

Міністерство освіти і науки України  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів  
спеціальностей 122 Комп'ютерні науки,  
126 Інформаційні системи та технології,  
014.04 Середня освіта (математика, інформатика)

*Видання третє, виправлене*

Івано-Франківськ  
2021

УДК 517.9  
ББК 22.161.6  
Г 59

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «комп'ютерні науки», «інформаційні системи та технології», «середня освіта (математика, інформатика)» (протокол № 1 від 28 серпня 2021 року).*

**Рецензенти:**

*Кондур О. С.*, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, декан Педагогічного факультету Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,

*Осипчук М. М.*, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Гой Т. П., Махней О. В.**

Г59 Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Вид. 3-тє, випр. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 266 с.

У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також деякі споріднені питання (основи стійкості розв'язків рівнянь). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з природничих наук. Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Наведено також приклади застосування математичного пакета Maple для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для студентів спеціальностей «комп'ютерні науки», «інформаційні системи та технології», «середня освіта (математика, інформатика)».

**УДК 517.9**  
**ББК 22.161.6**

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2021

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА . . . . .	9
<b>РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ .</b>	<b>11</b>
<b>Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння та диференціальні моделі . . . . .</b>	<b>11</b>
1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання . . . . .	11
2. Основні означення й поняття . . . . .	17
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих . . . . .	19
Питання до лекції 1 . . . . .	21
Вправи до лекції 1 . . . . .	21
<b>Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної (загальна теорія) . . . . .</b>	<b>22</b>
1. Основні означення й поняття . . . . .	22
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші . . . . .	23
3. Класифікація розв'язків . . . . .	25
4. Геометричне та механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків . . . . .	28
Питання до лекції 2 . . . . .	32
Вправи до лекції 2 . . . . .	33
<b>Лекція 3. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровні у квадратах . . . . .</b>	<b>34</b>
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них . . . . .	34
2. Однорідні рівняння . . . . .	37
3. Рівняння, звідні до однорідних . . . . .	40
Питання до лекції 3 . . . . .	44
Вправи до лекції 3 . . . . .	44

<b>Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них</b> . . . . .	45
1. Лінійне диференціальне рівняння та методи його розв'язування . . . . .	45
2. Властивості розв'язків лінійних рівнянь . . . . .	49
3. Рівняння Я. Бернуллі . . . . .	50
Питання до лекції 4 . . . . .	53
Вправи до лекції 4 . . . . .	53
<b>Лекція 5. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них</b> . . . . .	54
1. Рівняння у повних диференціалах . . . . .	54
2. Інтегрувальний множник та деякі способи його знаходження . . . . .	57
3. Теореми про існування і неєдиність інтегрувального множника . . . . .	61
Питання до лекції 5 . . . . .	63
Вправи до лекції 5 . . . . .	63
<b>Лекція 6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку</b> . . . . .	64
1. Основні означення й поняття . . . . .	64
2. Задача Коші. Класифікація розв'язків . . . . .	66
3. Рівняння степеня $n$ . . . . .	71
4. Метод уведення параметра . . . . .	73
5. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро . . . . .	75
Питання до лекції 6 . . . . .	78
Вправи до лекції 6 . . . . .	79
<b>Лекція 7. Диференціальні моделі</b> . . . . .	80
1. Побудова диференціальних моделей природничих наук . . . . .	80
2. Розв'язування геометричних задач з допомогою диференціальних рівнянь . . . . .	86
3. Розв'язування задач з допомогою інтегральних рівнянь . . . . .	87
Питання до лекції 7 . . . . .	89
Вправи до лекції 7 . . . . .	89

Додаток 1. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку . . . . .	89
<b>РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>Лекція 8. Диференціальні рівняння вищих порядків</b>	<b>100</b>
1. Основні поняття й означення. Задача Коші . . . . .	100
2. Класифікація розв'язків . . . . .	103
3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку $n$ . . . . .	105
Питання до лекції 8 . . . . .	111
Вправи до лекції 8 . . . . .	111
<b>Лекція 9. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку . . . . .</b>	<b>112</b>
1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних . . . . .	112
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної . . . . .	115
3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних . . . . .	117
4. Рівняння з точними похідними . . . . .	118
Питання до лекції 9 . . . . .	120
Вправи до лекції 9 . . . . .	120
<b>Лекція 10. Лінійні однорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку . . . . .</b>	<b>121</b>
1. Основні означення й поняття . . . . .	121
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння . . . . .	123
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції . . . . .	125
4. Основна теорема . . . . .	128
5. Формула Остроградського–Ліувілля . . . . .	129
Питання до лекції 10 . . . . .	131
Вправи до лекції 10 . . . . .	132

