**Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника**

**Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності**

Махней О. В., Тацій Р. М.

СИНГУЛЯРНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Івано-Франківськ
2012

УДК 517.927.25
ББК 22.161.6
М36

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 9 від 26 жовтня 2011 р.).

Рецензенти:

Загороднюк А. В., доктор фізико-математичних наук (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Огірко І. В., доктор фізико-математичних наук (Українська академія друкарства),

Черемних Є. В., доктор фізико-математичних наук (Національний університет «Львівська політехніка»)

М36 Махней О. В. Сингулярні квазідиференціальні оператори на скінченному інтервалі / Махней О. В., Тацій Р. М. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 360 с.

Монографія присвячена дослідженню асимптотики власних значень і власних функцій та розвинення за ними у випадку крайових задач для звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з мірами в коефіцієнтах. Побудовано відповідні асимптотичні формули і наведено умови, за яких можна розвивати функції в ряди за власними функціями.

Для наукових співробітників, аспірантів, викладачів і студентів старших курсів математичних спеціальностей університетів, що спеціалізуються у галузях теорії диференціальних рівнянь і прикладної математики.

УДК 517.927.25
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-8067-78-5

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множини натуральних, дійсних і комплексних чисел відповідно.

C^T, $\bar{C}$, C^{-1} – матриця відповідно транспонована, комплексно спряжена й обернена до матриці C.

$C^* = \bar{C}^T$ – матриця ермітово спряжена до матриці C.

$\det C$ – визначник квадратної матриці C.

$\operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ – вектор-стовпець із компонентами x_1, x_2, ..., x_p.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ – одинична матриця.

E_l – одинична матриця порядку l.

$\mathbb{C}^{p\times q}$ – лінійний простір комплексних $p \times q$ матриць $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{p,q}$ з нормою $\|C\| = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q} |c_{ij}|$.

$\mathbb{C}^p = \mathbb{C}^{p\times 1}$ – p-вимірний лінійний комплексний простір з (евклідовою) нормою $\|\mathrm{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}$ елемента $\mathrm{x} = \operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; скалярний добуток елементів x, y визначається за правилом $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_p\bar{y}_p$.

$AC\left([a,b]; \mathbb{C}^{p\times q}\right)$ – простір матриць-функцій $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{p,q} : [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $c_{ij}(x)$ яких є абсолютно неперервними на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ числовими функціями.

$BV_{loc}\left(I; \mathbb{C}^{p\times q}\right)$ – простір матриць-функцій $C : I \to \mathbb{C}^{p\times q}$ таких, що їх компоненти $c_{ij}(x)$ є скалярними функціями локально обмеженої варіації на інтервалі $I \subset \mathbb{R}$.

$BV\left([a,b]; \mathbb{C}^{p\times q}\right)$ – простір матриць-функцій $C : [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times q}$, в яких компоненти $c_{ij}(x)$ є скалярними функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$BV^+\left([a,b]; \mathbb{C}^{p\times q}\right)$ – простір матриць-функцій $C : [a,b] \to \mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $c_{ij}(x)$ яких є неперервними справа числовими функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$, такими, що $c_{ij}(b) = c_{ij}(b-0)$.

$L_1([a,b];\mathbb{C})$ – простір числових функцій $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, сумовних за Лебегом на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

$L_p([a,b];\mathbb{C})$ – простір числових функцій $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, сумовних за Лебегом у p-му степені на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

$C^k([a,b];\mathbb{C})$ – простір числових функцій $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, які є k разів неперервно диференційовними на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

$W_p^s([a,b];\mathbb{C})$ – простір Соболєва функцій, s-та похідна яких належить простору $L_p([a,b];\mathbb{C})$.

$D^0(I)$ – простір неперервних функцій $I\to\mathbb{C}$ з компактним носієм.

$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g$ – повна варіація від a до b функції $g(x)$.

$\Delta C(x) = C(x+0) - C(x-0)$ – стрибок функції $C\in$ $\in BV([a,b];\mathbb{C}^{p\times q})$ у точці $x\in[a,b]$; $\Delta C(a) = C(a+0)-C(a)$, $\Delta C(b) = C(b) - C(b-0)$.

$(f,\ g)_{L_2}$ – скалярний добуток у просторі $L_2([a,b];\mathbb{C})$:

$$(f,\ g)_{L_2} = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

$(f,\ g)_{BV}$ – скалярний добуток у просторі $BV^+([a,b];\mathbb{C})$, який вводиться формулою (2.64).

$\mathrm{Re}(\alpha)$ – дійсна частина комплексного числа α.

$\mathrm{Im}(\alpha)$ – уявна частина комплексного числа α.

I – тотожний оператор.

$\langle\alpha\rangle = \alpha(1+o(1))$ для $|\rho|\to\infty$, причому $\forall\varepsilon>0$ достатньо малого $\exists N>0$ таке, що для скалярної величини α: $\langle\alpha\rangle =$ $=\alpha(1+f_1(\rho))$, $\langle\alpha\rangle_z = \alpha(1+f_2(z,\rho))$, $\langle\alpha\rangle_x = \alpha(1+f_3(x,\rho))$, $\langle\alpha\rangle_{x,z} = \alpha(1+f_4(x,z,\rho))$, а $|f_1(\rho)|\leqslant\varepsilon$, $|f_2(z,\rho)|\leqslant\varepsilon$, $|f_3(x,\rho)|\leqslant\varepsilon$, $|f_4(x,z,\rho)|\leqslant\varepsilon$ для $|\rho|>N$ і $x,z\in[a,b]$.

$\langle\alpha\rangle_x^j = \alpha(1+o(1))$ для $|\rho|\to\infty$, причому індекс j означає, що множник вигляду $\langle\alpha\rangle_x$ (взагалі кажучи, різний) присутній у кожному доданку суми по j.

$O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ означає скалярну функцію вигляду $\frac{f(x,\rho)}{\rho}$ або матрицю з елементами вигляду $\frac{f_{ij}(x,\rho)}{\rho}$, де $|f(x,\rho)|\leqslant L$ або $|f_{ij}(x,\rho)|\leqslant L$

для $|\rho| > N$, $x \in [a,b]$ і деяких сталих L і N.

$[\alpha] = \alpha\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)$ для $|\rho| \to \infty$, причому $\forall\varepsilon > 0$ достатньо малого $\exists N > 0$ таке, що для скалярної величини α: $[\alpha] = \alpha\Big(1 + \frac{f_1(\rho)}{\rho}\Big)$, $[\alpha]_z = \alpha\Big(1 + \frac{f_2(z,\rho)}{\rho}\Big)$, $[\alpha]_x = \alpha\Big(1 + \frac{f_3(x,\rho)}{\rho}\Big)$, $[\alpha]_{x,z} = \alpha\Big(1 + \frac{f_4(x,z,\rho)}{\rho}\Big)$, а $|f_1(\rho)| \leqslant L$, $|f_2(z,\rho)| \leqslant L$, $|f_3(x,\rho)| \leqslant \leqslant L$, $|f_4(x,z,\rho)| \leqslant L$ для $|\rho| > N$, деякої сталої L і $x, z \in [a,b]$.

$[\alpha]_x^j = \alpha\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)$ для $|\rho| \to \infty$, причому індекс j означає, що множник вигляду $[\alpha]_x$ (взагалі кажучи, різний) присутній у кожному доданку суми по j.

$[A] = A + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)$ для $|\rho| \to \infty$, причому $\forall\varepsilon > 0$ достатньо малого $\exists N > 0$ таке, що для матриці A: $[A] = A + \frac{f_1(\rho)}{\rho}$, $[A]_z = = A + \frac{f_2(z,\rho)}{\rho}$, $[A]_x = A + \frac{f_3(x,\rho)}{\rho}$, $[A]_{x,z} = A + \frac{f_4(x,z,\rho)}{\rho}$, а $|f_{1ij}(\rho)| \leqslant \leqslant L$, $|f_{2ij}(z,\rho)| \leqslant L$, $|f_{3ij}(x,\rho)| \leqslant L$, $|f_{4ij}(x,z,\rho)| \leqslant L$ для $|\rho| > N$, деякої сталої L і $x, z \in [a,b]$.

ПЕРЕДМОВА

Сингулярними диференціальними рівняннями прийнято називати (див., наприклад, [51, с. 10]) або узагальнені диференціальні рівняння, або диференціальні рівняння, визначені на необмеженому проміжку (а також, очевидно, поєднання обидвох випадків). Те ж саме стосується і сингулярних диференціальних операторів. Нижче розглядатимуться сингулярні диференціальні рівняння та оператори першого типу.

Узагальнені диференціальні рівняння (як на скінченному, так і на необмеженому проміжках) виникли при створенні більш досконалих математичних моделей реальних фізичних явищ, що враховують природну єдність дискретного й неперервного. Зокрема, до них приводить значна кількість задач з області механіки, електротехніки, квантової фізики, теорії автоматичного керування тощо. Узагальнені диференціальні рівняння можна умовно розділити на дві основні групи: диференціальні рівняння з імпульсною дією і диференціальні рівняння з узагальненими функціями у коефіцієнтах і правих частинах.

Диференціальні рівняння з імпульсною дією виникли ще за часів народження нелінійної механіки і зацікавили фізиків можливістю адекватно описувати процеси у нелінійних коливальних системах. Однією з найперших у цьому напрямку була робота А. М. Самойленка й А. Д. Мишкіса [75]. Система диференціальних рівнянь з імпульсною дією визначає еволюційний процес і описується [92]:

а) системою диференціальних рівнянь як такою

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y), \quad Y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.1}$$

б) деякою множиною $\mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору $M \times \mathbb{R}$;

в) оператором $\mathcal{A}_t$, що визначений на множині $\mathcal{F}_t$ і відображає її на множину $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору.

