

Міністерство освіти і науки України  
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Віктор МАЗУРЕНКО

# МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

ЧАСТИНА 1  
ЛІНІЙНЕ І ДИСКРЕТНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Івано-Франківськ

2023

УДК 519.8:519.176

ББК 22.18

М13

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Прикладна математика» (протокол № 10 від 21.11.2023 р.)*

*Рецензенти:* Соломко А.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

*Дмитришин М.І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.*

### **М13 Мазуренко В. В.**

Методи оптимізації та дослідження операцій. Ч. 1. Лінійне і дискретне програмування: Навч. посіб. – Ів.-Фр.: Ел. вид. ПНУ, 2023. – 306 с.

У першій частині посібника викладені основні методи лінійного і дискретного програмування в теорії оптимізації. Розглянуті спеціальні моделі дослідження операцій: параметричні, транспортні, мережеві. Теоретичний матеріал супроводжується численними прикладами з їх детальним розв'язуванням.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Прикладна математика». Буде корисним при викладанні навчальних дисциплін «Теорія оптимізації», «Дослідження операцій», «Математичне програмування», «Математичне моделювання» тощо.

**УДК 519.8:519.176**

**ББК 22.18**

© Віктор МАЗУРЕНКО, 2023.

---

<b>ВСТУП</b> .....	<b>4</b>
<b>1 МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ</b> .....	<b>12</b>
1.1. СЛАР: метод Жордана–Гауса .....	13
1.2. Основні форми запису ЗЛП .....	23
1.3. Стандартна ЗЛП: графічний метод .....	35
1.4. Канонічна ЗЛП: симплекс–метод.....	46
1.5. Основна ЗЛП: метод штучного базису .....	60
1.6. Канонічна ЗЛП: модифікований симплекс–метод.....	71
1.7. Псевдоканонічна ЗЛП: двоїстий симплекс–метод .....	85
<b>2 МЕТОДИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАМУВАННЯ</b> .....	<b>105</b>
2.1. Цілочислова ЗЛП: графічний метод.....	106
2.2. Цілочислова ЗЛП: метод відтинань Гоморі.....	115
2.3. Дискретна ЗЛП: метод Дальтона–Ллевеліна.....	136
2.4. Дискретна ЗЛП: метод гілок і меж.....	143
2.5. Бінарна ЗЛП: адитивний метод Балаша .....	163
<b>3 СПЕЦІАЛЬНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ</b> .....	<b>169</b>
3.1. Задачі параметричного програмування .....	171
3.2. Транспортні задачі за критерієм вартості.....	189
3.3. Транспортні задачі за критерієм часу та інші моделі .....	228
3.4. Задачі оптимізації на графах і мережах.....	258
3.5. Задачі про оптимальні призначення та комівояжера.....	291
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	<b>303</b>

"... у світі не відбувається нічого,  
у чому не було б видно сенс якогось  
максимуму чи мінімуму ..."

Леонард Ейлер

З проблемами вибору найкращої у деякому сенсі або, як кажуть, *оптимальної* серед декількох альтернативних варіантів поведінки (чи прийняття рішень) стикаємось у різних сферах людської діяльності (на виробництві, у сільському господарстві, економіці, транспорті, військовій справі, техніці, механіці, інформатиці, природознавстві тощо). Задачі такого характеру називають *задачами оптимізації* (також *задачами прийняття рішень*, *задачами оптимального керування*). Слово *оптимальний* походить від латинського *optimus*, що у перекладі означає *найкращий, досконалий*. Суть оптимізаційних задач зводиться до відшукування максимуму чи мінімуму (лат. *maximum* і *minimum* означають відповідно *найбільше* і *найменше*) деяких величин. Обидва ці поняття поєднуються терміном *екстремум* (лат. *extremum* означає *крайне*). Саме тому задачі такого типу називають ще *екстремальними* задачами.

Для прийняття більшості рішень на побутовому рівні науковий підхід, очевидно, не є вкрай необхідний, тут людині достатньо керуватися власним життєвим досвідом і здоровим глуздом. Однак для прийняття відповідальних рішень, коли ціна помилки може виявитись надто високою, наукове обґрунтування для планування діяльності і прийняття рішень стає не тільки бажаним, але й вкрай необхідним. Можливо тому в роки Другої світової війни дослідження у сфері прийняття рішень оформилися в окремий науковий напрям, що отримав назву "*дослідження операцій*". Перші публікації з цієї тематики з'явилися у 1939-40 рр. і були присвячені окремим задачам аналізу і дослідження військових операцій (звідси й назва напрямку). У повоєнні роки принципи та методи дослідження операцій почали використовувати у сфері промислово-фінансового керування. Зі зростанням масштабів виробництва, розвитком методів і форм організації керування економічними системами розширювалися також масштаби операційних досліджень та коло вирішуваних

проблем. Нині *дослідження операцій* – це комплексна математична дисципліна, що займається розробкою і застосуванням методів прийняття оптимальних рішень на основі побудови і аналізу математичних моделей в різних сферах людської діяльності. Під *операцією* слід розуміти систему керованих дій, поєднаних спільним задумом і спрямованих на досягнення певної мети.

