

Секція (номер, назва) _____ *Математика* _____

АНОТОВАНИЙ ЗВІТ

за завершеним дослідженням або завершеною прикладною розробкою, виконання яких здійснювалось у 2013 – 2018 роках

Назва _____ *Багатоточкові і крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь* _____

Керівник роботи: _____ *Мазуренко Віктор Володимирович* _____

Номер державної реєстрації: _____ *0113U006312* _____

Номер облікової картки заключного звіту: _____

Повна назва організації-виконавця: _____ *Державний вищий навчальний заклад*
_____ *«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»* _____

Назва пріоритетного тематичного напрямку організації-виконавця _____

Строки виконання: початок – *11.2013*, закінчення – *10.2018*.

Обсяг коштів, виділених на виконання НДР за весь період (згідно із запитом / фактичний) _____ *0 / 0* тис. грн. (в межах робочого часу)

1. КОРОТКИЙ ЗМІСТ ЗАПИТУ (до 30 рядків тексту):

1.1. Проблема, на вирішення якої було спрямовано прикладне дослідження або прикладну розробку.

Дослідження багатоточкових і крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Вивчення поведінки власних значень і власних функцій цих задач.

1.2. Об'єкт і предмет дослідження або розробки.

Об'єктом дослідження є звичайні диференціальні (ЗДР) і квазідиференціальні (КДР) рівняння;

Предмет дослідження:

- теорія функцій і загальна теорія ЗДР і КДР;*
- теорія крайових і багатоточкових задач для КДР;*

1.3. Мета і основні завдання дослідження або розробки.

Метою дослідження є отримання нових результатів в загальній теорії ЗДР, теорії крайових і багатоточкових задач для КДР та їх застосування у математичному і комп'ютерному моделюванні процесів коливальних і теплопередачі в інженерних конструкціях з дискретно-неперервним розподілом параметрів;

Основні завдання дослідження:

- з'ясувати асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій коректних (при дослідженні яких не виникає проблема множення функціоналів) КДР з розподілами в коефіцієнтах на півосі;*

- використовуючи поняття псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза, отримати необхідні і достатні умови розв'язності багатоточкової задачі для КДР з розподілами у коефіцієнтах, побудувати узагальнену функцію Гріна цієї задачі і встановити її властивості;
- у критичному випадку, коли порушується критерій розв'язності породжуючої багатоточкової задачі, дати відповідь на питання, чи можна з допомогою лінійних збурень зробити задачу розв'язною і в разі, якщо це так, то якими повинні бути збурюючі доданки у КДР і багатоточкових умовах;
- побудувати ЗДР, розв'язками яких є нові неелементарні функції, визначені з допомогою зростаючих і центральних факторіальних степенів, з метою розширення кола прикладних задач, які можуть бути розв'язані у замкненому вигляді;
- застосувати результати теорії дискретно-неперервних крайових задач у математичному та комп'ютерному моделюванні втрати стійкості легкосплавних бурильних труб з протекторним потовщенням і внутрішнім потоком промивної рідини та процесів теплопередачі в інженерних конструкціях шаруватої структури.

1.4. У випадку, якщо відбувалися коригування мети, предмету дослідження або розробки, основних завдань, відхилення від запланованого календарного плану роботи – описати це у звіті.

Корегування мети, предмету дослідження, основних завдань та відхилення від календарного плану роботи не було.

2. ОПИС ПРОЦЕСУ НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ АБО РОЗРОБКИ (до 50 рядків тексту):

2.1. Описати підхід щодо проведення дослідження або розробки, визначити, у чому її новизна.

У процесі виконання наукового дослідження застосовано такі підходи:

- у дослідженні крайових і багатоточкових задач – підхід, котрий враховує природну єдність дискретного (зосереджені величини) і неперервного (розподілені величини), що дозволяє моделювати ширше коло реальних фізичних явищ і процесів з дискретно-неперервним розподілом параметрів, як наприклад, коливання стрижнів з кусково-змінним перерізом, крутильні коливання валів змінної жорсткості, процеси теплопередачі через шаруваті конструкції при неідеальному тепловому контакті шарів, коливання пластин і оболонок із зосередженими в точках, на лініях чи поверхнях масами і моментами інерції, несучими пластами нульової товщини, тощо. З математичної точки зору це означає присутність у відповідних диференціальних моделях доданків вигляду $(p(x)u^{(m)})^{(n)}$, де $p(x)$ є функція з обмеженою варіацією на розглядуваному проміжку, котра якраз і поєднує в собі як неперервну, так і дискретну складові компоненти. З допомогою операції n -кратного диференціювання звести такі рівняння до звичайних диференціальних не вдається, бо в результаті отримуємо рівняння з особливостями імпульсного типу;
- у дослідженні проблем загальної теорії диференціальних рівнянь і теорії функцій – підхід, що використовує двоїстість, притаманну спадним і зростаючим факторіальним степеням у комбінаторному аналізі, з метою отримання нових неелементарних функцій і відповідних ЗДР, розв'язками яких вони є, та розширення кола прикладних задач, розв'язуваних в замкненому вигляді.

2.2. Розкрити основні ідеї дослідження або розробки, як вони втілювались.