У компактнішій формі це можна записати так:

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y), \quad (t, Y) \notin \mathcal{F}_t, \quad \Delta Y|_{(t,Y)\in\mathcal{F}_t} = \mathcal{A}_t Y - Y. \tag{0.2}$$

Під розв'язком задачі (0.2) розуміється функція $Y = \varphi(t)$, яка (у звичайному сенсі) задовольняє систему рівнянь (0.1) поза множиною $\mathcal{F}_t$ і має розриви першого роду у тих точках t, для яких $(t, Y) \in \mathcal{F}_t$. Величина стрибка $\Delta Y = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = = \mathcal{A}_t\varphi(t-0) - \varphi(t-0)$.

Останнім часом з'явилась велика кількість робіт із дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією у різних математичних школах як у нашій країні, так і за її межами [39, 92, 127, 145, 165]. Однак, найбільш систематичні й глибокі дослідження було здійснено київською школою нелінійної механіки, представники якої успішно розвивають такі напрямки, як загальні питання, теорію стійкості та теорію керування, крайові і багатоточкові задачі, методи чисельно-аналітичного й асимптотичного інтегрування, теорію ігор тощо [6, 7, 81, 93–95, 100, 130].

Для узагальнених диференціальних рівнянь другої групи, взагалі кажучи, спільним є той факт, що в їхньому описі зустрічаються в тому чи іншому вигляді добутки узагальнених функцій на розривні. Такі добутки не завжди існують у сенсі теорії узагальнених функцій [2, 16], у зв'язку з чим різні підходи до означення розв'язку можуть приводити до різних результатів.

Диференціальні рівняння високих порядків без особливих проблем зводяться до систем диференціальних рівнянь першого порядку. Тому розглянемо початкову задачу

$$Y' = C'(x)Y + F'(x), \tag{0.3}$$

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I, \tag{0.4}$$

де $C \in AC\,(I;\mathbb{C}^{p\times p})$, $F \in AC\,(I;\mathbb{C}^{p})$, а $Y : I \to \mathbb{C}^p$ – невідома функція. Вона буде еквівалентною до інтегрального рівняння

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0) \tag{0.5}$$

з інтегралом Лебега. Еквівалентність зберігатиметься також тоді, коли $C \in BV^c_{loc}\,(I;\mathbb{C}^{p\times p})$, $F \in BV_{loc}\,(I;\mathbb{C}^{p})$, де $BV^c_{loc}\,(I;\mathbb{C}^{p\times p})$ –

простір матриць p-го порядку, всі елементи яких є неперервними функціями локально обмеженої на інтервалі I варіації (диференціювання тут розуміється в узагальненому сенсі), причому тепер у рівнянні (0.5) фігуруватиме класичний інтеграл Рімана-Стільтьєса. За цих умов у роботі [157] доведено теорему існування і єдиності розв'язку задачі (0.3), (0.4) і показано, що еволюційний оператор є неперервним і має обмежену варіацію, а розв'язок відомим чином виражається через нього і функцію $F(x)$.

Все це не вдається безпосередньо узагальнити на той випадок, коли $C(x)$ є розривною функцією обмеженої варіації, навіть для однорідної системи ($F(x) \equiv 0$). У цьому випадку розв'язок $Y(x)$ буде, очевидно, розривним, і, більше того, точки розривів розв'язку збігатимуться з точками розривів матриці-функції $C(x)$. У зв'язку з цим інтеграл Стільтьєса у рівнянні (0.5) може не існувати (див. приклад в [126, с. 96–97]). Теорія узагальнених функцій тут також не допомагає, бо, наприклад, добуток функції Хевісайда на її узагальнену похідну (δ-функцію Дірака) не існує (некоректний, неоднозначний). Отже, буде некоректним також добуток матриці-міри $C'(x)$ (елементи якої є мірами [127, с. 160], тобто узагальненими похідними функцій обмеженої варіації) на функцію $Y \in BV_{loc}(I;\mathbb{C}^p)$ [114]. В межах різних математичних шкіл існує чимало спроб, спрямованих (за деяких додаткових обмежень) на подолання цієї проблеми. Але за різних припущень можуть отримуватись і різні розв'язки. Одним із найважливіших питань у теорії диференціальних рівнянь є «розумне» визначення розв'язку. У книгах [39, 125] зазначено, що означення розв'язку початкової задачі (0.3), (0.4) у розглядуваній ситуації реалізуються у рамках трьох основних підходів.

Перший підхід пов'язаний зі спробами формалізації цієї задачі з точки зору теорії узагальнених функцій і зводиться до проблеми множення узагальнених функцій на розривні. Спочатку на основі секвенціального підходу [2] вводиться означення добутку міри (узагальненої функції нульового порядку) на функцію обмеженої варіації, а потім відповідним чином дається означення розв'язку задачі (0.3), (0.4) [39, 138, 157–158]. Цікавими є також роботи, в яких досліджуються такі диференціальні рівняння у просторах «нових»[1] узагальнених функцій [1, 37, 85, 139, 142, 160].

Другий підхід до визначення поняття розв'язку задачі (0.3), (0.4) започаткований у роботі [155] і передбачає формальний перехід до інтегрального рівняння (0.5), в якому інтеграл трактується у сенсі Лебега-Стільтьєса, Перрона-Стільтьєса, як некласичний інтеграл Рімана-Стільтьєса тощо [8, 79, 148, 166–167]. При такому підході стрибки розв'язку залежатимуть, очевидно, від значень функції $C(x)$ у точках розриву.

Що стосується третього підходу, то він бере свій початок від роботи [156] і спирається на ідею апроксимації елементів матриці-функції $C \in BV_{loc}(I; \mathbb{C}^{p\times p})$ послідовностями гладких функцій. При цьому розв'язок задачі (0.3), (0.4), що визначається границею своїх гладких наближень, збігається з розв'язком інтегрального рівняння (0.5), в якому інтеграл розуміється у сенсі Рімана-Стільтьєса. У роботах [38, 39, 50] отримано умови існування єдиної границі такої послідовності та досліджено властивості залежності від правих частин таким чином визначеного розв'язку. Окремо вивчено випадок, коли породжена гладкими наближеннями послідовність розв'язків не є збіжною. Подальшого розвитку цей підхід набув у працях [97–99], в яких отримано результати про граничний перехід для нелінійних систем і успішно вивчаються задачі оптимального керування.

Проілюструємо описані вище підходи за допомогою прикладу з роботи [39, с. 145] (див. також [125, с. 34]):

$$y' = \frac{1}{2}\delta(x)y, \quad y(-1) = y_0, \tag{0.6}$$

де $\delta(x)$ – функція Дірака з носієм у точці $x = 0$. Нехай

$$H^+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases} \qquad H^-(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

[1]Нові узагальнені функції, як і розподіли, визначаються як границі послідовностей гладких функцій, однак принципова відмінність їх від розподілів полягає в тому, що при цьому «запам'ятовується» сам спосіб апроксимації.

Розв'язком цієї задачі, що розуміється у сенсі робіт [157–158], є функція

$$y(x) = \left(\frac{2}{3}H^+(x) + 1\right) y_0. \tag{0.7}$$

У рамках другого підходу задачі (0.6) слід поставити у відповідність інтегральне рівняння ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$)

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} y(t)d[\alpha H^-(t) + (1-\alpha)H^+(t)]. \tag{0.8}$$

Зрозуміло, що для різних значень α розв'язки рівняння (0.8) визначаються по-різному: для $\alpha = 1$ (цей випадок відповідає тому, що розв'язки задачі (0.6) за означенням повинні бути неперервними зліва)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H^+(x)\right];$$

для $\alpha = 0$ (розв'язки вважатимемо неперервними справа)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H^-(x)\right];$$

якщо вважати, що $\alpha = 1/2$ (наприклад, із міркувань симетрії, або, приймаючи за означенням розв'язки такими, що задовольняють умову $y(x) = [y(x-0) + y(x+0)]/2$),

$$y(x) = y_0\left(1 + \frac{1}{4}[H^+(x) + H^-(x)]\right).$$

Нехай тепер $H_k(x)$ – послідовність абсолютно неперервних функцій, що поточково збігається на проміжку $[-1,1]$ до функції $H^+(x)$. Поставимо їй у відповідність послідовність функцій $y_k(x) = y_0 \exp\{\frac{1}{2}H_k(x)\}$, які є розв'язками початкових задач

$$y_k' = \frac{1}{2}H_k'(x)y_k, \quad y_k(-1) = y_0. \tag{0.9}$$

Тут $H'_k(x)$ є δ-послідовністю, що апроксимує функцію Дірака $\delta(x)$ [2], тому задачу (0.9) можна вважати гладкою апроксимацією початкової задачі (0.6), причому послідовність $y_k(x)$ поточково збігається до функції

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\frac{1}{2}H^+(x)\right\}. \tag{0.10}$$

і не залежить від вибору апроксимуючої послідовності $H_k(x)$. Очевидно, що розв'язки (0.7), (0.8) і (0.10) не збігаються між собою.

Зауважимо, підсумовуючи вищезгадані концепції, що у роботах Р. М. Тація і М. Ф. Стасюк [104, 114] під розв'язком системи (0.3), (0.4) за умови $C \in BV^+_{loc}(I; \mathbb{C}^{p\times p})$, $F \in BV^+_{loc}(I; \mathbb{C}^p)$ розуміється неперервна справа вектор-функція обмеженої варіації, що задовольняє її в сенсі теорії узагальнених функцій, і таке його означення не залежить від інтерпретації добутку міри на функцію обмеженої варіації. При цьому встановлено ефективні, що виражаються у термінах матриці $C(x)$ і вектора $F(x)$, критерії однозначної визначеності (коректності) розв'язку, за виконання яких згадані добутки фактично зникають.

Від сингулярних слід відрізняти сингулярно збурені диференціальні рівняння з малим параметром, який знаходиться, перш за все, при найстаршій похідній, наприклад,

$$\varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - A(x)W(x,\varepsilon) = h(x),$$

де $A \in C^\infty([0,a]; \mathbb{C}^{n\times n})$, $h \in C^\infty([0,a]; \mathbb{C}^n)$, $\varepsilon \to +0$. Такого типу задачі успішно вивчаються в роботах [3, 21, 52, 80].

