

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей
104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та
наноматеріали, 114.08 Середня освіта (фізика)

Видання третє, виправлене

Івано-Франківськ
2021

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)» (протокол № 1 від 28 серпня 2021 року).

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-технічного факультету Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,

Дмитришин Р. І., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Гой Т. П., Махней О. В.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник. Вид. 3-тє, випр. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 248 с.

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь. Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)». Може бути корисним для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

©Т. П. Гой, О. В. Махней, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	9
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	11
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь	11
1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь	11
2. Основні означення й поняття	17
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	19
Питання до лекції 1	21
Вправи до лекції 1	22
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)	23
1. Основні означення й поняття	23
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	24
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку	27
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	29
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	30
Питання до лекції 2	32
Вправи до лекції 2	33
Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах	33
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	33
2. Однорідні рівняння	38
3. Рівняння, звідні до однорідних	41
Питання до лекції 3	45

Вправи до лекції 3	45
Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах (продовження)	46
1. Лінійні рівняння	46
2. Рівняння Бернуллі	50
3. Рівняння у повних диференціалах	54
4. Інтегрувальний множник	57
Питання до лекції 4	59
Вправи до лекції 4	60
Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	61
1. Основні означення й поняття	61
2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку	64
3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	68
Питання до лекції 5	71
Вправи до лекції 5	71
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	73
Лекція 6. Диференціальні рівняння вищих порядків	73
1. Основні означення й поняття	73
2. Неповні рівняння	77
3. Однорідні рівняння	83
Питання до лекції 6	85
Вправи до лекції 6	86
Лекція 7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	87
1. Основні означення й поняття	87
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	89
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	91
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння	94
5. Формула Остроградського–Ліувілля	96

6. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку	98
Питання до лекції 7	99
Вправи до лекції 7	100
Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	102
1. Основні означення й поняття	102
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	103
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	106
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	108
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	109
Питання до лекції 8	113
Вправи до лекції 8	114
Лекція 9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	115
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	115
2. Метод варіації довільних сталих	117
3. Метод невизначених коефіцієнтів	120
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	125
Питання до лекції 9	129
Вправи до лекції 9	130
РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	131
Лекція 10. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	131
1. Основні означення й поняття	131
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	137

3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	138
4. Лінійні однорідні системи	141
Питання до лекції 10	144
Вправи до лекції 10	145
Лекція 11. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	145
1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій	145
2. Формула Остроградського–Якобі	149
3. Теорема про побудову загального розв’язку лінійної однорідної системи	150
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	151
Питання до лекції 11	160
Вправи до лекції 11	160
Лекція 12. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	161
1. Структура загального розв’язку лінійної неоднорідної системи	161
2. Метод варіації довільних сталих	163
3. Метод невизначених коефіцієнтів	166
Питання до лекції 12	170
Вправи до лекції 12	170
РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	171
Лекція 13. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку	171
1. Зв’язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик	171
2. Побудова загального розв’язку лінійного однорідного рівняння	175
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння	178
Питання до лекції 13	180

Вправи до лекції 13	180
Лекція 14. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку .	181
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку	181
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	184
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	187
Питання до лекції 14	190
Вправи до лекції 14	190
РОЗДІЛ 5. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ	191
Лекція 15. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування	191
1. Основні означення й поняття	191
2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	193
3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь	196
4. Принцип стискаючих відображень	202
Питання до лекції 15	206
Вправи до лекції 15	206
Лекція 16. Лінійні інтегральні рівняння	207
1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма	207
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри	211
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма	214
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри	218
Питання до лекції 16	221
Вправи до лекції 16	222

Лекція 17. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду	223
1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття . .	223
2. Теорема Фредгольма	225
3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду	234
Питання до лекції 17	238
Вправи до лекції 17	238
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . .	239
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	241
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	246

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування, а також вчителів фізики.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних закладів вищої освіти.

Метою посібника є ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 17 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Інтегральні рівняння».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції, відповідного практичного заняття або як матеріал для самостійної роботи. Значна частина навчального матеріалу з посібника має пропонуватись здобувачам вищої освіти для самостійного опрацювання.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Перше видання цього посібника вийшло у 2012 році. Другому виданню було надано гриф Міністерства освіти і науки України (лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.), надруковано воно у 2014 році у видавництві «Навчальна книга – Богдан» (м. Тернопіль). У представленому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.