

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«фізика», «прикладна фізика»

Видання друге, виправлене та доповнене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

Богдан

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.)*

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника),

Сторож О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3530-9

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь, елементи варіаційного числення). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика». Може бути корисним для студентів технічних напрямів підготовки.

**УДК 517.9
ББК 22.161.6**

ISBN 978-966-10-3530-9

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2014

© Навчальна книга – Богдан, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	13
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь	13
1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь	13
2. Основні означення й поняття	19
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	21
Питання до лекції 1	23
Вправи до лекції 1	24
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)	25
1. Основні означення й поняття	25
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	26
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку	29
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Метод ізоклін	31
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	35
Питання до лекції 2	36
Вправи до лекції 2	37
Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах	38
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	38
2. Однорідні рівняння	42
3. Рівняння, звідні до однорідних	45
Питання до лекції 3	49

Вправи до лекції 3	50
Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах (продовження)	51
1. Лінійні рівняння	51
2. Рівняння Бернуллі	55
3. Рівняння у повних диференціалах	58
4. Інтегрувальний множник	61
Питання до лекції 4	63
Вправи до лекції 4	64
Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	65
1. Основні означення й поняття	65
2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку	68
3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	72
4. Задача про ортогональні траєкторії	75
Питання до лекції 5	78
Вправи до лекції 5	78
Лекція 6. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку	79
1. Принцип стискаючих відображень	79
2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші	83
3. Продовження розв'язку задачі Коші	87
4. Коректність задачі Коші	89
Питання до лекції 6	90
Вправи до лекції 6	91
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	92
Лекція 7. Диференціальні рівняння вищих порядків	92
1. Основні означення й поняття	92
2. Неповні рівняння	96
3. Однорідні рівняння	102
Питання до лекції 7	104
Вправи до лекції 7	104

Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	105
1. Основні означення й поняття	105
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	107
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	109
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння	112
5. Формула Остроградського–Ліувілля	114
Питання до лекції 8	116
Вправи до лекції 8	117
Лекція 9. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	118
1. Основні означення й поняття	118
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	119
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	122
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	124
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	126
Питання до лекції 9	130
Вправи до лекції 9	131
Лекція 10. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	132
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	132
2. Метод варіації довільних сталих	134
3. Метод невизначених коефіцієнтів	137
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	142
Питання до лекції 10	146
Вправи до лекції 10	147

Лекція 11. Лінійні однорідні рівняння другого порядку	148
1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	148
2. Самоспряжена форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	151
3. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок	152
4. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку	154
5. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів	155
Питання до лекції 11	161
Вправи до лекції 11	162
Лекція 12. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	163
1. Основні означення й поняття	163
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі	164
3. Функція Гріна крайової задачі	166
4. Крайові задачі на власні значення	170
Питання до лекції 12	173
Вправи до лекції 12	173
РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	174
Лекція 13. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	174
1. Основні означення й поняття	174
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	180
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	181
4. Лінійні однорідні системи	184
Питання до лекції 13	187
Вправи до лекції 13	188

Лекція 14. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	188
1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій	188
2. Формула Остроградського–Якобі	192
3. Теорема про побудову загального розв’язку лінійної однорідної системи	193
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	194
Питання до лекції 14	203
Вправи до лекції 14	203
Лекція 15. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	204
1. Структура загального розв’язку лінійної неоднорідної системи	204
2. Метод варіації довільних сталих	206
3. Метод невизначених коефіцієнтів	209
4. Метод Д’Аламбера	213
Питання до лекції 15	214
Вправи до лекції 15	215
РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	216
Лекція 16. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку	216
1. Зв’язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик	216
2. Побудова загального розв’язку лінійного однорідного рівняння	220
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння	223
Питання до лекції 16	225
Вправи до лекції 16	225

Лекція 17. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	226
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку	226
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	229
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	232
4. Рівняння Пфаффа	235
Питання до лекції 17	238
Вправи до лекції 17	238
РОЗДІЛ 5. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	239
Лекція 18. Основи теорії стійкості за Ляпуновим	239
1. Основні означення й поняття	239
2. Дослідження на стійкість точок спокою	243
3. Стійкість за першим наближенням	245
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара	250
Питання до лекції 18	252
Вправи до лекції 18	252
Лекція 19. Теорема Ляпунова. Фазова площина	253
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова	253
2. Класифікація точок спокою автономної системи	256
Питання до лекції 19	268
Вправи до лекції 19	268
РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ	269
Лекція 20. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування	269
1. Основні означення й поняття	269
2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	271
3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь	274
Питання до лекції 20	280

Вправи до лекції 20	281
Лекція 21. Лінійні інтегральні рівняння	282
1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма	282
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри	286
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма	289
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри	293
Питання до лекції 21	296
Вправи до лекції 21	297
Лекція 22. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду	298
1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття	298
2. Теореми Фредгольма	300
3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду	309
Питання до лекції 22	313
Вправи до лекції 22	313
РОЗДІЛ 7. ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ	314
Лекція 23. Найпростіші варіаційні задачі	314
1. Предмет варіаційного числення. Класичні варіаційні задачі	314
2. Основі означення й поняття варіаційного числення	318
3. Найпростіша задача варіаційного числення	322
Питання до лекції 23	329
Вправи до лекції 23	330
Лекція 24. Деякі узагальнення найпростішої варіаційної задачі	330
1. Варіаційна задача з кількома функціями	330
2. Варіаційна задача з похідними вищих порядків	333
3. Ізопериметрична задача	337
Питання до лекції 24	344

Вправи до лекції 24	345
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . .	346
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГА- ДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	348
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	355

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 7 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь», «Інтегральні рівняння», «Основи варіаційного числення».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «за-

губити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.