Відзначимо, що теорія операторів відіграє важливу роль у сучасній математиці і фізиці. Спектральний аналіз диференціальних операторів, тобто дослідження спектра і розвинення заданої функції за власними функціями диференціального оператора, є основним математичним апаратом при розв'язуванні задач теорії коливань, квантової механіки, атомної фізики, акустики, фізики твердого тіла, механіки рідин тощо. При цьому особливо важливим є дослідження сингулярних диференціальних операторів.

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими (або принаймні сумовними за Лебегом коефіцієнтами) вивчено досить добре. В монографії [76, гл. 2] за допомогою отриманої асимптотичної поведінки (при великих значеннях параметра λ) лінійно незалежної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння із сумовними за Лебегом коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_3(x)y^{(n-3)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda y \qquad (0.11)$$

побудовано асимптотичні формули для великих за модулем власних значень та власних функцій відповідної цьому рівнянню крайової задачі з регулярними крайовими умовами

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \qquad (0.12)$$

а також розвинення в ряд за власними функціями. Фактично, це є огляд результатів, отриманих ще на початку минулого століття переважно Біркгофом і Стоуном [141, 140, 172]. Аналогічні спектральні властивості можна встановити й у векторному випадку (див. [76, гл. 3]). В роботах [76, с. 87–88] і [42, с. 203–206] наведено результати узагальнення за допомогою запропонованої ще в [152, с. 375] підстановки і формули Остроградського-Ліувілля вищезгаданої крайової задачі на випадок, коли диференціальне рівняння має вигляд

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda g(x)y, \quad (0.13)$$

де $p_0, g \in W_1^n([a, b]; \mathbb{R})$, $p_0(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ на $[a, b]$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a, b]; \mathbb{C})$, а решта коефіцієнтів належать класу $L_1([a, b]; \mathbb{C})$. Для посилено регулярних крайових умов, як одночасно було показано незалежно одним від одного В. П. Михайловим [73] і Г. М. Кесельманом [44], власні та приєднані функції останньої крайової задачі утворюють базис Рісса в $L_2([a, b]; \mathbb{C})$. Формулювання згаданих тут результатів можна знайти в підрозділі 1.1.

Ці результати мають реальне практичне значення і використовуються, наприклад, при вивченні коливань і стійкості пластинок під дією потоків газу [10].

За ще сильніших припущень досліджуються диференціальні оператори та їхні спектральні властивості в главі XIII монографії [31, с. 445–793]. На коефіцієнти диференціальних виразів тут накладаються, як правило, вимоги нескінченної диференційовності. Крім того, левова частка досліджень присвячується самоспряженим диференціальним операторам. Однак, за допомогою теорії збурень у главі XIX книги [32, с. 408–438] отримано результати, близькі до викладених на стор. 32, для регулярних крайових задач, подібних до (0.11), (0.12) із сумовними коефіцієнтами $p_j(x)$. У працях [31, 32] основним інструментом вивчення спектру диференціальних операторів є абстрактна теорія лінійних операторів.

Надто жорстких обмежень на коефіцієнти $p_0(x)$, $p_1(x)$ і $g(x)$ в рівнянні (0.13) вдалось позбутись в [88]. У цій роботі для $p_0, g \in$ $\in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$ $(j=\overline{1,n})$ встановлено аналогічні [76] асимптотичні формули з тією різницею, що залишковий член оцінюється не через $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, а через $o(1)$.

Можна також зазначити, що на необмеженому проміжку спектральні властивості несамоспряжених операторів, породжених диференціальними виразами із сумовними коефіцієнтами і регулярними крайовими умовами, досліджувались, зокрема, в роботах [53, 72].

Протягом останнього часу у працях київських математиків А. М. Гомілко і Г. В. Радзієвського [26, 27, 83, 84] для функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$y^{(n)} + Fy + \rho^n y = 0,$$

де оператор F діє з простору Гельдера C^γ в простір Соболєва W_p^s $(0 \leqslant \gamma < n+s-1,\ s$ – ціле невід'ємне число), було побудовано асимптотичні формули для великих $|\rho|$ для лінійно незалежної системи розв'язків цих рівнянь, з'ясовано асимптотику власних значень відповідних їм регулярних крайових задач та базисні властивості власних функцій. Таким чином, роботи [26, 27, 83, 84] суттєво узагальнюють на випадок інтегро-диференціальних, диференціально-граничних і диференціально-різницевих операторів результати, викладені в [76].

У всіх вищезгаданих роботах асимптотика за вказаних обмежень на коефіцієнти будується в першому наближенні. Її вдається уточнити лише у випадку значно гладших коефіцієнтів (див. [76, с. 63–65]). У той же час, цікавою є робота [14], де для задачі Штурма-Ліувілля з сумовним потенціалом встановлено уточнену асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій.

Як це вже було сказано вище, у прикладних задачах, які описують реальні фізичні процеси, дуже часто зустрічаються узагальнені диференціальні оператори. Мабуть, найперші результати стосовно спектральної теорії таких операторів були отримані ще в 50-х роках минулого століття в роботах І. С. Каца, М. Г. Крейна і Ф. Р. Гантмахера [19, 43], де детально вивчались крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, які в сучасних позначеннях можна записати у вигляді $y'' + \lambda M'(x)y = 0$ і $y^{(4)} - \lambda M'(x)y = 0$, де $M(x)$ – неспадна функція, а $M'(x)$ – її узагальнена похідна (міра). Ці рівняння описують відповідно вільні коливання струни і балки, які крім неперервно розподіленої маси несуть на собі зосереджені точкові маси – бусинки. Згадані дослідження проводились без застосування теорії узагальнених функцій, але, у зв'язку зі специфікою, методи дослідження цих задач не вдалось застосувати до рівнянь вищих порядків, рівнянь неодночленного класу, рівнянь зі змінними коефіцієнтами тощо.

Із спектральною теорією неоднорідної навантаженої струни тісно пов'язана (див. [78]) ще одна спектральна теорія – теорія операторів Шредінґера з сингулярними (а саме, зосередженими на дискретній множині точок $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) потенціалами

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x - x_k),$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – інтенсивності точкових взаємодій. Такі оператори є точно розв'язуваними (в сенсі того, що їх резольвенти будуються явно) математичними моделями квантово-механічних систем [86, 171]. Історію дослідження операторів Шредінґера з точковими взаємодіями і достатньо повну бібліографію з цієї тематики можна знайти в монографіях [86, 137, 171]. Зокрема, в роботі [15] результати праці [14] (тобто асимптотику власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля) поширено на випадок потенціалу з δ-функціями. Пізнішим дослідженням у цьому напрямку присвячені роботи [22–25, 77, 89–91, 146, 147, 150, 151, 154, 162–164, 176, 177]. Деякі результати для окремих диференціальних операторів другого і четвертого порядку з узагальненими функціями в коефіцієнтах отримано в роботі [56].

Значно більш загальні сингулярні самоспряжені оператори вивчаються в [47] за допомогою методу самоспряжених розширень і сингулярних білінійних форм. Представники львівської математичної школи успішно досліджують властивості самоспряжених збурень сингулярних диференціальних операторів високих порядків [72, 108–110, 135].

У прикладних задачах [11, 13, 41, 46, 49, 79] ми дуже часто стикаємось із диференціальними виразами, котрі містять доданки типу $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$. Диференціальні рівняння з такими виразами, наприклад, описують коливання балок. За умови недостатньої гладкості коефіцієнта $p(x)$ ці вирази вже неможливо звести (за допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Ситуація додатково ускладнюється, коли $p(x)$ є узагальненою функцією. Тоді навіть розгляд цих задач з точки зору функціонально-диференціальних операторів стає проблематичним. В літературі прийнято називати згадані диференціальні вирази квазідиференціальними.

Мабуть, першим почав досліджувати квазідиференціальні вирази Д. Шин, запропонувавши ідею введення квазіпохідних, що дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів. У своїх роботах [131–134] автор вивчав скалярні квазідиференціальні рівняння вигляду

$$f^{[n]} - hf = 0, \quad \mathrm{Im}(h) \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.14}$$

де

$$f^{[0]} = P_{00}f, \quad f^{[k]} = iP_{kk}\frac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu}f^{[\nu]}, \tag{0.15}$$
$$k = \overline{1,n}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тут припускається, що функції $P_{k\nu} \in L_1((a,b);\mathbb{C})$ $(\nu \leqslant k$, $k,\nu = \overline{0,n})$, а функції $P_{kk}^{-1}(x)$ $(k = \overline{0,n})$ та $P_{k\nu}(x)$ $(\nu < k$, $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1})$ – квадратично сумовні на (a,b). Функція $f(x)$ називається розв'язком рівняння (0.14), якщо квазіпохідні $f^{[k]}(x)$ $(k = \overline{0,n-1})$ є абсолютно неперервними і задовольняють рівність (0.14) майже всюди на інтервалі (a,b). Аналогічно вводиться поняття розв'язку рівняння, спряженого до (0.14). Для рівнянь (0.14) та спряженого до нього доведено теореми про існування та єдиність розв'язків початкових задач, побудовано лінійну теорію таких рівнянь, а також встановлено зв'язок між їх розв'язками.

Ідеї Шина виявились досить плідними і пізніше отримали подальший розвиток у працях М. Г. Крейна [48], М. А. Наймарка [76], Ф. С. Рофе-Бекетова [87], Н. І. Ахієзера і І. М. Глазмана [5], У. Еверітта і А. Зеттла [143, 174, 175] і в інших роботах як теоретичного, так і прикладного характеру. Інколи, як це робиться в [125], не згадуючи безпосередньо в тексті квазіпохідні, автор фактично з їх допомогою зводить диференціальне рівняння до системи Каратеодорі.