<b>Лекція 11. Лінійні однорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку зі сталими коефіцієнтами . . . . .</b>	<b>133</b>
1. Основні означення й поняття . . . . .	133
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел . . . . .	135
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел . . . . .	138
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами . . . . .	140
Питання до лекції 11 . . . . .	142
Вправи до лекції 11 . . . . .	142
<b>Лекція 12. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку . . . . .</b>	<b>143</b>
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння . . . . .	143
2. Метод варіації довільних сталих . . . . .	145
3. Метод невизначених коефіцієнтів . . . . .	147
Питання до лекції 12 . . . . .	152
Вправи до лекції 12 . . . . .	152
<b>Лекція 13. Диференціальні моделі коливальних процесів . . . . .</b>	<b>153</b>
1. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів . . . . .	153
2. Застосування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів . . . . .	157
3. Диференціальна модель математичного маятника . . . . .	161
Питання до лекції 13 . . . . .	163
Вправи до лекції 13 . . . . .	164
<b>Додаток 2. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків . . . . .</b>	<b>165</b>

---

<b>РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>Лекція 14. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія) . . . . .</b>	<b>171</b>
1. Основні означення й поняття . . . . .	171
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків . . . . .	175
3. Зведення диференціального рівняння $n$ -го порядку до нормальної системи й обернена задача . . . . .	178
4. Лінійні однорідні системи . . . . .	181
Питання до лекції 14 . . . . .	183
Вправи до лекції 14 . . . . .	184
<b>Лекція 15. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь . . . . .</b>	<b>185</b>
1. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій . . . . .	185
2. Формула Остроградського–Якобі . . . . .	188
3. Основна теорема . . . . .	189
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера . . . . .	190
Питання до лекції 15 . . . . .	198
Вправи до лекції 15 . . . . .	199
<b>Лекція 16. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь . . . . .</b>	<b>200</b>
1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи . . . . .	200
2. Метод варіації довільних сталих . . . . .	202
3. Метод невизначених коефіцієнтів . . . . .	205
Питання до лекції 16 . . . . .	209
Вправи до лекції 16 . . . . .	209
<b>Додаток 3. Застосування математичного пакета Maple для інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь . . . . .</b>	<b>210</b>

<b>РОЗДІЛ 4. СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ . . . . .</b>	<b>214</b>
<b>Лекція 17. Основи теорії стійкості за Ляпуновим . . . . .</b>	<b>214</b>
1. Основні означення й поняття . . . . .	214
2. Дослідження на стійкість точок спокою . . . . .	217
3. Стійкість за першим наближенням . . . . .	219
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л’єнара–Шипара . . . . .	223
Питання до лекції 17 . . . . .	225
Вправи до лекції 17 . . . . .	226
<b>Лекція 18. Теорема Ляпунова. Фазова площина . . . . .</b>	<b>227</b>
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова . . . . .	227
2. Класифікація точок спокою автономної системи . . . . .	230
Питання до лекції 18 . . . . .	241
Вправи до лекції 18 . . . . .	241
<b>Додаток 4. Застосування математичного пакета Maple для дослідження на стійкість розв’язків звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>Додаток 5. Основи роботи з математичним пакетом Maple . . . . .</b>	<b>251</b>
<b>КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ . . . . .</b>	<b>258</b>
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . . . . .</b>	<b>262</b>
<b>ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК . . . . .</b>	<b>264</b>



## ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» займає чільне місце у підготовці фахівців з комп'ютерних наук, інформаційних систем і технологій, а також вчителів математики та інформатики.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для здобувачів вищої освіти спеціальностей «комп'ютерні науки», «інформаційні системи та технології», «середня освіта (математика, інформатика)».

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 18 лекцій, які умовно можна поділити на 4 розділи: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції, відповідного практичного заняття або як матеріал для самостійної роботи. Значна частина навчального матеріалу з посібника має пропонуватись здобувачам вищої освіти для самостійного опрацювання.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним

«загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Знак ► означає завершення доведення теореми.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У додатках до розділів для майже всіх розв'язаних у відповідних темах прикладів наводяться їхні розв'язання з допомогою математичного пакета Maple. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 5.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Першому виданню було надано гриф Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (лист №1/11-12145 від 22.12.2011 р.), надруковано воно у 2012 році. Друге видання цього посібника вийшло у 2014 році у видавництві «Навчальна книга – Богдан» (м. Тернопіль). У представленому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.