентів інженерно-технічних та природничих спеціальностей.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Зміст

Передмова

Пропонований практикум складається з двох частин. Матеріал першої частини охоплює диференціальні рівняння першого порядку, другої частини — диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь, основи теорії стійкості, рівняння з частинними похідними першого порядку.

Автори мають на меті познайомити студентів з основними типами диференціальних рівнянь, методами їх розв'язування, показати приклади широкого застосування диференціальних рівнянь у моделюванні різноманітних явищ і процесів.

Перша частина практикуму містить 11 тем. До кожної теми наведено короткі теоретичні відомості, рекомендована література, розв'язані типові задачі, запропоновані вправи для проведення практичних занять (помічені буквою «А») і для самостійного розв'язування (помічені буквою «С»). Кінець розв'язаних прикладів та задач позначається символом ■, але у тих випадках, де була можливість «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі. У кінці кожної теми подано відповіді до вправ.

Значна кількість вправ для аудиторної роботи надає можливість викладачу методично вдало здійснити підбір завдань для проведення практичних занять, самостійних та контрольних робіт, а студентам — широкі можливості для активної самостійної роботи.

Практикум написаний на підставі досвіду проведення авторами практичних занять з диференціальних рівнянь на факультеті математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів спеціальностей «Математика», «Статистика», «Прикладна математика».

На нашу думку, пропонований практикум сприятиме виробленню та вдосконаленню у студентів практичних навичок розв'язування та дослідження диференціальних рівнянь, вміння будувати диференціальні моделі різноманітних явищ і процесів, активізує навчальний процес при вивченні навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння», спонукатиме студентів до самостійної роботи, саморозвитку та самовдосконалення.

Автори висловлюють вдячність рецензентам: доктору фізико-математичних наук, професору Володимиру Степановичу Ільківу та кандидату фізико-математичних наук, доценту Ганні Петрівні Малицькій за зауваження та корисні поради, які сприяли покращенню цього посібника.

Тема 1. Звичайні диференціальні рівняння та їхні розв'язки

Короткі теоретичні відомості

1.1. Основні означення й поняття. *Звичайним диференціальним рівнянням* називають співвідношення

$$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.1}$$

між незалежною змінною x, шуканою функцією $y = y(x)$ цієї змінної та похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Порядок старшої похідної у рівнянні (1.1) називають *порядком* цього рівняння.

Диференціальне рівняння першого порядку у загальному випадку записують у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.2}$$

а рівняння, розв'язане відносно похідної, як

$$y' = f(x, y). \tag{1.3}$$

Часто застосовують симетричну форму звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.4}$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ — задані функції.

Розв'язком диференціального рівняння (1.2) на інтервалі (a, b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (1.2) у тотожність, тобто $F\left(x, y(x), y'(x)\right) \equiv 0$. Аналогічно означують розв'язки диференціальних рівнянь (1.3) і (1.4).

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називають *інтегралом* рівняння (1.3) або (1.4), якщо воно неявно задає розв'язок $y = y(x)$ цього рівняння. Розв'язок звичайного диференціального рівняння може бути заданий також у параметричній формі, тобто як $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\alpha < t < \beta$.

Графік розв'язку $y = y(x)$ звичайного диференціального рівняння на площині (x, y) називають *інтегральною кривою* цього рівняння.

Задачу відшукання розв'язку $y = y(x)$ рівняння (1.3), який задовольняє задану початкову умову $y(x_0) = y_0$, називають *задачею Коші.*

1.2. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Кожне диференціальне рівняння n-го порядку має, взагалі кажучи, сім'ю розв'язків, яка задається формулою з n довільними сталими.

Розв'язується й обернена задача: побудувати диференціальне рівняння за відомим розв'язком $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, який заданий співвідношенням

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{1.5}$$

Для цього потрібно здиференціювати співвідношення (1.5) n разів за змінною x, вважаючи y функцією аргументу x, а потім з отриманих рівнянь і рівняння (1.5) вилучити довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рекомендована література: [1, с. 7–12], [3, с. 4–8], [9, с. 5–8], [14, с. 3–9], [23, с. 4–10], [24, с. 14–25].