Що стосується нових досліджень з теорії квазідиференціальних рівнянь, які з'явились протягом останніх двох-трьох десятиліть, необхідно згадати роботи [17, 28, 29, 33–36, 45, 74, 88, 101–103, 105, 106, 112–115, 118, 121–124, 129, 144, 153]. У працях [33, 74, 88, 101, 102, 144, 153] все ще досліджуються квазідиференціальні рівняння з сумовними коефіцієнтами, за допомогою квазіпохідних вони зводяться до диференціальних систем Каратеодорі. Інші ж роботи присвячені вивченню квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами. Зокрема, у працях Р. М. Тація та його учнів М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевича, Б. Б. Пахолка [45, 105, 106, 112–115, 124] на основі розвитку концепції квазіпохідних та вивчення структури фундаментальної матриці побудовано лінійну теорію скалярних, векторних і матричних квазідиференціальних рівнянь з коефіцієнтами-мірами і правими частинами – узагальненими похідними вищих порядків від неперервних справа функцій обмеженої варіації.

У роботах [107, 114] результати Ф. Аткінсона [4] стосовно дослідження крайових задач для диференціальних систем із сумовними за Лебегом коефіцієнтами було узагальнено на випадок диференціальних систем з мірами. Це дало можливість для квазідиференціальних операторів, породжених самоспряженими квазідиференціальними виразами з коефіцієнтами-мірами у працях [18, 54, 55, 114, 116, 117, 119, 120] отримати основні положення спектральної теорії. В роботі [58] узагальнено до певної міри результати праці [53].

Ця монографія присвячена дослідженню спектральних властивостей диференціальних і квазідиференціальних операторів, а також більш загальних крайових задач, у випадку несамоспряжених диференціальних (квазідиференціальних) виразів з узагальненими коефіцієнтами. Будучи ідейно близькою до монографії [124], вона є певною мірою її продовженням.

У першому розділі монографії сформульовано відомі результати, які стосуються асимптотики власних значень і власних функцій диференціальних і квазідиференціальних операторів, породжених несамоспряженими диференціальними і квазідиференціальними виразами, а також розвинень за власними функціями цих операторів.

Другий розділ присвячено крайовим задачам для скалярних квазідиференціальних і диференціальних рівнянь з мірами у коефіцієнтах. Тут, зокрема, читач знайде асимптотики власних значень і власних функцій крайових задач, спряжені крайові умови, функції Ґріна крайових задач, розвинення за власними функціями, застосування до розв'язування прикладних задач. У дванадцятому підрозділі другого розділу наведено уточнені асимптотики власних значень і власних функцій крайових задач і розвинення за власними функціями.

У третьому розділі результати другого розділу поширено на випадок векторних крайових задач.

Автори вдячні докторам фізико-математичних наук А. В. Загороднюку, І. В. Огірко і Є. В. Черемних за цінні поради і нелегку працю з рецензування монографії, учасникам семінару кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка і львівського міського семінару з диференціальних рівнянь за участь у обговоренні результатів, які увійшли до цієї книги.

1

ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ

1.1. Формулювання відомих результатів

Сформулюємо тут результати, які будуть потрібними в основній частині монографії.

1.1.1. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння з параметром. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку на скінченному відрізку $[a, b]$ з параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ вигляду

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (1.1)$$

де $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{1,n}$, $p_0(x)$ — дійснозначна неперервна функція, що не перетворюється в нуль на $[a, b]$.

Введемо позначення

$$\lambda = -\operatorname{sgn}(a_0(x))\rho^n$$

і розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів (рис. 1) вигляду

$$\mathcal{S}_q = \left\{\rho : \frac{q\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(q+1)\pi}{n}\right\}, \quad q = \overline{0, 2n-1}. \quad (1.2)$$

Нехай $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — всі різні корені n-го степеня з -1. Має місце наступна властивість секторів $\mathcal{S}_q$ ([76, с. 53–54]).

Твердження 1.1. *Для кожного сектора $\mathcal{S}_q$ існує таке розташування чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, що для всіх $\rho \in \mathcal{S}_q$ мають місце нерівності*

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leqslant \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\rho\omega_r). \quad (1.3)$$

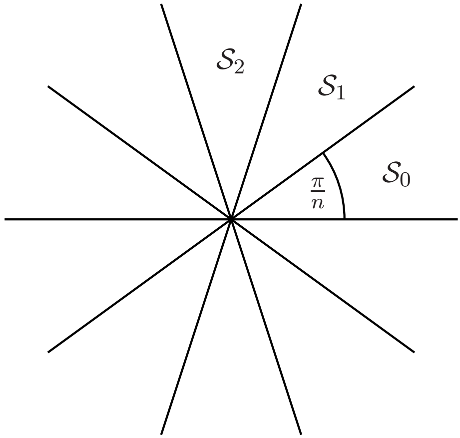

Рис. 1.

Через $\mathcal{T}_q$ позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з $\mathcal{S}_q$ шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$. Для секторів $\mathcal{T}_q$ нерівності (1.3) перепишуться у вигляді

$$\operatorname{Re}((\rho + c)\omega_1) \leqslant \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_n). \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 ([76, с. 58–62]). *Якщо всі функції* $p_j \in L_1([0,1];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$, *то в кожній області* $\mathcal{T}_q$ *комплексної* ρ*-площини рівняння*

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_3(x)y^{(n-3)} + \ldots + p_n(x)y + \rho^n y = 0 \tag{1.5}$$

має n *лінійно незалежних розв'язків* y_1, y_2, ..., y_n, *регулярних* (*тобто однозначних аналітичних*) *відносно* $\rho \in \mathcal{T}_q$ *для* $|\rho|$ *достатньо великих, які задовольняють співвідношенням*

$$\frac{d^\nu y_k(x,\rho)}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\left(\omega_k^\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{1.6}$$

$$\nu = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Зауваження 1. Якщо функції p_2, p_3, ..., p_n мають в інтервалі $[0,1]$ неперервні похідні до m-го, $(m-1)$-го, ... порядків відповідно, то для розв'язків y_1, y_2, $\ldots$, y_n, побудованих у теоремі 1.1, мають місце асимптотичні формули (див. [76, с. 63–65], [140])

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^\nu e^{\rho\omega_k x}\left(1 + \frac{y_{k\nu 1}(x)}{\rho} + \frac{y_{k\nu 2}(x)}{\rho^2} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{y_{k\nu m}(x)}{\rho^m} + O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right), \quad k=\overline{1,n}, \;\; \nu = \overline{0,n-1}, \tag{1.7}$$

де $y_{k\nu s}(x)$ ($\nu = \overline{0,n-1}$, $s = \overline{1,m}$) – неперервні функції в інтервалі $[0,1]$. Функції $y_{k0s}(x)$ можна знайти з точністю до сталих доданків, підставивши вирази (1.7) в рівняння (1.5) і прирівнявши після скорочення на $\rho^n e^{\rho\omega_k x}$ члени біля однакових степенів від $\frac{1}{\rho}$ до $\frac{1}{\rho^m}$ включно. Функції $y_{k\nu s}(x)$ знаходять почленним диференціюванням формули (1.7) для $\nu = 0$.

Зауваження 2. Теорема 1.1 залишається правильною для рівняння (1.5) і тоді, коли $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$, (див. [76, 140, 172, 173]) при цьому асимптотичні формули (1.6) набувають вигляду

$$\frac{d^\nu y_k(x,\rho)}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(\omega_k^\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{1.8}$$
$$\nu = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Зауваження 3. У випадку $p_0(x) \equiv 1$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$ в результаті заміни

$$y(x) = v(x)\hat{y}(x), \quad v(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x p_1(\tau)d\tau\right)$$

і ділення обидвох частин рівняння (1.1) на $v(x)$ для $\hat{y}(x)$ отримується [76, с. 53] диференціальне рівняння з коефіцієнтами $\hat{p}_j(x)$, $j = \overline{0,n}$, причому $\hat{p}_0(x) \equiv 1$ і $\hat{p}_1(x) \equiv 0$. Таким чином, замість асимптотичних формул (1.8) будемо мати

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(\omega_k^\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

$$\nu = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Зауваження 4. У випадку, коли $p_0 \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$ і $p_0(x) \neq 0$ на відрізку $[a,b]$, внаслідок (запропонованої ще в [152, с. 375]) заміни у рівнянні (1.1) незалежної змінної

$$t = \eta(x) = \int_a^x |p_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}} d\tau \tag{1.9}$$

отримується [76, с. 87–88] диференціальне рівняння з коефіцієнтами $\hat{p}_j(t)$, $j = \overline{0, n}$, $t \in [0, h]$, $h = \eta(b)$, причому $\hat{p}_0(t) \equiv 1$ і $\hat{p}_1 \in W_1^{n-1}([0,h];\mathbb{C})$. Таким чином, у цьому випадку існує фундаментальна система розв'язків з асимптотикою для $k = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ вигляду

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^\nu W(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{1.10}$$

де

$$W(x) = |p_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} \exp\left(-\frac{1}{n}\int_a^x \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)} d\tau\right). \tag{1.11}$$

В 90-х роках двадцятого століття В. С. Рихлову вдалось послабити вимоги на коефіцієнти при найстарших похідних.

Теорема 1.2 ([88]). *Припустимо, що коефіцієнти диференціального рівняння (1.1) задовольняють наступні умови:*

$$p_0 \in W_1^1([a,b];\mathbb{R}), \quad p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C}), \quad j = \overline{1, n},$$
$$p_0(x) \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Нехай $\lambda = -\operatorname{sgn}(p_0(x))\rho^n$. Тоді в кожній області $\mathcal{T}_q$ комплексної ρ-площини рівняння (1.1) має n лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярних (тобто однозначних аналітичних) по $\rho \in \mathcal{T}_q$ для $|\rho|$ достатньо великих, що мають асимптотику

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^\nu W(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)} (1 + O(\psi(\rho))), \tag{1.12}$$

де

$$k=\overline{1,n},\quad \nu=\overline{0,n-1},\quad \psi(\rho)=f(\rho)+\frac{1}{|\rho|},$$
$$f(\rho)=\max_{j\neq s}\left\{\left\|\int\limits_{c_{js}}^{x}e^{\rho(\omega_j-\omega_s)(\eta(x)-\eta(t))}\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right\|,\right.$$
$$\left.\left\|\int\limits_{c_{js}}^{x}e^{\rho(\omega_j-\omega_s)(\eta(x)-\eta(t))}\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}dt\right\|\right\},$$

c_{js} дорівнює a або b в залежності від умови $j<s$ чи $j>s$, $\eta(x)$ і $W(x)$ подаються рівностями (1.9) і (1.11), а через $\|\cdot\|$ позначено норму в просторі $C[a,b]$ ($\|f\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$).