При виконанні наукового дослідження знайшли свої втілення:

- ідея введення квазіпохідних, яка дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів відповідних диференціальних моделей або звести їх до мінімуму;
- ідея про структуру фундаментальної матриці довільного КДР, яка будується з допомогою лише аналогу функції Коші та її мішаних квазіпохідних, що дозволяє конструктивно

зображати розв'язки відповідних крайових задач, а також аналізувати асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій цих задач;

- ідея представлення розв'язку багатоточкових задач для КДР в інтегральній формі (з допомогою узагальненої функції Гріна) та ефективного використання при цьому апарату псевдообернених матриць Мура-Пенроуза, який дозволяє охопити також неklasичний випадок, коли кількість багатоточкових умов перевищує порядок рівняння;
- ідея наближеного розв'язування довільного ЗДР з неперервними коефіцієнтами шляхом побудови (з допомогою L -апроксимації (лінеаризації) і D -апроксимації (дискретизації) первісних його коефіцієнтів) апроксимуючого (частково) виродженого КДР, точний розв'язок якого вдається зобразити у вигляді сплайнів;
- ідея заміни спадних факторіальних степенів у степеневих рядах, що є зображеннями відомих трансцендентних функцій, зростаючими чи центральними факторіальними степенями для отримання нових неелементарних функцій та побудови відповідних ЗДР, розв'язками яких вони є.

- 2.3. Навести основні гіпотези дослідження або розробки, як вони підтверджувались або спростовувались, визначали формування науково-прикладних результатів.

Для КДР з мірами на півосі планувалося з'ясувати асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі подібно до того як це раніше було зроблено для ЗДР з гладкими коефіцієнтами, функціонально-диференціальних рівнянь чи ЗДР з коефіцієнтами імпульсного типу. Позаяк отримати очікуваний результат класичними методами не видавалося можливим, то виникла потреба застосування концепції квазіпохідних, котра й дозволила відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів.

У випадку багатоточкової задачі для нелінійного системи ЗДР планувалося довести нові теореми існування та єдиності, а також обґрунтувати існування ширшого, ніж у відомих роботах, класу функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок.

Для КДР з розподілами в коефіцієнтах ми очікували, що, використовуючи апарат псевдообернених матриць Мура-Пенроуза, вдасться отримати зручний критерій розв'язності багатоточкової задачі з умовами загального вигляду, що і було зроблено в результаті дослідження. При цьому у критичному випадку, коли отриманий критерій розв'язності досліджуваної задачі порушується, природно виникла гіпотеза про те, що при допомозі лінійних збурень можлива поява розв'язків відповідної збуреної задачі. Було з'ясовано якими повинні бути збурюючі доданки в рівнянні і багатоточкових умовах, щоб висунута гіпотеза була підтверджена.

Також у процесі дослідження висувалась і була підтверджена гіпотеза про те, що заміна спадних факторіальних степенів у степеневих рядах, які є зображеннями відомих трансцендентних функцій, зростаючими чи центральними факторіальними степенями призведе до появи нових неелементарних функцій і розширення кола прикладних задач, розв'язуваних в замкненому вигляді.

- 2.4. Представити нові або оновлені методи та засоби, методика та методологію дослідження або розробки, що створені авторами у ході виконання роботи; обґрунтувати, чим вони відрізняються від існуючих.

У ході виконання роботи не створювались нові або оновлені методи та засоби, методика та методологія дослідження.

- 2.5. Описати особливості структури та складових виконання дослідження або розробки.

Структура та складові виконання дослідження не мали якихось особливостей.

3. ОДЕРЖАНІ НАУКОВО-ПРИКЛАДНІ РЕЗУЛЬТАТИ (до 100 рядків тексту)

3.1. Результати етапів (відповідно до технічного завдання) відобразити у таблиці:

Таблиця 1

Номер етапу, строки	Назва етапу згідно з технічним завданням	Заплановані результати	Отримані результати
1. з <u>11.2013</u> по <u>10.2018</u>	<i>Багатоточкові і крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь</i>	<p><i>Дослідити асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій крайової задачі для КДР з мірами на півосі.</i></p> <p><i>Вивчити питання розв'язності багатоточкових задач для ЗДР і КДР.</i></p> <p><i>Дослідити властивості нових неелементарних функцій, породжених зростаючими і центральними факторіальними степенями, та побудувати ЗДР, розв'язками яких вони є.</i></p> <p><i>Виконати математичне і комп'ютерне моделювання процесів коливальних і теплопередачі в інженерних конструкціях з дискретно-неперервним розподілом параметрів.</i></p>	<p><i>Отримані асимптотичні формули для фундаментальної системи розв'язків КДР з розподілами в коефіцієнтах на півосі, які дозволили з'ясувати асимптотичні поведінки власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі.</i></p> <p><i>У випадку багатоточкової задачі Валле-Пуссена для нелінійної системи ЗДР доведено теорему існування та єдиності розв'язків, та запропоновано ітераційні схеми для їх відшукування.</i></p> <p><i>У випадку багатоточкової задачі з функціональними умовами для КДР з розподілами в коефіцієнтах встановлені необхідні і достатні умови її розв'язності та отримане зображення розв'язку в інтегральній формі з допомогою узагальненої функції Гріна; вдале використання при цьому апарату псевдообернених матриць Мура-Пенроуза дозволило охопити також неklasичний випадок, коли кількість багатоточкових умов перевищує порядок рівняння. Крім того, у критичному випадку, коли порушується критерій розв'язності породжуючої багатото-</i></p>

