

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
спеціальностей
111 Математика, 113 Прикладна математика

Івано-Франківськ
2021

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика» (протокол № 1 від 28 серпня 2021 року).

Рецензенти:

Шарин С. В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,

Дмитришин М. І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Гой Т. П., Махней О. В.

Г59 Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 357 с.

У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь). Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Наведено також приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика». Може бути корисним для студентів природничих та інженерно-технічних спеціальностей.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ .	13
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі	13
1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання	13
2. Основні означення й поняття	19
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	21
Питання до лекції 1	23
Вправи до лекції 1	23
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної (загальна теорія)	24
1. Основні означення й поняття	24
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	25
3. Класифікація розв'язків	27
4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	30
Питання до лекції 2	34
Вправи до лекції 2	35
Лекція 3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні у квадратах	36
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	36
2. Однорідні рівняння	39
3. Рівняння, звідні до однорідних	42
Питання до лекції 3	46
Вправи до лекції 3	47

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них	48
1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування	48
2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь	51
3. Рівняння Я. Бернуллі	52
4. Рівняння Ріккати	56
Питання до лекції 4	58
Вправи до лекції 4	58
Лекція 5. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них	59
1. Рівняння у повних диференціалах	59
2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження	62
3. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника	66
Питання до лекції 5	69
Вправи до лекції 5	70
Лекція 6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	71
1. Основні означення й поняття	71
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків	73
3. Рівняння степеня n	78
Питання до лекції 6	80
Вправи до лекції 6	80
Лекція 7. Неявні диференціальні рівняння першого порядку (продовження)	81
1. Метод уведення параметра	81
2. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	83
3. Задача про ізогональні траєкторії	86
Питання до лекції 7	89
Вправи до лекції 7	90
Лекція 8. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку	91
1. Принцип стискаючих відображень	91

2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші	94
3. Продовження розв'язку задачі Коші	99
4. Коректність задачі Коші	101
Питання до лекції 8	102
Вправи до лекції 8	103
Лекція 9. Диференціальні моделі	104
1. Побудова диференціальних моделей природничих наук	104
2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь	110
3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь	111
Питання до лекції 9	113
Вправи до лекції 9	113
Додаток 1. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку	114
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ . .	124
Лекція 10. Диференціальні рівняння вищих порядків	124
1. Основні поняття й означення. Задача Коші	124
2. Класифікація розв'язків	127
3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n	129
Питання до лекції 10	134
Вправи до лекції 10	135
Лекція 11. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку	136
1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних	136
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної	139

3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних	141
4. Рівняння з точними похідними	142
Питання до лекції 11	145
Вправи до лекції 11	146
Лекція 12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	147
1. Основні означення й поняття	147
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	149
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	150
4. Основна теорема	153
5. Формула Остроградського–Ліувілля	154
Питання до лекції 12	157
Вправи до лекції 12	157
Лекція 13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	159
1. Основні означення й поняття	159
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	160
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	163
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	165
Питання до лекції 13	169
Вправи до лекції 13	170
Лекція 14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	171
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	171
2. Метод варіації довільних сталих	173
3. Метод Коші	175
4. Метод невизначених коефіцієнтів	178
Питання до лекції 14	183

Вправи до лекції 14	183
Лекція 15. Лінійні однорідні рівняння другого порядку	184
1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	184
2. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок	186
3. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів	188
Питання до лекції 15	195
Вправи до лекції 15	195
Лекція 16. Диференціальні моделі коливальних процесів	196
1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	196
2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	200
3. Диференціальна модель математичного маятника	204
Питання до лекції 16	206
Вправи до лекції 16	207
Лекція 17. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	208
1. Основні означення й поняття	208
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі	209
3. Функція Гріна крайової задачі	211
4. Крайові задачі на власні значення	215
Питання до лекції 17	218
Вправи до лекції 17	218
Додаток 2. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків	219

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	228
Лекція 18. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	228
1. Основні означення й поняття	228
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	232
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	235
4. Лінійні однорідні системи	238
Питання до лекції 18	240
Вправи до лекції 18	241
Лекція 19. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	242
1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій	242
2. Формула Остроградського–Якобі	245
3. Основна теорема	246
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	247
Питання до лекції 19	255
Вправи до лекції 19	256
Лекція 20. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	257
1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи	257
2. Метод варіації довільних сталих	259
3. Метод невизначених коефіцієнтів	262
4. Метод Д'Аламбера	266
Питання до лекції 20	267
Вправи до лекції 20	268
Додаток 3. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь	269

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	273
Лекція 21. Лінійні однорідні рівняння з частинни- ми похідними першого порядку	273
1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинни- ми похідними першого порядку з відповідною си- стемою характеристик	273
2. Побудова загального розв'язку лінійного однорід- ного рівняння	278
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння .	280
Питання до лекції 21	282
Вправи до лекції 21	283
Лекція 22. Квазілінійні та нелінійні рівняння з ча- стинними похідними першого порядку	284
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рів- няння першого порядку	284
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	287
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першо- го порядку	290
4. Рівняння Пфаффа	293
Питання до лекції 22	295
Вправи до лекції 22	296
Додаток 4. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування рівнянь з частинни- ми похідними першого порядку	297
РОЗДІЛ 5. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕ- РЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	302
Лекція 23. Основи теорії стійкості за Ляпуновим .	302
1. Основні означення й поняття	302
2. Дослідження на стійкість точок спокою	306
3. Стійкість за першим наближенням	308
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара	312
Питання до лекції 23	313

Вправи до лекції 23	314
Лекція 24. Теорема Ляпунова. Фазова площина . .	315
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова	315
2. Класифікація точок спокою автономної системи . .	318
Питання до лекції 24	329
Вправи до лекції 24	329
Додаток 5. Застосування математичного пакета Maple для дослідження на стійкість розв’яз- ків звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем	330
Додаток 6. Основи роботи з математичним паке- том Maple	339
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	347
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .	352
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	354

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» займає чільне місце у підготовці фахівців з математики, прикладної математики тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для здобувачів вищої освіти спеціальностей «математика», «прикладна математика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних закладів вищої освіти.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції, відповідного практичного заняття або як матеріал для самостійної роботи.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірно «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикла-

ду чи задачі.

Знак ► означає завершення доведення теореми.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У додатках до розділів для майже всіх розв'язаних у відповідних темах прикладів наводяться їх розв'язання з допомогою пакета символьних обчислень Maple. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 6.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.