Як видно з теореми 1.2, якщо $p_0\notin W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1\notin$ $\notin W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$, то мають місце асимптотичні формули, аналогічні (1.10), але замість оцінок $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ для залишкового члена отримуються оцінки вигляду $o(1)$ для $|\rho|\to\infty$. В цьому випадку в залежності від властивостей функцій $p_0(x)$ і $p_1(x)$ прямування до нуля залишкового члена може бути як завгодно повільним.

1.1.2. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння з параметром. Розглянемо квазідиференціальне рівняння вигляду

$$y^{[n]}(x)=\lambda y(x)\tag{1.13}$$

на скінченному відрізку $[a,b]$, де

$$y^{[k]}=ip_{kk}(x)\frac{d}{dx}y^{[k-1]}+\sum_{j=0}^{k-1}p_{kj}(x)y^{[j]},$$
$$k=\overline{1,n},\quad y^{[0]}(x)=y(x).$$

Такі квазідиференціальні рівняння вперше розглядав Д. Шин в [131–134].

Теорема 1.3 ([88]). *Позначимо*

$$r_k(x) = \prod_{s=1}^{k} p_{ss}(x), \quad k = \overline{1,n}, \quad r_0(x) = 1,$$

і покладемо $\lambda = -\operatorname{sgn}(r_n(x))(i\rho)^n$. *Якщо коефіцієнти квазідиференціального рівняння* (1.13) *задовольняють умови*

$$p_{kk} \in W_1^1\left([a,b];\mathbb{R}\right), \quad p_{kj} \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}\right), \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0,k-1};$$
$$r_n(x) \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то в кожній області $\mathcal{T}_q$ *комплексної* ρ*-площини рівняння* (1.13) *має* n *лінійно незалежних розв'язків* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *регулярних (тобто однозначних аналітичних) по* $\rho \in \mathcal{T}_q$ *для* $|\rho|$ *достатньо великих, які мають асимптотику для* $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1}$ *вигляду*

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = r_\nu(x)(i\rho\omega_k\tilde{\eta}'(x))^\nu q(x)\tilde{W}(x)e^{\rho\omega_k\tilde{\eta}(x)}(1 + O(\tilde{\psi}(\rho))), \tag{1.14}$$

де

$$q(x) = |r_n(x)|^{\frac{n-1}{2n}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} |p_{jj}(x)|^{\frac{n-j}{n}}\right)^{-1},$$

$$\tilde{W}(x) = \exp\left(\frac{i}{n}\int_a^x \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{j,j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)} d\tau\right),$$

$$\tilde{\eta}(x) = \int_a^x |r_n(\tau)|^{-\frac{1}{n}} d\tau, \quad \tilde{\psi}(\rho) = \tilde{f}(\rho) + \frac{1}{|\rho|},$$

$$\tilde{f}(\rho) = \max_{\substack{\nu \\ j\neq s}} \left\{ \left\| \int_{c_{js}}^x e^{\rho(\omega_j-\omega_s)(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(t))} \frac{p_{\nu,\nu-1}(t)}{p_{\nu\nu}(t)} dt \right\|, \right.$$
$$\left. \left\| \int_{c_{js}}^x e^{\rho(\omega_j-\omega_s)(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(t))} \frac{p'_{\nu\nu}(t)}{p_{\nu\nu}(t)} dt \right\| \right\}.$$

Тут константи c_{js} мають той самий зміст, що і в теоремі 1.2.

1.1.3. Регулярні крайові умови. Нормовані крайові умови для диференціального рівняння (1.1) мають вигляд

$$\begin{gathered}U_\nu(y) \equiv \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(a) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(b) + \\ + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \Big(\alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(b)\Big) = 0, \qquad (1.15) \\ |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \\ n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{s+2} < k_s, \quad s = \overline{1, n-2}.\end{gathered}$$

Розглянемо фіксовану область $\mathcal{S}_q$ і занумеруємо числа ω_1, ω_2, ..., ω_n так, щоб для $\rho \in \mathcal{S}_q$ мали місце нерівності (1.3).

Означення 1.1 ([76, с. 66–67]). У випадку непарного n ($n = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (1.15) називаються *регулярними*, якщо числа θ_0 і θ_1, що визначаються рівністю

$$\theta_0 + \theta_1 s =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1 \omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \beta_1 \omega_n^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{1.16}$$

відрізняються від нуля. У випадку парного n ($n = 2\mu$) нормовані крайові умови (1.15) називаються *регулярними*, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю $\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = D$, де визначник D відрізняється від детермінанта з (1.16) тим, що $(\mu+1)$-й стовпець містить елементи вигляду $\left(\alpha_j + \frac{1}{s}\beta_j\right) \omega_{\mu+1}^{k_j}$.

Це означення регулярності не залежить від вибору області $\mathcal{S}$, за допомогою якої були занумеровані числа ω_j [76, с. 67–69]. Крім того, мають місце властивості [76, с. 69].

1. Корені рівняння $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$ не змінюються при переході від $\mathcal{S}_q$ до $\mathcal{S}_{q'}$ для $q = q' \pmod 2$; при переході від $\mathcal{S}_{2q+1}$ до $\mathcal{S}_{2q}$ вони множаться на $e^{\pm\frac{2\pi i}{n}(k_1+k_2+\ldots+k_n)}$, причому знак $+$ $(-)$ відповідає $n = 4p+1$ $(n = 4p-1)$.

2. При зміні q на парний доданок корені ξ' і ξ'' квадратного рівняння $\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1} = 0$ (відповідного регулярним крайовим умовам) не змінюються; при переході від парного q до непарного вони переходять у $\frac{1}{\xi'}$, $\frac{1}{\xi''}$.

1.1.4. Асимптотика власних значень.

Теорема 1.4 ([76, с. 74–83]). *Власні значення задачі на власні значення* (1.5), (1.15) *з сумовними на проміжку* $[a,b]$ *коефіцієнтами* p_j $(j = \overline{2,n})$ *і регулярними крайовими умовами* (1.15) *утворюють дві нескінченні послідовності* λ'_k, λ''_k $(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, *де* $N \in \mathbb{N}$. *Для непарного* n, $n = 2\mu - 1$,

$$\begin{cases} \lambda'_k = (\mp 2k\pi i)^n \Big[1 \mp \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\Big], \\ \lambda''_k = (\pm 2k\pi i)^n \Big[1 \pm \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\Big], \end{cases} \tag{1.17}$$

де верхній знак відповідає $n = 4p-1$, *а нижній —* $n = 4p+1$; $\ln_0 \xi$ *— деяке фіксоване значення натурального логарифма, а* $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *— корені рівняння* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, *що відповідає області* $\mathcal{S}_q$ *з* q *відповідно непарним і парним.*

Для парного n, $n = 2\mu$ *і* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \Big[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\Big], \\ \lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \Big[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\Big], \end{cases} \tag{1.18}$$

де ξ' *і* ξ'' *— корені рівняння*

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{1.19}$$

що відповідає області $\mathcal{S}_0$; *причому верхній знак у формулах* (1.18) *відповідає парному, а нижній — непарному* μ.

Нарешті, для парного n, $n = 2\mu$ *і* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \end{cases} \tag{1.20}$$

де ξ *— (двократний) корінь рівняння* (1.19), *що відповідає області* $\mathcal{S}_0$, *а вибір верхнього чи нижнього знака у формулах* (1.20) *слід здійснювати за тим самим правилом, що й у формулах* (1.18).

У перших випадках всі власні значення, починаючи з деякого, є простими, а в останньому (формули (1.20)*), — починаючи з деякого, простими чи двократними.*

Зауваження 1. Якщо коефіцієнти $p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)$ мають неперервні похідні до деякого порядку, то можна отримати більш точні асимптотичні формули [141, 173].

Зауваження 2. Теорема 1.4 має місце для задачі на власні значення (1.5), (1.15) і тоді, коли $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$, [76, 42, 141], при цьому у формулах (1.17), (1.18), (1.20) слід замість π підставити $\frac{\pi}{b-a}$.

Зауваження 3. У випадку, коли $p_0 \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in$ $\in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$, $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$ $(j = \overline{2,n})$ і $p_0(x) \neq 0$ на відрізку $[a,b]$, теорема 1.4 залишається правильною для задачі (1.1), (1.15), [76, 42, с. 198–199], при цьому у формулах (1.17), (1.18), (1.20) слід замість π підставити $\frac{\pi}{\eta(b)}$, де $\eta(b)$ подається формулою (1.9).

1.1.5. Асимптотика власних функцій. Нехай не всі алгебричні доповнення до елементів першого рядка визначника

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(y_j)\right)_{\nu,j=1}^n,$$

дорівнюють нулю, де y_j — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння $l_n(y) = \lambda y$. Тоді у випадку непарного n $(n = 2\mu - 1)$ для крайової задачі (1.5), (1.15) із сумовними на проміжку $[0,1]$ коефіцієнтами p_j $(j = \overline{2,n})$ і регулярними крайовими умовами (1.15) відповідні власним значенням λ'_k, λ''_k власні функції $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ подаються наступними асимптотичними формулами [76, с. 84–86]:

$$y_k^{(s)}(x) = \det\left(X_{1k}^{(s)}, X_{2k}^{(s)}\right),$$

де

$$X_{1k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \rho_k^{(s)} x}[1] & \cdots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(s)} x}[1] & e^{\omega_\mu \rho_k^{(s)} x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2 + \xi^{(s)}\beta_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \cdots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n + \xi^{(s)}\beta_n]\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(s)}(x-1)}[1] & \cdots & e^{\omega_n \rho_k^{(s)}(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu}(\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(1)}), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu}(\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(2)}),$$

$k = N, N+1, \ldots$; N — достатньо велике натуральне число, а $s = 1, 2$, причому верхній знак тут відповідає $n = 4p - 1$, а нижній — $n = 4p + 1$; $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ — тут ті ж самі, що і в теоремі 1.4.