		<p>чкової задачі, було доведено, що з допомогою лінійних збурень, які задовольняють певні умови, можлива поява розв'язків збуреної задачі.</p> <p>Запропоновані нові неелементарні функції, побудовані у вигляді степеневих рядів зі зростаючими та центральними факторіальними степенями, встановлені їх властивості, отримані формули, що їх пов'язують, та знайдені ЗДР, розв'язками яких вони є.</p> <p>Запропонована схема розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності з узагальненими коефіцієнтами, що є математичною моделлю процесів теплопередачі в інженерних конструкціях шаруватої структури.</p> <p>Виконане математичне і комп'ютерне моделювання втрати стійкості легкосплавних бурильних труб з протекторним потовщенням і внутрішнім потоком промивної рідини, результатом якого є отримання патенту на винахід і свідоцтва про реєстрацію авторського права на комп'ютерну програму.</p>
--	--	--

3.2. Докладно розкрити одержані прикладні наукові результати щодо створення нового наукового знання або навести описи технологій, конструкторської, технологічної та програмної документації, дослідних зразків, положень, регламентів, стандартів, проектів нормативно-правових і методичних документів, що були створені, змінені та/або доповнені авторами у процесі виконання проекту.

Всі отримані результати дослідження нові, позаяк стосуються нових об'єктів, які раніше не досліджувались, але природно виникають в теорії звичайних (квазі)диференціальних рівнянь і теорії функцій дійсної змінної.

Окремі результати теорії дискретно-неперервних крайових задач, будучи застосованими у математичному і комп'ютерному моделюванні втрати стійкості легкосплавних бурильних труб, лягли в основу винаходу, що стосується удосконалення конструкції алюмінієвої бурильної труби з протекторним потовщенням і внутрішнім потоком промивної рідини шляхом оптимізації геометричної форми протектора, яка забезпечує максимальну стійкість бурильної труби під дією експлуатаційних навантажень при одночасному низькому рівні гідравлічного опору руху промивної рідини. Це дозволяє уникнути небезпеки завихрення потоку промивної рідини в зоні переходу від протектора до основного тіла труби та позбутися інтенсивного розмивання стінок стовбура свердловини і обвалоутворення. Інженерні розрахунки проводились наближеним методом шляхом L -апроксимації (лінеаризації) і D -апроксимації (дискретизації) первісних для коефіцієнтів відповідної диференціальної моделі і побудови апроксимуючої системи, точний розв'язок якої вдається зобразити у вигляді сплайнів. Для автоматизації числових розрахунків розроблена спеціальна комп'ютерна програма та отримане свідоцтво про авторське право на її використання.

- 3.3. Визначити, які із результатів і як само були науково обґрунтовані та доведені, як вони пов'язані із закономірностями організації та розвитку природи, суспільства людини, їх взаємозв'язків (і якими саме). Які результати розробки було створено виключно на основі узагальнення практичного досвіду і не вимагали науково-технологічних досліджень.

Всі результати досліджень є строго математично доведені, пройшли апробацію на 20 міжнародних математичних і науково-технічних конференціях, рецензування у 13 міжнародних і вітчизняних наукових журналах, окремі – процедуру патентування в Українському інституті інтелектуальної власності та процедуру реєстрації авторського права у Міністерстві економічного розвитку і торгівлі України.

- 3.4. Довести наукову і науково-прикладну новизну результатів роботи на основі їх змістовного порівняння із існуючими аналогами у світовій науці, техніці і технологіях на основі посилань на конкретні публікації. Список цих публікацій навести у Додатку 1. Довести переваги отриманих науково-прикладних результатів над аналогами, суміжними науково-прикладними напрацюваннями світової спільноти вчених, конструкторів, технологів, програмістів.

Для КДР з мірами на півосі з'ясовано асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі подібно до того як це раніше було зроблено для ЗДР з гладкими коефіцієнтами [1, 2], функціонально-диференціальних рівнянь [3, 4] чи ЗДР з коефіцієнтами імпульсного типу [5, 6]. Позаяк отримати очікуваний результат класичними методами не видавалося можливим, то виникла потреба застосування концепції квазіпохідних, котра й дозволила відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів. В рамках цього підходу вдалося отримати асимптотичні формули для фундаментальної системи розв'язків КДР, які надалі були використані для встановлення асимптотики. Ці результати узагальнюють окремі результати робіт [1, 2, 7, 8].

У випадку багатоточкової задачі для нелінійного системи ЗДР важливою проблемою на шляху підсилення відомого критерію Валле-Пуссена розв'язності цієї задачі є отримання і використання різних оцінок диференційовних функцій. На відміну від методів дослідження задачі, застосованих авторами ряду статей [9-11], що використовують такі оцінки, нами застосований інший підхід, що передбачає побудову ітераційної схеми для еквівалентного інтегро-диференціального рівняння. Це дозволило довести нові теореми існування та єдиності, а також обґрунтувати існування ширшого, ніж у згаданих статтях, класу функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок.

Для ЗДР з неперервними коефіцієнтами [12-16] і ЗДР з імпульсною дією [14, 17, 18] відомими є критерії розв'язності крайових задач з умовами загального вигляду, записані в термінах псевдооберненої матриці [19] до матриці, отриманої підстановкою фундаментальної системи розв'язків у крайові умови. В дослідженні аналогічні результати отримані для багатоточкової задачі для КДР з розподілами в коефіцієнтах і узагальнюють окремі результати робіт [20-22]. Далі у критичному випадку, коли критерій розв'язності задачі порушується, природно виникало питання про те, чи при допомозі лінійних збурень можлива поява розв'язків цієї задачі. Було з'ясовано якими повинні бути збурюючі доданки в рівнянні і багатоточкових умовах, щоб відповідь на поставлене питання була позитивною.