Розв'язування типових вправ і задач

Приклад 1.1. Довести, що функція $y = (1 + Cx + \ln x)^{-1}$ для кожного дійсного числа C є розв'язком диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.
Розв'язання. Знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = \frac{-1}{(1 + Cx + \ln x)^2} \cdot \left(C + \frac{1}{x}\right).$$

Підставляючи в рівняння замість y та y' відповідні вирази, одержуємо, що

$$xy' + y = \frac{-(Cx+1)}{(1+Cx+\ln x)^2} + \frac{1}{1+Cx+\ln x} =$$
$$= \frac{-Cx-1+1+Cx+\ln x}{(1+Cx+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+Cx+\ln x)^2} = y^2 \ln x.$$

Функція $y(x)$ перетворює задане диференціальне рівняння у тотожність і, отже, є його розв'язком. ■

Приклад 1.2. Перевірити, чи параметрично задана функція $x = te^t$, $y = e^{-t}$ є розв'язком диференціального рівняння $(1+xy)y' + y^2 = 0$.

Розв'язання. Оскільки

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-e^{-t}}{e^t + te^t},$$

то після підстановки y' у задане рівняння одержуємо тотожність

$$(1+t) \cdot \frac{-e^{-t}}{e^t(1+t)} + e^{-2t} \equiv 0. \ ■$$

Приклад 1.3. Показати, що для кожного дійсного C співвідношення $y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ є інтегралом диференціального рівняння $\left(x + x^2 + y^2\right) y' - y = 0$.

Розв'язання. Застосовуючи правило диференціювання неявної функції, знаходимо похідну $y'(x)$:

$$y' + \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2+x}.$$

Підставляючи отриманий вираз для y' у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$(x + x^2 + y^2)\frac{y}{x+x^2+y^2} - y \equiv 0. \ ■$$

Приклад 1.4. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл $x^2 + y^2 = Cx$.

Розв'язання. Здиференціювавши задане співвідношення за змінною x, одержуємо $2x + 2yy' = C$. Підставляючи тепер отриманий вираз для C у рівняння сім'ї кривих, одержуємо рівняння $x^2 + y^2 = 2(x + yy')x$ або $2xyy' = y^2 - x^2$. ■

Приклад 1.5. Побудувати інтегральні криві диференціального рівняння $y' = \frac{x+y}{|x+y|}$.

Розв'язання. Рівняння визначене на всій площині (x, y), крім прямої $y = -x$. В області визначення задане рівняння можемо записати у вигляді

$$y' = \begin{cases} 1, & y > -x, \\ -1, & y < -x. \end{cases}$$

Отже, маємо прямі $y = x + C$ у півплощині $y > -x$ і прямі $y = -x + C$ у півплощині $y < -x$. Інтегральні криві зображено на рис. 1.1.

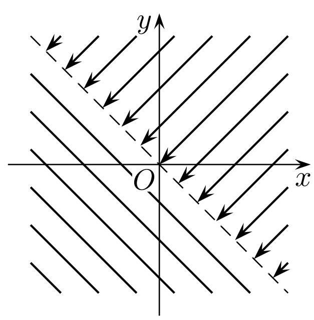

Рис. 1.1

Вправи, рекомендовані для аудиторної роботи

Довести, що задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь (C — довільна стала):

A1. $y = \frac{xe^x}{x+1}$; $\quad (x^2 + x)y' = (x^2 + x + 1)y$.

A2. $y = e^{C \operatorname{ctg} x}$; $\quad y' \sin x = y \ln y$.

A3. $y = \sqrt{2\sqrt{x^3} - x^2}$; $\quad 4xyy' = 3y^2 - x^2$.