У випадку парного n $(n = 2\mu)$ і простих власних значень крайової задачі (1.5), (1.15) із сумовними на проміжку $[0, 1]$ коефіцієнтами p_j $(j = \overline{2, n})$ та регулярними крайовими умовами (1.15) відповідні власним значенням λ_k', λ_k'' власні функції y_{1k}, y_{2k} подаються наступними асимптотичними формулами [76, с. 86]:

$$y_{1k}(x) = \det\left(X_{1k}', X_{2k}'\right), \quad y_{2k}(x) = \det\left(X_{1k}'', X_{2k}''\right),$$

де

$$X_{1k}' = \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \rho_k' x}[1] & \cdots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k' x}[1] & e^{\omega_\mu \rho_k' x}[1] \\ [\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2 + \xi'\beta_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ [\alpha_n]\omega_1^{k_n} & \cdots & [\alpha_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n + \xi'\beta_n]\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X'_{2k}=\begin{pmatrix} e^{\omega_{-\mu}\rho'_k x}[1] & e^{\omega_{\mu+2}\rho'_k(x-1)}[1] & \cdots & e^{\omega_n\rho'_k(x-1)}[1] \\ [\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & [\beta_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & [\beta_2]\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha_n+\frac{1}{\xi'}\beta_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & [\beta_n]\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & [\beta_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho'_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\mp 2k\pi i+\ln_0\xi'),\quad \rho''_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\mp 2k\pi i+\ln_0\xi''),$$

$k=N,N+1,\ldots$; N — достатньо велике натуральне число, причому верхній знак тут відповідає $n=4p-1$, а нижній — $n=4p+1$; X''_{1k}, X''_{2k} відрізняються від X'_{1k}, X'_{2k} заміною ρ'_k на ρ''_k і ξ' на ξ''; ξ' і ξ'' тут ті ж самі, що і в теоремі 1.4.

1.1.6. Розвинення за власними функціями з області визначення оператора.

Теорема 1.5 ([76, с. 98]). *Нехай L — оператор, породжений диференціальним виразом*

$$l_n(y)\equiv y^{(n)}+p_2(x)y^{(n-2)}+p_3(x)y^{(n-3)}+\ldots+p_n(x)y$$

із сумовними на проміжку $[0,1]$ коефіцієнтами $p_j(x)$ і регулярними крайовими умовами (1.15). Нехай всі його власні значення є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$. Тоді кожна функція з області визначення оператора L розвивається в рівномірно збіжний ряд за його власними функціями

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu y_\nu(x),$$

$$d_\nu=\int_0^1 f(\xi)\overline{z_\nu(\xi)}d\xi, \tag{1.21}$$

де $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — власні функції операторів L і спряженого до нього L^*, відповідні власним значенням λ_ν, $\overline{\lambda_\nu}$ за виконання додаткової умови нормованості

$$\int_0^1 y_\nu(x)\overline{z_\nu(x)}dx=1. \tag{1.22}$$

Зауваження. У випадку, коли $p_0 \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$, $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$ $(j = \overline{2,n})$ і $p_0(x) \neq 0$ на відрізку $[a,b]$, теорема 1.5 виконується для оператора, породженого диференціальним виразом

$$l_n(y) \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y \tag{1.23}$$

і регулярними крайовими умовами (1.15) [76, 141]. При цьому у (1.21) і (1.22) межами інтегрування будуть числа a і b.

Що стосується випадку нерегулярних крайових умов, то Хромовим [128] було доведено, що лише функції з окремих класів можуть розвиватись у рівномірно збіжні ряди за власними та приєднаними функціями крайової задачі (1.5), (1.15).

1.1.7. Базис Рісса.

Означення 1.2. Послідовність $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається *базисом* простору E, якщо кожен елемент $x \in E$ єдиним чином подається у вигляді $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_{kj}$, де $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — числова послідовність.

Означення 1.3. Базис, який не втрачає можливості бути базисом при будь-якій перестановці своїх членів, називається *базисом безумовної збіжності*.

Означення 1.4. *Базисом Рісса* в $L_2([a,b];\mathbb{C})$ називається така повна в цьому просторі послідовність функцій $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що для кожної функції $f \in L_2([a,b];\mathbb{C})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \tag{1.24}$$

де

$$c_k = (f,\ \varphi_k)_{L_2} = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.25}$$

і для будь-якої послідовності чисел c_1, c_2, … такої, що виконується (1.24), існує функція $f \in L_2([a,b];\mathbb{C})$, для якої мають місце співвідношення (1.25).

Якщо $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис Рісса, то, як відомо [30, 76], існує єдина послідовність $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що утворює разом з $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ біортогональну систему

$$(\varphi_k,\ \psi_j)_{L_2} = \int\limits_a^b \varphi_k(x)\overline{\psi_j(x)}dx = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Послідовність $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ теж є базисом Рісса. При цьому для кожної функції $f \in L_2\left([a,b];\mathbb{C}\right)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varphi_k(x), \qquad d_k = (f,\ \psi_k)_{L_2} = \int\limits_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}dx,$$

де ряд збігається в середньому квадратичному.

Якщо $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність власних і приєднаних функцій квазідиференціального (диференціального) оператора, то $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність власних і приєднаних функцій спряженого до нього квазідиференціального оператора.

Базис Рісса називають ще базисом, *еквівалентним ортонормованому*. Як показав І. М. Гельфанд [20], у гільбертовому просторі поняття базису безумовної збіжності, що задовольняє додаткову вимогу $0 < m \leqslant \|e_k\| \leqslant M < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, еквівалентне поняттю базису Рісса, введеному Н. К. Барі.

Означення 1.5. Послідовність функцій $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається *ω-лінійно незалежною*, якщо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k = 0$$

є неможливою при не всіх $c_k = 0$.

Означення 1.6. Дві послідовності функцій $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ називаються *квадратично близькими*, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - g_k|^2 < \infty.$$

Теорема 1.6 (Барі [12], [30, с. 382]). *Будь-яка ω-лінійно незалежна послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, квадратично близька до базису Рісса $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, сама є базисом Рісса.*

У 1961 році Г. М. Кесельман і В. П. Михайлов одночасно і незалежно один від одного отримали наступний важливий результат.

Теорема 1.7 ([44, 73]). *Система кореневих функцій оператора L, породженого диференціальним виразом* (1.23), *де $p_0 \in \in W_1^n([0,1];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{n-1}([0,1];\mathbb{C})$, $p_j \in L_1([0,1];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$, і регулярними крайовими умовами* (1.15), *утворює базис Рісса в просторі $L_2[0,1]$ у наступних випадках*: а) *n непарне*; б) *n парне і $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$. Існують такі диференціальні оператори L, породжені регулярними крайовими умовами, всі власні значення яких, за винятком скінченного числа, прості, а система кореневих функцій взагалі не є базисом в $L_2[0,1]$.*

Зауваження. Теорема 1.7 виконується й у випадку довільного проміжку $[a,b]$ замість $[0,1]$.

1.1.8. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків матричного диференціального рівняння з параметром. Для крайової задачі у просторі вектор-функцій відомі теореми, подібні до наведених вище.

Розглянемо матричне диференціальне рівняння вигляду

$$l(Y) \equiv Y^{(n)} + P_2Y^{(n-2)} + P_3Y^{(n-3)} + \ldots + P_nY = \lambda Y, \qquad (1.26)$$

де квадратні матриці-функції m-го порядку P_j є сумовними в інтервалі $[0,1]$.

Введемо заміну $\lambda = -\rho^n$ і розіб'ємо комплексну ρ-площину на $2n$ секторів вигляду (1.2). Аналогічно до пункту 1.1.1 будуються сектори $\mathcal{T}_q$. Для кожного сектора $\mathcal{T}_q$ можна так занумерувати всі корені n-го степеня з -1, щоб для них мав місце ланцюг нерівностей (1.4).

Теорема 1.8 ([76, с. 118–119]). *Матричне рівняння*

$$Y^{(n)} + P_2Y^{(n-2)} + P_3Y^{(n-3)} + \ldots + P_nY + \rho^nY = 0,$$

коефіцієнти якого є сумовними на $[0,1]$ *матрицями-функціями, в кожній області* $\mathcal{T}_q$ *комплексної* ρ*-площини має* n *лінійно незалежних розв'язків* Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n, *аналітичних відносно* $\rho \in \mathcal{T}_q$, *таких, що при* $\rho \in \mathcal{T}_q$, $|\rho|$ *достатньо великих, задовольняють співвідношення*

$$\frac{d^\nu Y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^\nu E_m + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

де E_m *– одинична матриця* m*-го порядку. При цьому* $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ *позначає матрицю вигляду* $\frac{A(x,\rho)}{\rho}$, *де* $A(x,\rho)$ *— матрична функція, всі елементи якої задовольняють умови вигляду* $|A_{ij}(x,\rho)| \leqslant M$ *для* $|\rho| \geqslant R$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *а* M *і* R *— деякі сталі, не залежні від* x.

1.1.9. Регулярні крайові умови у матричному випадку. Нормовані крайові умови для матричного диференціального рівняння (1.26) мають вигляд

$$\begin{gathered} U_\nu(Y) \equiv A_\nu Y^{(k_\nu)}(a) + B_\nu Y^{(k_\nu)}(b) + \\ + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1}\Big(A_{\nu j}Y^{(j)}(a) + B_{\nu j}Y^{(j)}(b)\Big) = 0, \qquad (1.27) \\ n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{s+2} < k_s, \end{gathered}$$

причому хоча б одна з матриць A_ν, B_ν, $\nu = \overline{1,n}$, відрізняється від нульової.

Розглянемо фіксовану область $\mathcal{S}_q$ і занумеруємо числа ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n так, щоб для $\rho \in \mathcal{S}_q$ мали місце нерівності (1.3).