У комбінаторному аналізі спостерігаємо двоїстість, притаманну зростаючим і спадним факторіальним степеням. Якщо комбінаторна задача приводить до деякої комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то зазвичай існує змістовна двоїста комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої комбінаторної тотожності з участю зростаючих факторіальних степенів [23, 24]. Одним з численних прикладів таких двоїстих комбінаторних тотожностей є тотожності Вандермонда та Нерлунда. Класичні трансцендентні функції e^x , $\sin x$, $\cos x$ можна визначити у вигляді степеневих рядів з факторіалами (спадними факторіальними степенями). Якщо останні замінити на зростаючі та центральні факторіальні степені, то отримаємо нові неелементарні функції, котрі задовольняють певні співвідношення і є розв'язками диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами. Досліджені також властивості інших неелементарних функцій типу інтегралів Доусона і Френеля, класичні аналоги яких мають широке застосування в різних галузях [25-35].

Результати дослідження мішаної задачі для рівняння теплопровідності з розподілами у коефіцієнтах, яке слугує математичною моделлю процесів теплопередачі в інженерних конструкціях шаруватої структури, розвивають результати робіт [36, 37].

Основними результатами математичного і комп'ютерного моделювання стійкості легкосплавних бурильних труб з протекторним потовщенням і внутрішнім потоком промивної рідини, є отримання патенту на винахід і свідоцтво про реєстрацію авторського права на комп'ютерну програму. Ці результати отримані в руслі робіт [38-41] і доповнюють останні.

3.5. Обґрунтувати цінність очікуваних результатів для світової та вітчизняної науки, техніки і технологій.

Всі отримані результати досліджень є новими, опубліковані у фахових наукових виданнях, зокрема тих, що індексуються БД Scopus та Web of Science, окремі з них включені до колективної наукової монографії. За результатами досліджень зареєстровано патент на винахід (корисну модель) та отримано свідоцтво про реєстрацію авторського права на комп'ютерну програму. Відтак, результати досліджень стануть вагомим внеском у розвиток вітчизняної і світової науки і техніки.

4. ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ ДЛЯ СУСПІЛЬСТВА ТА ЕКОНОМІКИ (до 100 рядків)

4.1. Визначити та обґрунтувати використання очікуваних результатів для конкретної галузі, потреб розвитку науково-технологічної сфери, вирішення світових проблем; довести відповідність потребам суспільства та економіки країни. Навести результати проведених маркетингових досліджень щодо просування науково-прикладних результатів на світовий ринок, визначити потенційних замовників (Додаток 2), навести перелік реальних майбутніх користувачів, з якими вже встановлено попередні договірні стосунки (Додаток 3).

Одержані результати носять теоретико-прикладний характер. Результати з дослідження крайових і багаточкових задач для КДР з розподілами у коефіцієнтах можуть бути застосовані в інженерній практиці при дослідженні процесів коливань і теплопередачі у фізичних системах з дискретно-неперервним розподілом параметрів. За окремими з результатів зареєстровано патент на винахід (корисну модель) і отримано свідоцтво про реєстрацію авторського права на комп'ютерну програму. Запропоновані в дослідженні нові неелементарні функції типу інтегралів Доусона і Френеля можуть бути застосовані в таких галузях як астрофізика, спектроскопія, теорія дифракції, механіка в'язкості, проектування транспортних мереж, фінансова математика.

- 4.2. Довести цінність результатів для підготовки фахівців у системі освіти, зокрема вищої кваліфікації. Відокремити використання очікуваних результатів від науково-методичних завдань, що виконуються викладачами у межах їх основної педагогічної діяльності. Навести у Додатку 4 теми досліджень магістрантів (студентів), аспірантів і докторантів, кількість місяців їх роботи за темою з оплатою.

Результати досліджень із загальної теорії і теорії крайових задач для КДР використані у колективній науковій монографії двох виконавців проекту у співавторстві з львівськими науковцями, а також включені до програми спеціального курсу "Математичне моделювання систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів" для студентів спеціальності «Прикладна математика» (http://mazurenko.pu.if.ua/teaching_uk/students/pm5/) та спеціального курсу «Узагальнені квазідиференціальні рівняння» для студентів спеціальності «Математика» (http://mazurenko.pu.if.ua/teaching_uk/students/m4/) в ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника".

Результати досліджень, що стосуються введення нових неелементарних функцій, визначених з допомогою зростаючих і центральних факторіальних степенів, а також відповідних ЗДР, розв'язками яких вони є, будуть використані у докторській дисертації. Крім того, за тематикою досліджень виконувались та успішно захищались магістерські роботи, в тому числі з отриманням свідоцтва про реєстрацію авторського права на твір.

5. ОСНОВНІ ПОКАЗНИКИ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРОБКИ

Зараховуються виключно роботи, серед авторів яких 50% і більше належать до колективу виконавців, визначеного у Таблиці 11. Оцінюючи наукові праці на відповідність темі, меті, предмету та завданням дослідження, експерт має право не зараховувати їх у разі повної невідповідності.