Головним методологічним принципом дослідження операцій є *системний підхід* до вирішення поставленої проблеми, який полягає в тому, що будь-яка розв’язувана задача має розглядатися з точки зору її впливу на критерій функціонування системи в цілому. Ще однією важливою особливістю дослідження операцій є *принцип оптимальності*, тобто прагнення відшукати оптимальний розв’язок поставленої задачі. Однак часто на практиці знайти такий розв’язок неможливо з декількох причин: через неадекватність чи надмірну складність математичної моделі, через відсутність методів, через обмеженість наявних ресурсів (н-д, машинного часу ЕОМ) тощо. В такій ситуації обмежуються пошуком не оптимальних, а достатньо “хороших” з погляду практики розв’язків, тобто доводиться шукати компроміс між ефективністю прийнятих рішень та затратами на їх пошук. Мабуть, тому один із засновників дослідження операцій Т. Сааті визначив цю науку як “*мистецтво давати погані відповіді на такі практичні запитання, на які інші методи дають ще гірші відповіді*” [3].

Кінцеві результати операційних досліджень повинні бути продуктом колективної роботи, коли замовники досліджень і аналітики працюють пліч-о-пліч. Відтак, для проведення того чи іншого операційного дослідження на практиці, як правило, створюється аналітична група, до складу якої входять фахівці з різних галузей знань (інженери, математики, економісти, психологи тощо) і завданням якої є комплексне дослідження поставленої проблеми з використанням для цього ідей та методів різних наук. Загалом належним чином проведене операційне дослідження повинно включати такі основні етапи:

1. *Постановка проблеми і розробка концептуальної моделі.* Цей етап операційного дослідження є надзвичайно важливим і відповідальним. Недаремно кажуть, що правильно поставити проблему – це наполовину її вирішити. Найперше мету і задачу дослідження формулює замовник. Далі аналітична група детально обстежує відповідну систему (об’єкт дослідження) і в результаті неодноразових консультацій із замовником виконує змістовну постановку

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

---

- [1] *Бартіш М., Дудзяний І.* Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник. — Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 168 с.
- [2] *Бартіш М., Дудзяний І.* Дослідження операцій. Частина 2. Алгоритми оптимізації на графах: Підручник. — Львів: Вид. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 120 с.
- [3] *Зайченко Ю.* Дослідження операцій: підручник. — 7-е, переробл. та доповн. вид. — К.: Слово, 2006. — 816 с.
- [4] Математичне програмування: Навч. посіб. / А. Ф. Барвінський, І. Я. Олексів, З. І. Крупка та ін.; Під ред. А. Ф. Барвінського. — Львів: Інтелект-Захід, 2004. — 448 с.
- [5] *Попов Ю., Тюття В., Шевченко В.* Методи оптимізації: навч. електрон. посібн. — К.: Електронна бібліотека факультету кібернетики КНУ, 2003. — 215 с.
- [6] *Степанюк В.* Методи математичного програмування: навч. посіб. — К.: Вища школа, 1977. — 272 с.
- [7] *Цегелик Г.* Лінійне програмування. — Львів: Світ, 1995. — 213 с.
- [8] *Balas E.* An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables // *J. ORSA.* — 1965. — Vol. 13, No. 4. — P. 517–546.
- [9] *Bellman R.* On a routing problem // *Quarterly of Applied Mathematics.* — 1958. — Vol. 16, No. 1. — P. 87–90.
- [10] *Cayley A.* On the theory of the analytical forms called trees // *Philos. Mag.* — 1857. — Vol. 13. — P. 19–30. — [Mathematical Papers, Cambridge. — 1891. — Vol. 3. — P. 242–246].
- [11] *Charnes A.* Optimality and degeneracy in linear programming // *Econometrica.* — 1952. — Vol. 20, No. 2. — P. 160–170.
- [12] *Dantzig G.* Application of the simplex method to the transportation problem // Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of Linear Programming Conference, June 20–24, 1949 / Ed. by T. C. Koopmans. — New York: John Wiley and Sons, 1951. — P. 359–373.