Означення 1.7 ([76, с. 120–121]). У випадку непарного n ($n = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (1.27) називаються *регулярними*, якщо числа θ_0 і θ_m, що визначаються рівністю

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_m s^m =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1\omega_1^{k_1} & \cdots & A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1 + sB_1)\omega_\mu^{k_1} & B_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & B_1\omega_n^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} & \cdots & A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2 + sB_2)\omega_\mu^{k_2} & B_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & B_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n\omega_1^{k_n} & \cdots & A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n + sB_n)\omega_\mu^{k_n} & B_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & B_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \qquad (1.28)$$

відрізняються від нуля. У випадку парного n ($n = 2\mu$) нормовані крайові умови (1.27) називаються *регулярними*, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-m} і θ_m, що визначаються рівністю $\theta_{-m}s^{-m} + \theta_{-m+1}s^{-m+1} + \ldots + \theta_m s^m = D$, де визначник D відрізняється від детермінанта з (1.28) тим, що $(\mu+1)$-й блочний стовпець складається з елементів вигляду $\left(A_j + \frac{1}{s}B_j\right)\omega_{\mu+1}^{k_j}$.

1.1.10. Асимптотика власних значень у матричному випадку.

Теорема 1.9 ([76, с. 122–123]). *Нехай всі коефіцієнти матричного диференціального рівняння* (1.26) *є сумовними на* $[0,1]$ *матрицями-функціями* m*-го порядку, а крайові умови (1.27) — регулярні.*

Тоді для непарного n *кожному простому кореню рівняння* $\xi_j^{(1)}$

$$\theta_0 + \theta_1\xi + \ldots + \theta_m\xi^m = 0, \tag{1.29}$$

для області $\mathcal{S}_q$ *з непарним* q *і кожному простому кореню* $\xi_j^{(2)}$ *рівняння* (1.29) *у випадку сектора* $\mathcal{S}_q$ *з парним* q *відповідає послідовність власних значень крайової задачі* (1.26), (1.27) *відповідно* $\lambda_{kj}^{(1)}$ *і* $\lambda_{kj}^{(2)}$, *причому*

$$\begin{cases} \lambda_{kj}^{(1)} = (\mp 2k\pi i)^n\left[1 \mp \dfrac{n\ln_0\xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda_{kj}^{(2)} = (\pm 2k\pi i)^n\left[1 \pm \dfrac{n\ln_0\xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \end{cases} \quad k \to \infty. \tag{1.30}$$

Тут верхній знак відповідає $n = 4p-1$, *нижній —* $n = 4p+1$; *а* $\ln_0\xi$ *— деяке фіксоване значення натурального логарифма.*

У випадку r*-кратних коренів* $\xi_j^{(1)}$ *чи* $\xi_j^{(2)}$ *рівняння* (1.29) *має місце* r *послідовностей власних значень, що задовольняють асимптотичні формули*

$$\begin{cases} \lambda_{kj}^{(1)} = (\mp 2k\pi i)^n\left[1 \mp \dfrac{n\ln_0\xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right)\right], \\ \lambda_{kj}^{(2)} = (\pm 2k\pi i)^n\left[1 \pm \dfrac{n\ln_0\xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right)\right], \end{cases} \quad k \to \infty, \tag{1.31}$$
$$j = j_0, j_0+1, \ldots, j_0+r-1,$$

причому припускається, що $\xi_{j_0}^{(\nu)} = \cdots = \xi_{j_0+r-1}^{(\nu)}$. *Вибір знаку в* (1.31) *здійснюється за тим самим правилом, що і в формулі* (1.30).

Для парного n *кожному простому кореню рівняння*

$$\theta_{-m}\xi^{-m} + \theta_{-m+1}\xi^{-m+1} + \ldots + \theta_m\xi^m = 0 \tag{1.32}$$

для області $\mathcal{S}_0$ *відповідає послідовність власних значень*

$$\lambda_k = (2k\pi i)^n \left[1 \mp \frac{n \ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \;\; k \to \infty,$$

де верхній знак відповідає $n = 4q$, *а нижній —* $n = 4q + 2$. *Кожному* r*-кратному кореню* ξ *рівняння* (1.32) *відповідає* r *послідовностей власних значень*

$$\lambda_{kj} = (2k\pi i)^n \left[1 \mp \frac{n \ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right)\right], \;\; j = \overline{1, r}, \;\; k \to \infty \tag{1.33}$$

з вибором знаку за попереднім правилом.

У випадку кратного кореня ξ *деякі з* λ_{kj}, *відповідні цьому* ξ, *можуть співпасти, утворюючи одне кратне власне значення. Для* $|\lambda|$ *достатньо великих крайова задача* (1.26), (1.27) *не має жодних інших власних значень і кратність власного значення* λ_{kj} *дорівнює числу збіжних з ним власних значень у формулах* (1.31), (1.33), *а отже, не перевищує кратності відповідного кореня* ξ *рівняння* (1.29) *чи* (1.32).

1.1.11. Розвинення за власними функціями у векторному випадку.

Теорема 1.10 ([76, с. 129]). *Нехай* L *– диференціальний оператор, породжений векторним диференціальним виразом* $l(y)$, *коефіцієнтами якого є сумовні на* $[a, b]$ *матриці-функції, і регулярними крайовими умовами, відповідними матричним крайовим умовам* (1.27), $y(x)$ *–* m*-компонентний вектор-стовпець. Нехай всі власні значення оператора* L *є простими нулями функції*

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(Y_j)\right)_{\nu,j=1}^n .$$

Тоді кожна вектор-функція $\mathbf{f}(x)$ *з області визначення оператора* L *розвивається у рівномірно збіжний ряд за власними функціями*

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \mathbf{y}_\nu(x), \quad c_\nu = \int_a^b (\mathbf{f}(\xi), \mathbf{z}_\nu(\xi))\, d\xi.$$

При цьому круглі дужки позначають скалярний добуток вектор-функцій у просторі $\mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{y}_\nu(x) = \mathrm{colon}(y_{\nu 1}(x), y_{\nu 2}(x), \ldots, y_{\nu m}(x)),$$
$$\mathbf{z}_\nu(x) = \mathrm{colon}(z_{\nu 1}(x), z_{\nu 2}(x), \ldots, z_{\nu m}(x)), \; –$$

власні функції операторів L *і спряженого до нього* L^*, *відповідні власним значенням* λ_ν, $\bar{\lambda}_\nu$ *за додаткової умови нормованості*

$$\int_a^b (\mathbf{y}_\nu(x), \mathbf{z}_\nu(x))\, dx = 1.$$

1.2. Методика дослідження

1.2.1. Функції обмеженої варіації і міри.

Означення 1.8. Дійсна чи комплекснозначна скалярна функція $f(x)$, що визначена на скінченному проміжку $[a, b]$ дійсної осі, називається *функцією обмеженої варіації* на $[a, b]$, якщо вираз

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

допускає фіксовану верхню межу для всіх натуральних n і всіх розбиттів проміжку $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Найменша спільна верхня межа всіх таких виразів носить назву *повної варіації* функції $f(x)$ на $[a, b]$. Простір комплекснозначних функцій обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$ позначатимемо через $BV([a, b]; \mathbb{C})$. Дійсна чи комплекснозначна матриця-функція $F(x)$ має обмежену варіацію на проміжку $[a, b]$, якщо кожен елемент цієї матриці має обмежену варіацію на $[a, b]$.

Означення 1.9. Нехай I – відкритий інтервал дійсної осі. В теорії узагальнених функцій під *мірою* на I (узагальненою функцією нульового порядку) розуміють неперервний лінійний функціонал на просторі $D^0(I)$ неперервних фінітних функцій.

Міра Стільтьєса db, що визначається функцією $b \in BV_{loc}(I)$, є мірою саме у такому розумінні. Разом з тим за теоремою Рісса для будь-якої міри μ на I існує функція $b \in BV_{loc}(I)$, яка (при додатковому припущенні неперервності справа чи зліва) визначається однозначно з точністю до адитивної сталої, така, що має місце зображення

$$(\varphi, \mu) = \int\limits_I \varphi(t) db(t), \quad \varphi \in D^0(I).$$

Структуру міри $b' dt = db$ з'ясовує наступний результат:

Твердження 1.2 ([127, с. 161]). *Для того, щоб узагальнена похідна b' деякої функції $b(x)$ була мірою на I необхідно і достатньо, щоб $b \in BV_{loc}(I)$. Якщо ця умова виконується, то похідна b' є мірою Стільтьєса db, що визначається функцією $b(x)$; при цьому $b(x)$ неперервна в точці $x_0 \in I$ тоді і тільки тоді, коли db-міра точки x_0 дорівнює нулеві.*

Таким чином, функція Дірака $\delta(x - x_0)$ з носієм у точці $x_0 \in I$ є узагальненою похідною від зміщеної функції Хевісайда $\eta(x - x_0)$ (а, значить, мірою на I) та діє за правилом

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\eta'(x - x_0), \varphi(x)) = \int\limits_I \varphi(x) d\eta(x - x_0) = \varphi(x_0),$$
$$\varphi \in D^0(I).$$

При дослідженні диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами і правими частинами однією з найважливіших є проблема множення узагальнених функцій, зокрема мір, на розривні, в тому числі, функції локально обмеженої варіації.