- 5.1. Перелік опублікованих за темою статей в журналах, що індексуються БД Scopus та/або Web of Science Core Collection (WoS) (або Index Copernicus для соціо-гуманітарних наук) (окремо за кожною наукометричною базою)

Таблиця 2

№ з/п	Повні дані про статті з веб-адресою електронної версії; <u>підкреслити</u> <u>прізвища авторів</u> , які належать до списку виконавців	Наукометр. база даних
1	<u>Vlasiy O., Mazurenko V., Ropyak L., Rogal O.</u> Improving the alluminum drill pipes stability by optimizing the shape of protector thickening. <i>Eastern-European Journal of Enterprise Technologies</i> . 2017. V. 1. No. 7 (85). P. 25-31.	Scopus
2	<u>Makhnei O.V.</u> Boundary problem for the singular heat equation. <i>Carpathian Mathematical Publications</i> . 2017. 9 (1). P. 86-91.	WoS
3	<u>Makhnei O.V.</u> Mixed problem for the singular partial differential equation of	WoS

	parabolic type. <i>Carpathian Mathematical Publications</i> . 2018. 10 (1). P. 165-171.	
--	---	--

Анотації статей українською мовою, які представляють основні результати дослідження, навести у Додатку 5

5.2. Перелік опублікованих за темою англomовних статей та тез доповідей у матеріалах міжнародних конференцій, що індексуються БД Scopus або WoS (або Index Copernicus для соціо-гуманітарних наук) (окремо за кожною наукометричною базою)

Таблиця 3

№ з/п	Повні дані про статті та тези доповідей з веб-адресою електронної версії; <u>підкреслити прізвища авторів</u> , які належать до списку виконавців	Наукометр. база даних
1	<u>Vlasiy O., Mazurenko V., Ropyak L., Rogal O.</u> Improving the alluminum drill pipes stability by optimizing the shape of protector thickening. <i>Eastern-European Journal of Enterprise Technologies</i> . 2017. V. 1. No. 7 (85). P. 25-31.	Scopus
2	<u>Makhnei O.V.</u> Boundary problem for the singular heat equation. <i>Carpathian Mathematical Publications</i> . 2017. 9 (1). P. 86-91.	WoS
3	<u>Makhnei O.V.</u> Mixed problem for the singular partial differential equation of parabolic type. <i>Carpathian Mathematical Publications</i> . 2018. 10 (1). P. 165-171.	WoS

5.3. Перелік опублікованих за темою статей, у журналах що входять до переліку фахових видань України (окремо статті у журналах, що рекомендовані секціями Наукової ради МОН), а також статей у закордонних журналах, які не увійшли до п.5.1 і 5.2

Таблиця 4

№ з/п	Повні дані про статті з веб-адресою електронної версії; <u>підкреслити прізвища авторів</u> , які належать до списку виконавців
1	<u>Собкович Р.І., Казмерчук А.І.</u> Побудова функції Гріна в задачі Валле-Пуссена для нелінійних систем диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації. 2013. Т.5, №1. С. 121-128.
2	<u>Гой Т.П.</u> Неелементарні функції, породжені центральними факторіальними степенями // Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». 2014. № 1133. С. 131-139.
3	<u>Goy T.P., Zatorsky R.A.</u> On a nonelementary function of the Dawson's integral type // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». 2014. Вип. 1. С. 15-19.
4	<u>Гой Т.П.</u> Інтегралі від функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями // Таврійський вісник інформатики та математики. 2014. Том 24. №1. С. 14-22.
5	<u>Гой Т.П.</u> О центральных факториальных степенях и некоторых их применениях // Межвуз. сб. науч. трудов «Математика и математическое образование. Теория и практика». Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. Вып. 9. С. 30-35.
6	<u>Makhnei O.V.</u> Asymptotics of a fundamental solution system for a quasidifferential equation with measures on the semiaxis // Карпатські математичні публікації. 2014. Т. 6, № 1. С. 113-122.
7	<u>Гой Т.П.</u> Нові функції, означені при допомозі факторіальних степенів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2014. Вип. 11. С. 18-29.

8	<u>Goy T.P.</u> Two non-elementary integral functions defined using central factorial powers // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Математика». 2015. Вип. 20. С. 89-97
9	<u>Гой Т.П., Заторський Р.А.</u> Використання трикутних матриць для побудови звичайних диференціальних рівнянь за відомою фундаментальною системою розв'язків // Наукові записки НаУКМА. Серія Фізико-математичні науки. 2015. Т. 165. С. 3-6.
10	<u>Гой Т.П.</u> Специальные функции, построенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2016. Т. 2. № 40. С. 19-32.

5.4. Перелік опублікованих за темою монографій

Таблиця 5

№ з/п	Повні дані про монографії; <u>підкреслити прізвища авторів, які належать до списку виконавців</u>
1	<u>Таций Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власий О.О.</u> Обобщенные квазидифференциальные уравнения. Львов: Изд. ЛНУ БЖД, 2017. 303 с.

Анотації монографій українською мовою навести у Додатку 6

5.5. Перелік опублікованих за темою підручників, навчальних посібників, словників, довідників

Таблиця 6

№ з/п	Повні дані про підручники, навчальні посібники, словники, довідників; <u>підкреслити прізвища авторів, які належать до списку виконавців</u>
1	—

5.6. Перелік отриманих за темою охоронних документів на об'єкти права інтелектуальної власності України або інших країн (патенти, авторські свідоцтва)

Таблиця 7

№ з/п	Повні дані про охоронні документи; <u>підкреслити прізвища авторів, які належать до списку виконавців</u>
1	<u>Власій О., Мазуренко В., Роп'як Л., Рогаль О., Бурда М.</u> Бурильна труба із легкого сплаву. — Патент на винахід (корисну модель) № а201612570, дата публ. заявки: 12.06.2017, Бюл. №11, дата публ. патенту: 25.01.2018, Бюл. №2. — 4 с.
2	А. с. № 79152. Комп'ютерна програма «Програма для розрахунку стійкості бурильної труби з протектором» / <u>Мазуренко В.В., Білан Г.А., Роп'як Л.Я., Рогаль О.В., Савчук В.В.</u> № 79846; заявл. 24.04.2018; опубл. 18.05.2018.