A4. $y = x\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt + 2x;\quad xdy - (y + x\sin x)dx = 0.$

A5. $y = (x-1)\int\limits_0^x \frac{e^t}{t^2}\,dt;\quad y' = \frac{y}{x-1} + \frac{x-1}{x^2}e^x.$

Перевірити, чи функції $y = y(x)$, задані неявно, є інтегралами відповідних диференціальних рівнянь:

A6. $\frac{1}{2}\arcsin x^2 = \ln(1+e^y) - y;\quad \sqrt{1-x^4}\,y' + x(1+e^y) = 0.$

A7. $Cy(xy+1) = y+1;\quad (y^2+y)dx + \left(xy + x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

A8. $e^y = y\ln(\ln x);\quad (1-y)e^y y' - \frac{y^2}{x\ln x} = 0.$

A9. $y^2 + x^2 - xy = C;\ (x-2y)dy - (2x-y)dx = 0.$

A10. $y\ln y = x\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x};\quad xy' + x\ln y = x\sin x + y\ln y.$

Перевірити, чи параметрично задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

A11. $\begin{cases} x = \ln t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \ln t; \end{cases}\quad y'(x - \ln y') = 1.$

A12. $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = \frac{1}{4}\,e^{-2t}(1+\sin 2t); \end{cases}\quad 4y = (y'+x)^2.$

A13. $\begin{cases} x = 3(\operatorname{ctg} t + t) + C, \\ y = \cos^3 t; \end{cases}\quad y'^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

A14. $y^2 = 2Cx + C^2.$

A15. $Cy = \operatorname{tg}(Cx).$

A16. $y = x\left(\int\limits_2^x \frac{sds}{\ln s} + C\right) + \sin x.$

A17. $\rho^2 = a\cos 2\varphi$ (a — параметр).

A18. $y = C_1\cos x^2 + C_2\sin x^2.$

A19. Скласти диференціальне рівняння сім'ї прямих, які проходять через точку $(3,4)$.

A20. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і симетричні відносно осі абсцис.

A21. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл, які дотикаються до прямих $y = 0$, $x = 0$ та розташовані у першій і третій координатних чвертях.

Побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

A22. $y' = \frac{xy}{|xy|}$.

A23. $y' = \frac{x+|x|}{y+|y|}$.

A24. $y' = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

A25. Довести, що функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$.

Вправи, рекомендовані для домашнього завдання і самостійної роботи

Перевірити, чи задані функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь:

C1. $x = \sqrt{Ce^y - y - 2}$; $\quad (x^3 + y + 1)y' = 3x^2$.

C2. $y = x\,\mathrm{tg}(\ln x)$; $\quad x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$.

C3. $y = e^{Cx}$; $\quad xy' = y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

C4. $y = \frac{(x+C)^2}{4x^2}$; $\quad y = (xy' + 2y)^2$.

C5. $x = e^{-y}(100 + \mathrm{tg}\, y)$; $\quad (e^{-y}\sec^2 y - x)dy = dx$.

C6. $y = \ln(x^2 + C)$; $\quad xy' = x^2e^y + 2$.

C7. $x = (C - \cos y)\sin y$; $\quad (\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}\, y)y' = 1$.

C8. $x = C(e^{-y} - 1)$; $\quad xy' + 1 = e^y$.

C9. $\begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\, t, \\ y = \ln(t^2 + 1); \end{cases} \quad y = \ln(1 + y'^2)$.

C10. $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2(2\ln t + 1); \end{cases} \quad y' \ln\frac{y'}{4} = 4x$.

C11. $\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = t^3 - t + C; \end{cases} \quad 2y' = x + \ln y'$.

Перевірити, чи є дані співвідношення інтегралами вказаних диференціальних рівнянь:

C12. $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C;\quad y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}.$

C13. $x(e^y+xy)=C;\quad (e^y+2xy)dx+(e^y+x)xdy=0.$

C14. $\sqrt{y-x}+\sqrt{x}=C;\quad y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+3\sqrt{x}.$

C15. $\ln x\cdot\ln y=1;\quad y\ln ydx+x\ln xdy=0.$

C16. $xe^y+ye^x=C;\quad (xe^y+e^x)dy+(e^y+ye^x)dx=0.$

C17. $x^3\ln y+x+y^3=0;\quad (1+3x^2\ln y)dx+\left(3y^2+\frac{x^3}{y}\right)dy=0.$

