

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

О. В. Махней

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки
«прикладна математика»
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2015

УДК 004.94:519.87
ББК 22.18
М36

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів напряму підготовки «прикладна математика» (протокол № 8 від 21 квітня 2015 р.).

Рецензенти:

Олійник А. П., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу);

П'янило Я. Д., доктор фізико-математичних наук, професор (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача);

Іващук Н. Л., доктор економічних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

М36 Махней О. В. Математичне моделювання : навчальний посібник / О. В. Махней. — Івано-Франківськ : Супрун В. П., 2015. — 372 с.

У посібнику викладено навчальний курс з математичного моделювання. Увага приділена як аналітичним, так і імітаційним методам моделювання. У книзі розглянуто застосування диференціальних рівнянь, клітинних автоматів, мови імітаційного моделювання GPSS World та інших методів моделювання різних систем.

Для студентів напряму підготовки «прикладна математика». Може бути корисним для студентів фізико-математичних, природничих і технічних напрямів підготовки, аспірантів, науково-технічних працівників.

УДК 004.94:519.87
ББК 22.18

ISBN 978-966-8969-68-3

© Махней О. В., 2015.

Зміст

Передмова	8
Розділ 1. Загальні положення та означення	10
§ 1.1. Поняття системи і моделі	10
§ 1.2. Класифікація видів моделювання систем	12
§ 1.3. Поняття математичного моделювання	16
§ 1.4. Принципи і етапи побудови математичних моделей	19
Питання до розділу 1	22
Розділ 2. Диференціальні моделі	23
§ 2.1. Складання диференціальних моделей	23
§ 2.2. Вентиляція приміщення	25
§ 2.3. Витікання рідини	26
§ 2.4. Потік частинок у трубці	28
§ 2.5. Взаємодія в системі «хижак-жертва»	30
§ 2.6. Модель розвитку епідемії	36
§ 2.7. Прогин балок	41
Питання до розділу 2	46
Вправи до розділу 2	46
Розділ 3. Скінченні автомати	48
§ 3.1. Скінченні автомати Мілі	48
§ 3.2. Скінченні автомати Мура	49
§ 3.3. Клітинні автомати	51
§ 3.4. Застосування клітинних автоматів до моделювання активних середовищ	54
§ 3.5. Модель розвитку організмів на поживних середовищах	55
§ 3.6. Модель розвитку організмів на поживних середовищах за наявності хижаків	59
Питання до розділу 3	64
Вправи до розділу 3	65
Розділ 4. Мережі Петрі	66
§ 4.1. Поняття класичних мереж Петрі	66

§ 4.2. Формальне означення мереж Петрі і їхнє матричне подання	70
§ 4.3. Властивості мереж Петрі	72
§ 4.4. Матричний аналіз мереж Петрі	74
§ 4.5. Дерево досяжності	79
§ 4.6. Некласичні мережі Петрі	85
§ 4.7. Програма HPSim для імітаційного моделювання мереж Петрі	91
Питання до розділу 4	93
Вправи до розділу 4	94
Розділ 5. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування	97
§ 5.1. Поняття системи масового обслуговування	97
§ 5.2. Характеристики потоку подій і вхідний потік вимог	98
§ 5.3. Моделювання стаціонарного пуассонівського потоку	100
§ 5.4. Правила обслуговування, організація черги і типи моделей систем масового обслуговування	101
§ 5.5. Аналіз часової діаграми для системи масового обслуговування	104
§ 5.6. Формула Літгла	108
§ 5.7. Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами	109
§ 5.8. Багатоканальні системи масового обслуговування з обмеженою чергою	117
§ 5.9. Багатоканальні системи масового обслуговування з чергою довільної довжини	123
§ 5.10. Основи операційного аналізу мереж систем масового обслуговування	128
Питання до розділу 5	133
Вправи до розділу 5	134
Розділ 6. Основи мови імітаційного моделювання GPSS World	141
§ 6.1. Основи роботи з середовищем GPSS World	141

§ 6.2. Категорії і типи об'єктів мови GPSS	144
§ 6.3. Системні числові атрибути	145
§ 6.4. Формат рядка	147
§ 6.5. Арифметичні і логічні вирази	149
§ 6.6. Блоки створення, знищення, затримки, зміни параметрів і пріоритету транзактів	151
§ 6.7. Основні блоки і команди опису, пов'язані з пристроями	155
§ 6.8. Блоки і команди опису, пов'язані зі статистичною категорією	160
§ 6.9. Використання змінних, логічних перемикачів і комірок пам'яті	165
§ 6.10. Блок TRANSFER для зміни маршруту руху транзактів	168
§ 6.11. Блоки TEST, GATE і LOOP для зміни маршруту руху транзактів	172
§ 6.12. Елементи стандартного звіту	175
§ 6.13. Функції і генератори випадкових чисел	182
§ 6.14. Математичні функції і функції для генерації випадкових величин	188
§ 6.15. Приклади складання моделей	190
Питання до розділу 6	201
Вправи до розділу 6	202
Розділ 7. Додаткові можливості мови і середовища GPSS World	209
§ 7.1. Створення копій транзактів і синхронізація їхнього руху	209
§ 7.2. Матриці	211
§ 7.3. Найважливіші системні числові атрибути	212
§ 7.4. Команди керування	216
§ 7.5. Інформаційні вікна	218
§ 7.6. Імітаційне моделювання виходу з ладу обладнання	224
§ 7.7. Списки користувача	229