- [13] *Dantzig G.* All shortest routes in a graph // *Theory of Graphs, International Symposium, Rome.* — New York: Gordon and Breach, 1966. — P. 91–92.
- [14] *Dantzig G.* Reminiscences about the origins of linear programming // *Mathematical Programming: The Sytate of the Art / Ed. by A. Bachem, M. Groetschel, B. Korte.* — Berlin: Springer Verlag, 1983. — P. 79–86.
- [15] *Dantzig G., Thapa M.* *Linear Programming 1: Introduction.* — NY: Springer, 1997.
- [16] *Dantzig G., Thapa M.* *Linear Programming 2: Theory and Extensions.* — NY: Springer, 2003.
- [17] *Dijkstra E.* A note on two problems in connexion with graphs // *Numerische Mathematik.* — 1959. — Vol. 1. — P. 269–271.
- [18] *Dorfman R.* Mathematical, or „linear”, programming: A nonmathematical exposition // *American Economic Review.* — 1953. — Vol. 43, No. 5. — P. 797–625.
- [19] The dual method of solving the linear programming problems / J. Little, K. Murty, D. Sweeney, C. Karel // *Operations Research.* — 1963. — Vol. 11, No. 5. — P. 972–989.
- [20] *Egerváry J.* Matrixok kombinatorius tulajdonságairól [in hungarian: On combinatorial properties of matrices] // *Matematikai és Fizikai Lapok.* — 1931. — Vol. 38. — P. 16–28.
- [21] *Euler L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis // *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae.* — 1736. — Vol. 8. — P. 128–140. — [Opera Omnia. Series I. — 1766. — Vol. 7. — P. 1–10.].
- [22] *Evans J., Minieka E.* *Optimization algorithms for networks and graphs.* — 2nd edition. — Boca Raton: CRC Press, 1992. — 488 pp.
- [23] *Floyd R.* Algorithm 97: Shortest path // *Comm. of ACM.* — 1962. — Vol. 5. — P. 345.
- [24] *Ford L.R. J., Fulkerson D.* *Flows in networks.* — New Jersey: Princeton University Press, 1962. — P. 276.
- [25] *Frank A.* On kuhn’s hungarian method — a tribute from hungary: Technical Report 2004–14. — Budapest, Hungary: Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization, 2004. — [www.cs.elte.hu/egres].
- [26] *Gomory R.* Outline of an algorithm for integer solution to linear programs // *Bulletin AMS.* — 1958. — Vol. 64. — P. 275–278.

- 
- [27] *Hitchcock F.* The distribution of a product from several sources to numerous localities // *Journal of Mathematical Physics*. — 1941. — Vol. 20. — P. 224–230.
- [28] *Jordan C.* Sur les assemblages de lignes // *J. Reine Angew. Math.* — 1869. — Vol. 70. — P. 185–190.
- [29] *Kantorovich L.* Mathematical methods of organizing and planning production // *Management Science*. — 1960. — Vol. 6, No. 4. — P. 366–422. — [English translation of the famous 1939 article by L. V. Kantorovich, originally published in Russian].
- [30] *Kirchhoff G.* Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird // *Ann. Phys. Chem.* — 1847. — Vol. 72. — P. 497–508.
- [31] *Kőnig D.* Graphok és matrixok [in hungarian: Graphs and matrices] // *Matematikai és Fizikai Lapok*. — 1931. — Vol. 38. — P. 116–119.
- [32] *Kőnig D.* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. — Leipzig: Acad. Verl. M.B.H., 1936. — P. 257. — [Reprint in New York: AMS Chelsea Publishing, 1950].
- [33] *Koopmans T.* Optimum utilization of the transportation system // The Econometric Society Meeting, Proceedings of the International Statistical Conference. — Vol. 5. — 1947. — P. 136–146. — [Reprinted in Supplement to *Econometrica*. — 1949. — Vol. 17].
- [34] *Korbut A., Finkel'shtein Y.* Discrete Programming. — M.: Nauka, 1969. — 264 pp. — in Russian.
- [35] *Kruskal J.* On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem // *Proc. AMS*. — 1956. — Vol. 7, No. 1. — P. 48–50.
- [36] *Kuhn H.* The hungarian method for the assignment problem // *Naval Res. Log. Quart.* — 1955. — Vol. 2, No. 1. — P. 83–97.
- [37] *Land A., Doig A.* An automatic method of solving discrete programming problems // *Econometrica*. — 1960. — Vol. 28, No. 3. — P. 497–520.
- [38] *Lemke C.* The dual method of solving the linear programming problems // *NRLQ*. — 1954. — Vol. 1, No. 1. — P. 36–47.
- [39] *Minty G.* A comment on the shortest route problem // *Operations Research*. — 1957. — Vol. 5. — P. 724.

- 
- [40] *Prim R.* Shortest connection networks and some generalizations // *Bell System Technical Journal*. — 1957. — Vol. 36. — P. 1389–1401.
- [41] *Stigler G.* The cost of subsistence // *Journal of Farm Economics*. — 1945. — Vol. 27, No. 2. — P. 303–314.
- [42] *Voloshin V.* Graph coloring: History, results and open problems // *Alabama Journal of Mathematics, Spring/Fall*. — 2009.
- [43] *Winston W.* Operation Reserach: Applications and Algorithms. — Brooks/Cole–Thomson Learning, 2004. — 1418 pp.