C18. $xy^2-x^2+\cos y=\pi;\quad (y^2-2x)dx+(2xy-\sin y)dy=0.$

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

C19. $y^3=Cx^3+1.$

C20. $Cy^3+2x-y^2=0.$

C21. $y=Ce^{\operatorname{arctg} x}+\operatorname{arctg} x.$

C22. $y=Cx^2e^{-3/x}.$

C23. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$

C24. $y=\sqrt[3]{Cx^3-3x^2}.$

C25. $x^2-y^2=Cy^3.$

C26. $y=C_1e^x+C_2x.$

C27. $\sin y=C\sin x.$

C28. $y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

Скласти диференціальні рівняння ...

C29. ... кіл довільного радіуса з центром у точці $(1,3)$.

C30. ... логарифмічних спіралей $x^2+y^2=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

C31. ... кіл на площині, які дотикаються до осі ординат.

C32. ... кіл на площині, які проходять через початок координат.

C33. ... кіл радіуса 1, центри яких лежать на прямій, що з'єднує точки $(2,5)$ і $(-1,-4)$.

C34. ... еліпсів, центри яких збігаються з початком координат, а осі симетрії — з осями координат.

C35. ... еліпсів із заданою фокусною відстанню $2C$.

C36. ... цисоїд $(2C-x)y^2=x^3$.

C37. ... парабол з вершиною у точці $(2,-2)$ та віссю симетрії, паралельною до осі ординат.

Побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь:

C38. $y'=\frac{|x^2-y^2|}{x^2-y^2}.$

C39. $y'=\frac{|2x-y|}{2x-y}.$

C40. $y'=\operatorname{sgn}(\cos x).$

Відповіді

A6. Так. **A7.** Ні. **A8.** Ні. **A9.** Так. **A10.** Ні. **A11.** Так. **A12.** Так. **A13.** Ні. **A14.** $yy'^2 + 2xy' = y$. **A15.** $xy' - (1 + y^2)\operatorname{arctg} y = 0$. **A16.** $y = xy' - x\cos x + \sin x - \frac{x^3}{\ln x}$. **A17.** $\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi$. **A18.** $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$. **A19.** $y'(x - 3) = y - 4$. **A20.** $2xy' = y$. **A21.** $2xy(1 + {y'}^2) = (y - xy')^2$. **C1.** Ні. **C2.** Так. **C3.** Ні. **C4.** Так. **C5.** Так. **C6.** Ні. **C7.** Так. **C8.** Так. **C9.** Так. **C10.** Так. **C11.** Ні. **C12.** Так. **C13.** Так. **C14.** Ні. **C15.** Так. **C16.** Так. **C17.** Так. **C18.** Так. **C19.** $xy^2y' = y^3 - 1$. **C20.** $(y^2 - 6x)y' = -2y$. **C21.** $(1+x^2)y' = y - \operatorname{arctg} x + 1$. **C22.** $x^2y' = y(2x+3)$. **C23.** $y'' = 4y$. **C24.** $xy^2y' = y^3 + x^2$. **C25.** $2xy = (3x^2 - y^2)y'$. **C26.** $(1-x)y'' + xy' - y = 0$. **C27.** $y' = \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} x$. **C28.** $y'' + y = 0$. **C29.** $(y-3)y' + x - 1 = 0$. **C30.** $y'(2y - x) + 2x + y = 0$. **C31.** $\left(xy'' - (1 + {y'}^2)y'\right)^2 = \left(1 + {y'}^2\right)^3$. **C32.** $(x^2 + y^2)y'' - 2(1 + y'^2)(xy' - y) = 0$. **C33.** $({y'}^2 + 1)(y - 3x + 1)^2 = (1 + 3y')^2$. **C34.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y'^2}{y} = 0$. **C35.** $xyy' + (x^2 - y^2 - C^2)y' - xy = 0$. **C36.** $2x^3y' = y^3 + 3x^2y$. **C37.** $4y'(x - 2) = 2y$.