§ 7.8. Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь	234
§ 7.9. PLUS-процедури	238
§ 7.10. Опитування неактивних транзактів	246
Питання до розділу 7	246
Вправи до розділу 7	247
Розділ 8. Моделювання випадкових величин	252
§ 8.1. Поняття про метод Монте-Карло	252
§ 8.2. Генератори випадкових чисел	255
§ 8.3. Моделювання випадкових подій	258
§ 8.4. Метод оберненої функції	259
§ 8.5. Моделювання дискретних випадкових величин	263
§ 8.6. Моделювання неперервних випадкових величин	267
§ 8.7. Приклади моделювання	273
Питання до розділу 8	277
Вправи до розділу 8	278
Розділ 9. Вибір розподілів імовірностей	282
§ 9.1. Методи використання даних спостережень для моделювання випадкових процесів	282
§ 9.2. Емпіричні розподіли неперервних випадкових величин та їхнє моделювання у випадку, коли відомі дані окремих спостережень	285
§ 9.3. Емпіричні розподіли дискретних випадкових величин та їхнє моделювання у випадку, коли відомі дані окремих спостережень	288
§ 9.4. Емпірично розподілені випадкові величини та їхнє моделювання у випадку згрупованих даних	291
§ 9.5. Методи оцінки незалежності вибірки	296
§ 9.6. Вибір сім'ї теоретичних розподілів з допомогою гістограм	301
§ 9.7. Графіки функцій щільності розподілів імовірностей	303
§ 9.8. Аналіз ролі випадкової величини в системі	306
§ 9.9. Аналіз підсумкової статистики	308

§ 9.10. Визначення параметрів теоретичних розподілів	312
§ 9.11. Графічні процедури перевірки придатності розподілу	317
§ 9.12. Перевірка гіпотези придатності розподілу з допомогою критерію χ^2	325
§ 9.13. Композиція функцій розподілу	327
§ 9.14. Зміщені розподіли	329
§ 9.15. Зрізані розподіли	331
§ 9.16. Вибір розподілу за відсутності даних спостережень	334
§ 9.17. Групове надходження вимог	336
§ 9.18. Використання умовних розподілів для моделювання випадкових векторів	337
§ 9.19. Двовимірний нормальний розподіл і його моделювання	339
§ 9.20. Двовимірний логнормальний розподіл і його моделювання	343
§ 9.21. Нестационарний пуассонівський потік і його моделювання	344
Питання до розділу 9	348
Вправи до розділу 9	349
Критичні точки розподілу χ^2	356
Розділ 10. Планування експерименту	357
§ 10.1. Перехідний і стаціонарний режими	357
§ 10.2. Визначення кількості реалізацій процесу моделювання для оцінювання ймовірності	359
§ 10.3. Визначення кількості реалізацій процесу моделювання для оцінювання середнього значення	362
Питання до розділу 10	364
Вправи до розділу 10	364
Список рекомендованої літератури	365
Предметний покажчик	367

Передмова

Моделювання — це потужний універсальний метод дослідження й оцінювання ефективності різноманітних систем. Під математичним моделюванням розуміють процес створення для заданого реального об'єкта деякої математичної моделі, якою може бути як система рівнянь, так і комп'ютерна програма. Математичне моделювання широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки.

Більшість посібників з математичного моделювання присвячено викладенню окремих методів математичного моделювання. Характерною рисою цього посібника є спроба ознайомити студентів з різноманітними способами математичного моделювання. Разом з тим, у зв'язку з бурхливим розвитком комп'ютерної техніки значна увага у посібнику приділена різним методам імітаційного моделювання.

Перший розділ посібника присвячений поняттю моделі і математичного моделювання. Другий розділ стосується аналітичного моделювання систем з допомогою диференціальних рівнянь. Третій і четвертий розділи присвячено відповідно використанню клітинних автоматів і мереж Петрі для моделювання систем. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування розглядається у п'ятому розділі. Шостий і сьомий розділи присвячені опису мови імітаційного моделювання GPSS World і її використання для моделювання систем масового обслуговування. Три останніх розділи посібника стосуються імітаційного моделювання різноманітних систем. При вивченні курсу математичного моделювання необов'язково дотримуватись того порядку слідування тем, який використаний у посібнику. Зокрема, восьмий розділ може вивчатись перед шостим розділом, а розділи 2–4 можна вивчати в кінці.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з навчальних дисциплін «Математичне моделювання», «Імітаційне моделювання», «Методи комп'ю-

терної імітації», а також значну частину програми з навчальної дисципліни «Теорія систем і математичне моделювання» для студентів напряму підготовки «прикладна математика». Посібник може використовуватись також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Методи моделювання ілюструються різноманітними прикладами. Кінець розв'язаних прикладів позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу.

Кожен розділ супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу. Всі розділи, крім першого, містять вправи для самостійного розв'язування, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних і лабораторних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.