5.7. Створено та передано для використання поза межами організації-виконавця методик, технологій, зразків, проектної і конструкторської документації, інформаційно-аналітичні матеріали, рекомендації, пропозиції до органів влади тощо, зокрема на основі укладеного договору на науково-технічну продукцію, що підтверджується довідкою від бухгалтерії закладу вищої освіти (наукової установи) із зазначенням обсягів фінансування виконаних робіт

Таблиця 8

№ з/п	Передані методики, рекомендації, пропозиції, інші документи; <u>підкреслити прізвища авторів, які належать до списку виконавців</u>	З них на основі укладеного договору на науково-	Обсяг фінансування за договором, тис. грн

		технічну продукцію	
1.	–	–	–

5.8. Перелік захищених кандидатських і докторських дисертацій виконавцями

Таблиця 9

№ з/п	Повні дані про дисертації
1	–

Анотації дисертацій навести у Додатку 7

5.9. Кількість грантів, за якими працювали виконавці, що фінансувались закордонними організаціями (з відповідним підтвердженням від закладу вищої освіти (наукової установи), посиланням на сайт грантового проекту або офіційним листом від грантодавця)

Таблиця 10

№ з/п	ПІБ виконавців	Назва гранту	Фінансування, тис. грн
1	–	–	–

Короткий зміст (анотації) досліджень за грантами навести у Додатку 8

6. ВИКОНАВЦІ ПРОЕКТУ (з оплатою в межах запиту)

- доктори наук: 1, кандидати наук: 5;
 - молоді вчені до 35 років 0, з них кандидатів 0, докторів 0, докторантів: 0, аспірантів 0;
 - наукові працівники без ступеня 0;
 - інженерно-технічні кадри: 0, допоміжний персонал 0;
 - студенти 1.
- Р а з о м : 6.

Таблиця 11. Виконавці проекту* (з оплатою в межах запиту)

№ з/п	Прізвище, ім'я, по батькові	Науковий ступінь	Вчене звання	Посада і місце основної роботи	Вік
1	Заторський Роман Андрійович	докт. фіз.-мат. наук	проф.	професор кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики	65
2	Гой Тарас Петрович	канд. фіз.-мат. наук	доц.	доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики	49
3	Казмерчук Анатолій Іванович	канд. фіз.-мат. наук	доц.	доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики	53
4	Махней Олександр Володимирович	канд. фіз.-мат. наук	доц.	доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики	41
5	Власій Олеся Орестівна	канд. тех. Наук	доц.	доцент кафедри математики та інформатики і методики навчання	41

6	Мазуренко Віктор Володимирович	канд. фіз.-мат. наук	–	доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики	41
---	--------------------------------	----------------------	---	--	----

*вносяться дані про всіх виконавців за весь час виконання робіт, окрім допоміжного персоналу та студентів

Рішення вченої (наукової, науково-технічної) ради від _____ протокол № _____ щодо завершення роботи

Керівник роботи

Проректор (заступник директора)
із наукової роботи

ПІБ: Мазуренко Віктор Володимирович

ПІБ: Загороднюк Андрій Васильович

Підпис, дата: _____

Підпис, дата: _____

МП

Додаток 1. Список основних публікацій закордонних та вітчизняних вчених, на які посилаються автори роботи для доведення наукової новизни власних результатів

№ з/п	Повні дані про статті
1	Фунтаков В.Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора четного порядка на полуоси $[0, \infty)$ // Изв. Акад. Наук Аз. ССР 1960. 6. С. 3-19.
2	Naimark M. A. Linear differential operators. Dover Publications, Mineola, New York, 2009.
3	Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // УМЖ. 1990. Т. 42, № 11. С. 1460-1469.
4	Радзиевский Г.В. Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // УМЖ. 1995. Т. 47, № 6. С. 811-836.
5	Рыхлов В.С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром. УМЖ. 1996. Т. 48, № 1. С. 96-108.
6	Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала содержащего δ -функции // Диф. уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 735-751.
7	Махней О.В. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння з мірами на півосі // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки. 2010, № 687, С. 82-90.
8	Махней О.В., Тацій Р.М. Сингулярні квазидиференціальні оператори на скінченному інтервалі. Ів.-Фр.: Сімик, 2012. 360 с.
9	Бессмертных Г.А., Левин А.Ю. О некоторых оценках дифференцируемой функции одной переменной // ДАН СССР. 1962. Т. 144, № 3. С. 471-474.
10	Левин А.Ю. Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных // Матем. Сб., 1964, Т. 64(106), № 3. С. 396-409.
11	Курпель Н.С., Марусяк А.Г. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами // УМЖ. – 1980. – Т.32, №2. – С. 223–226.
12	Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. К.: Наук. Думка, 1990.
13	Boichuk A.O. A set of bounded solutions of a linear weakly perturbed system // Nonlin. Oscillations. 2003. V. 6, No. 3, P. 309-318.
14	Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary—Value Problems. VSP, Utrecht, Boston, 2004.

15	Чуйко С.М. Возникновение решений линейной неперовой краевой задачи // УМЖ. 2007. Т.59, № 8. С. 1148-1152.
16	Шовкопляс Т.В. Достатні умови виникнення розв'язку слабкозбуреної крайової задачі. <i>Динамічні системи</i> . 2009. Вып. 27. С. 143-149.
17	Шовкопляс Т.В. Достатні умови біфуркації розв'язку імпульсної крайової задачі зі збуреннями. <i>Динамічні системи</i> . 2010. Вып. 28. С. 141-152.
18	Boichuk A., Langerova M., Ruzickova M., Voitushenko E. Systems of singular differential equations with pulse action. <i>Advances in Difference Equations</i> . 2013. 186. P. 1-8.
19	Barata J.C.A., Hussein M.S. The Moore–Penrose pseudoinverse: a tutorial review of the theory. <i>Braz. J. Phys.</i> 2012, 42 (1-2), P. 146-165.
20	Ashordiya M.T. On a method for constructing solutions of boundary value problems for linear generalized differential systems. <i>Differential Equations</i> . 2007. 43 (10). 1327-1339.
21	Mazurenko V.V., Tatsii R.M. Solvability of a nonhomogeneous boundary value problem for a differential system with measures. <i>Differential Equations</i> . 2003. 39 (3). P. 328-336.
22	Власій О.О., Мазуренко В.В. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах. <i>Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки</i> . 2009. № 643. С. 73-86.
23	Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. М. : Мир, 1998.
24	Заторський Р.А, Числення трикутних матриць та його застосування. Ів.-Фр.: Сімік, 2010.
25	Kaiser A., Rethfeld B., Vicanek M., Simon G. Microscopic processes in dielectrics under irradiation by subpicosecond laser pulses // <i>Phys. Rev. B</i> . 2000. V. 61. P. 11437-11450.
26	Lehle H., Kriegl J.M., Nienhaus K., Deng P., Fengler S., Ulrich N.G. Probing electric fields in protein cavities by using the vibrational Stark effect of carbon monoxide // <i>Biophys. J.</i> 2005. V. 88. P. 1978-1990.
27	Iscoe I., Kreinin A. Recursive valuation of basket default swaps // <i>J. Comp. Finance</i> . 2006. V. 9, No. 3. P. 95-116.
28	Messina R., Jivulescu M.A., Messina A., Napoli A. Riccati equation-based generalization on Dawson's integral function // <i>Math. Meth. Appl. Sci.</i> 2007. V. 30, No. 16. P. 2055-2064.
29	Sampoorna M., Nagendra K.N., Frischb H. Generalized Voigt functions and their derivatives // <i>J. Quant. Spectr. Rad. Transf.</i> 2007. Vol. 104, No. 1. P. 71–85.
30	Born M., Wolf E. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
31	Kelly A., Nagy B. Reactive nonholonomic trajectory generation via parametric optimal control the international // <i>J. Robot. Res.</i> , 2003, Vol. 22, № 7–8. P. 583-601.
32	Walton D.J., Meek D.S. A controlled clothoid spline // <i>Comput. Graphics</i> , 2006, Vol. 29. P. 353-363.
33	Anokhov S. Physical approach to analytic simulation of Fresnel integrals // <i>J. Opt. Soc. Am. A.</i> , 2007, Vol. 24, №1. P. 197–203.
34	Litvinov I.I. Fresnel integral in the complex form: its new representation, interpretation, and application in problems of wave beam diffraction // <i>Phys. Wave Phenom.</i> , 2010, Vol. 18, № 4. P. 267–276.
35	Monk K., Zou Q., Conley D. An approximate solution for the wave energy shadow in the lee of an array of overtopping type wave energy converters // <i>Coast. Eng.</i> , 2013, Vol. 73. P. 115–132.
36	Тацій Р.М., Власій О.О., Стасюк М.Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння з кусково-змінними коефіцієнтами. <i>Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки</i> . 2014. № 804. С. 64-69.
37	Тацій Р.М., Ушак Т.І. Розв'язання задач про втрату стійкості стрижнів з дискретно-

	неперервним розподілом параметрів методом дискретизації. <i>Машинознавство</i> . 2009. № 5 (143). С. 41-47.
38	Пат. 103529 Україна МПК (2013.01) E21B 17/00 Спосіб зміцнення бурильних труб із алюмінієвих сплавів / Л. Я. Роп'як, О. В. Рогаль. А.201114404; заяв. 05.12.11; опубл. 25.10.13, Бюл. № 20. 4 с.
39	Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical borewells. <i>Journal of Petroleum Science and Engineering</i> . 2011. Vol. 78. P. 759-764.
40	Masoomi R., Moghadasi J. Mathematical modeling and prediction of drill string stability region. <i>Journal of Petroleum Exploration and Production Technology</i> . 2014. Vol. 4. Issue 4. P. 351-358.
41	Nabil M., Gulyayev V., Shlyun N., Aldabas H. Critical buckling of drill strings in cylindrical cavities of inclined bore-holes. <i>Journal of Mechanics Engineering and Automation</i> . 2016. Vol. 6. P. 25-38.

Додаток 2. Список потенційних замовників

№ з/п	Реквізити замовників, з якими велися переговори	Документи, якими зафіксовано переговори
1	–	–

Додаток 3. Список реальних замовників

№ з/п	Реквізити замовників, з якими укладено договори щодо передачі результатів розробки або документи, що підтверджують використання їх замовником	Документи, якими зафіксовано використання результатів
1	–	–

Додаток 4. Дані про магістрантів (студентів), аспірантів і докторантів, які працювали за темою з оплатою праці.

№ з/п	ПІБ	Статус	Тематика досліджень	Кількість місяців їх роботи за темою з оплатою
1	–	–	–	–

Додаток 5. Анотації українською мовою статей у журналах, що входять до БД Scopus та/або Web of Science Core Collection (WoS) (або Index Copernicus для соціо-гуманітарних наук) і представляють результати дослідження

№ статті у Таблиці 2	Анотації
1	Розроблено математичну модель і досліджено втрату стійкості алюмінієвою бурильною трубою із зовнішнім протекторним потовщенням на середній ділянці під дією крутного моменту та осьової стискаючої сили. За результатами числового аналізу визначено величини критичних навантажень, при яких труба втрачає стійкість в залежності від форми протекторного потовщення. Запропоновано оптимальну обтічну форму протекторного потовщення. Розроблено нову конструкцію алюмінієвої бурильної труби з протекторним потовщенням
2	Запропоновано схему розв'язування мішаної задачі за загальних крайових умов для рівняння теплопровідності $a(x) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ з коефіцієнтом $a(x)$, який є узагальненою похідною функції обмеженої варіації, $\lambda(x)$

	<p>> 0, $\lambda^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна функція. Крайові умови мають вигляд</p> $\begin{cases} p_{11}T(0, \tau) + p_{12}T_x^{[1]}(0, \tau) + q_{11}T(l, \tau) + q_{12}T_x^{[1]}(l, \tau) = \psi_1(\tau), \\ p_{21}T(0, \tau) + p_{22}T_x^{[1]}(0, \tau) + q_{21}T(l, \tau) + q_{22}T_x^{[1]}(l, \tau) = \psi_2(\tau), \end{cases}$ <p>де через $T_x^{[1]}(x, \tau)$ позначено квазіпохідну $\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}$. Розв’язок цієї задачі шукається методом редукції у вигляді суми двох функцій $T(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau)$. Цей метод дає змогу звести розв’язування поставленої задачі до розв’язування двох задач: крайової квазістаціонарної задачі з початковими і крайовими умовами для відшукування функції $u(x, \tau)$ і мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для деякого неоднорідного рівняння з невідомою функцією $v(x, \tau)$. Перша з цих задач розв’язується з допомогою введення квазіпохідної. Для розв’язування другої задачі застосовується метод Фур’є і розвинення за власними функціями деякої крайової задачі для квазидиференціального рівняння другого порядку $(\lambda(x)X'(x))' + \omega a(x)X(x) = 0$. Функція $v(x, \tau)$ подається у вигляді ряду за власними функціями цієї крайової задачі. Отримані результати можна використовувати для дослідження процесу теплопередачі в багатошаровій плиті.</p>
3	<p>Запропоновано схему розв’язування мішаної задачі за загальних крайових умов для рівняння теплопровідності</p> $a(x) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - g(x)T$ <p>з коефіцієнтом $a(x)$, $g(x)$, які є узагальненими похідними функцій обмеженої варіації, $c(x) > 0$, $c^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна функція. Крайові і початкова умови мають вигляд</p> $\begin{cases} p_1T(0, \tau) + p_2T_x^{[1]}(0, \tau) = \psi_1(\tau), \\ q_1T(l, \tau) + q_2T_x^{[1]}(l, \tau) = \psi_2(\tau), \end{cases} \quad T(x, 0) = \varphi(x),$ <p>де $p_1p_2 \leq 0$, $q_1q_2 \geq 0$, а через $T_x^{[1]}(x, \tau)$ позначено квазіпохідну $\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x}$. Розв’язок цієї задачі шукається методом редукції у вигляді суми двох функцій $T(x, \tau) = u(x, \tau) + v(x, \tau)$. Цей метод дає змогу звести розв’язування поставленої задачі до розв’язування двох задач: крайової квазістаціонарної задачі з початковими і крайовими умовами для відшукування функції $u(x, \tau)$ і мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для деякого неоднорідного рівняння з невідомою функцією $v(x, \tau)$. Перша з цих задач розв’язується з допомогою введення квазіпохідної. Для розв’язування другої задачі застосовується метод Фур’є і розвинення за власними функціями деякої крайової задачі для квазидиференціального рівняння другого порядку $(c(x)X'(x))' - g(x)X(x) + \omega a(x)X(x) = 0$. Функція $v(x, \tau)$ подається у вигляді ряду за власними функціями цієї крайової задачі. Отримані результати можна використовувати для дослідження процесу теплопередачі в багатошаровій плиті.</p>

Додаток 6. Анотації українською мовою до монографій, які представляють результати дослідження і наведені у Таблиці 5

№ моногр. У Таблиці 5	Анотації
1	У представленій монографії вперше систематично викладена теорія узагальнених

	<p>квазидиференціальних рівнянь, що активно розвивається впродовж останніх кількох десятиліть. Побудова теорії ведеться на основі розвитку концепції квазіпохідних, що дозволяє звести до мінімуму вимоги на гладкість коефіцієнтів рівнянь. Кращому розумінню теоретичного матеріалу монографії сприяє значна кількість детально розібраних прикладів, окремі з яких мають чітко виражений прикладний характер.</p> <p>Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі диференціальних рівнянь, механіків та інженерів, що мають справу з дискретно-неперервними моделями.</p>
--	--

Додаток 7. Анотації захищених кандидатських і докторських дисертацій виконавцями, що наведені у Таблиці 9

№ з/п	Назви дисертацій та їх анотації
1	–

Додаток 8. Короткий зміст (анотації) досліджень за грантами, що наведені у Таблиці 10

№ з/п	Назви грантів та їх анотації
1	–

Керівник роботи

ПІБ: Мазуренко Віктор Володимирович

Підпис _____

Дата: _____