Нехай $D(I)$ – клас фінітних на I функцій, функції $f, g \in \in BV^+_{loc}(I)$, а δ_n – деяка δ-послідовність, тобто послідовність гладких функцій, невід'ємних при $|x| < \alpha_n$ і рівних нулю в решті точок, причому $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1.$$

Відповідно до секвенціального підходу [2], добуток $f'(x) \cdot g(x)$ визначається як слабка границя:

$$f'(x) \cdot g(x) \equiv (f' \cdot g, \varphi) = \lim_{n\to\infty} ((f'(x) * \delta_n) \cdot (g(x) * \delta_n), \varphi),$$
$$\varphi \in D(I).$$

В загальному випадку (без додаткових умов на функції f і g) цей добуток не існує (неоднозначно визначений, некоректний), бо його значення залежать від вибору послідовності δ_n. Однак, справджується наступний результат:

Твердження 1.3 ([114, с. 5, 124, с. 68]). *Якщо* $F, G \in \in BV^+_{loc}(I; \mathbb{C}^{p\times p})$, *то добуток* $F'(x) \cdot G(x)$ *існує на* I *тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\Delta F(x_s) \cdot \Delta G(x_s) = 0, \quad \forall x_s \in I. \tag{1.34}$$

За цієї умови добуток $F' \cdot G$ називають *коректним* у сенсі теорії узагальнених функцій (надалі просто – коректним). У скалярному випадку умова (1.34) означає просто незбіг точок розриву функцій $F(x)$ і $G(x)$. Якщо ж $F(x)$ і $G(x)$ – матриці-функції, то, зрозуміло, що їх елементи можуть мати і спільні точки розриву.

1.2.2. Некласичний інтеграл Рімана-Стільтьєса, умови коректності та еволюційний оператор. У монографії [4, с. 412–415] для функцій $F, G \in BV^+([a, b]; \mathbb{C}^{p\times p})$ на проміжку

$[a, b]$ вводиться спеціальне означення матричного інтеграла (тобто набору скалярних інтегралів) Рімана-Стільтьєса:

$$\int_a^b dG(x)F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [G(x_{i+1}) - G(x_i)]F(x_i), \tag{1.35}$$

де границя, як звичайно, береться за умови, коли $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i) \to 0$. Ця границя не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на частинки: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Однак, принциповим є те, що значення функції $F(x)$ беруться на лівому кінці відрізка $[x_i, x_{i+1}]$. Якщо ж ці значення брати, наприклад, на правому кінці чи посередині проміжку, то границя у правій частині рівності (1.35) може виявитись іншою або й зовсім не існувати.

У роботах [114, 124] пропонується інше, еквівалентне (1.35), означення інтеграла, яке не ґрунтується на понятті інтегральної суми:

$$\int_a^b dG(x)F(x) \stackrel{def}{=} \int_a^b dG_c(x)F(x) + \\ + \sum_{a\leqslant x\leqslant b} [G(x) - G(x-0)]F(x-0), \tag{1.36}$$

де $G_c(x)$ – неперервна частина функції $G(x)$ (будь-яку функцію обмеженої варіації можна подати у вигляді суми її неперервної частини і функції стрибків).

Визначений формулою (1.35) або (1.36) інтеграл, що є модифікацією класичного інтеграла Рімана-Стільтьєса, називають ще *некласичним* інтегралом Рімана-Стільтьєса. Відзначимо, що він не збігається з означенням інтеграла, запропонованого в роботі Т. Гільдебрандта [148]. Обидва інтеграли відрізняються значеннями в точках розривів функцій $F(x)$ і $G(x)$. Введення цього інтеграла у згаданих роботах пов'язане з необхідністю дослідження матричних інтегральних рівнянь.

У роботах [104, 114, 124] досліджується узагальнена неоднорідна система диференціальних рівнянь у векторно-матричному записі
$$Y' = C'(x) \cdot Y + F'(x), \tag{1.37}$$
де $Y : [a,b] \to \mathbb{C}^p$ – невідома вектор-функція, матриця $C \in$ $\in BV^+([a,b];\mathbb{C}^{p\times p})$, вектор $F \in BV^+([a,b];\mathbb{C}^p)$.

Означення 1.10. Під *розв'язком* рівняння (1.37) розуміють вектор-функцію $Y(x)$ з класу
$$\mathfrak{D}_k = \big\{Z \in BV^+([a,b];\mathbb{C}^p) : \Delta C(x) \cdot \Delta Z(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]\big\},$$
що задовольняє його в узагальненому сенсі, тобто, диференціювання і рівність у рівнянні (1.37) слід розуміти у сенсі теорії узагальнених функцій:
$$\big(Y', \Phi\big) = \big(C'Y + F', \Phi\big),$$
де Φ – p-компонентний вектор, складений з неперервних фінітних функцій.

В класі $\mathfrak{D}_k$ система (1.37) з початковою умовою $Y(x_0) = Y_0$, $x_0 \in [a,b]$, є еквівалентною до інтегрального рівняння
$$Y(x) = Y_0 + \int_a^b dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0)$$
з класичним інтегралом Рімана-Стільтьєса ([114, с. 7, 124, с. 71]). Для існування та єдиності розв'язку цього рівняння, а отже, й розв'язку початкової задачі необхідно і достатньо виконання умов [124, с. 72–73]:
$$[\Delta C(x)]^2 = 0, \quad \Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]. \tag{1.38}$$

Означення 1.11. За виконання умов (1.38) диференціальну систему (1.37) називають *коректною*.

Надалі ми розглядатимемо лише коректні системи. Відзначимо також, що розриви функцій $C(x)$ і $F(x)$ породжують розриви розв'язку $Y(x)$ цієї системи за формулою

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x) + \Delta F(x). \tag{1.39}$$

Означення 1.12. *Еволюційним оператором* (*фундаментальною матрицею*) однорідної диференціальної системи

$$Y' = C'(x) Y, \tag{1.40}$$

називають матрицю-функцію $B(x, \alpha)$, що за змінною x задовольняє цю систему і початкову умову $B(\alpha, \alpha) = E$, $\alpha \in [a, b]$.

У монографії неодноразово використовується наступна формула [114, 124, с. 75], яка пов'язує між собою розв'язки однорідної і неоднорідної диференціальних систем (1.40) і (1.37),

$$Y(x) = B(x, a) Y(a) + \int\limits_a^x B(x, \xi) dF(\xi). \tag{1.41}$$

Фундаментальна матриця, зокрема, має властивість гармонійності [114, с. 6, 124, с. 57]: $\forall x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \in [a, b]$

$$B(x_3, x_1) = B(x_3, x_2) B(x_2, x_1). \tag{1.42}$$

Крім того, згідно з [114, с. 8, 124, с. 57], внаслідок виконання умов (1.38)

$$B(x, s) = [E + \Delta C(x)]\, B(x - 0, s). \tag{1.43}$$

2

СКАЛЯРНА СИНГУЛЯРНА КРАЙОВА ЗАДАЧА

2.1. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [67].

2.1.1. Квазідиференціальне рівняння і квазіпохідні. Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij} y^{(n-i)} \right)^{(m-j)}, \tag{2.1}$$

де $m,\ n \in \mathbb{N}$, $a_{00} \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $a_{00}(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $a_{i0},\ a_{0j} \in \in L_2([a,b];\mathbb{C})$, $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{1,n}$, $j = = \overline{1,m}$ (тут штрихом позначено узагальнене диференціювання). Таким чином, a_{ij} – міри, тобто узагальнені функції нульового порядку.

Означення 2.1. *Квазіпохідними* функції $y(x)$, що відповідають квазідиференціальному виразу $L_{mn}(y)$, будемо називати функції $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0, n+m}$, які визначаються формулами:

$$\begin{cases} y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i0} y^{(n-i)}; \\ y^{[n+k]} = -\left(y^{[n+k-1]} \right)' + \sum\limits_{i=0}^{n} a_{ik} y^{(n-i)}, \quad k = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що $y^{[n+m]} \equiv L_{mn}(y)$.

Поставимо тепер наступну початкову задачу:

$$L_{mn}(y) = \lambda \sigma(x) y, \tag{2.3}$$

$$y^{[\nu]}(a) = \tilde{c}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, n+m-1}, \tag{2.4}$$

де $\sigma \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $\sigma(x) \neq 0$ на $[a,b]$, λ – комплексний параметр. Нехай $r = n+m$. За допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}\left(y, y^{[1]}, \dots, y^{[r-1]}\right)$ рівняння (2.3) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'(x)Y, \tag{2.5}$$

а умови (2.4) набувають вигляду

$$Y(a) = \tilde{C}, \tag{2.6}$$

де $\tilde{C} = \operatorname{colon}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_r)$, $C'(x)$ – матриця-міра r-го порядку з ненульовими елементами в лівому нижньому блоці розміру $(n+1)\times(m+1)$ і на головній наддіагоналі

$$C'(x) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n0} & A_{n-1,0} & \cdots & A_{10} & a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n1} & A_{n-1,1} & \cdots & A_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{n,m-1} & A_{n-1,m-1} & \cdots & A_{1,m-1} & a_{0,m-1}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & -1 \\ A_{nm}-\lambda\sigma & A_{n-1,m} & \cdots & A_{1m} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

а

$$A_{i0} = -a_{00}^{-1}a_{i0}, \quad A_{ij} = a_{ij} - a_{0j}a_{00}^{-1}a_{i0}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.8}$$

Очевидно, що

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta b_{n1} & \cdots & \Delta b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta b_{nm} & \cdots & \Delta b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, внаслідок рівності $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$, система (2.5) – коректна (див. пункт 1.2.2 і [104]).

Означення 2.2. Квазідиференціальне рівняння називатимемо *коректним*, якщо буде коректною відповідна йому система.

Означення 2.3. Під *розв'язком* квазідиференціального рівняння будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ системи (2.5), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Фактично, квазіпохідні – це компоненти вектора, за допомогою якого відбувається зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Твердження 2.1 ([114, с. 13, 124, с. 85]). *Існує єдиний розв'язок $y(x)$ початкової задачі (2.3), (2.4) такий, що $y^{[k]} \in$ $\in AC\left([a,b];\mathbb{C}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, $y^{[n+\nu]} \in BV^{+}\left([a,b];\mathbb{C}\right)$, $\nu = \overline{0, m-1}$ і в точках $x_s \in [a,b]$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta y^{[n+\nu]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i,\nu+1}(x_s) y^{[i]}(x_s), \quad \nu = \overline{0, m-1}. \tag{2.9}$$

2.1.2. Спряжені квазіпохідні і функція Коші. Система, спряжена до системи (2.5) має вигляд ([124, с. 82])

$$Z' = -\left(C^*(x)\right)' Z, \tag{2.10}$$

де $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{r-1\}}, \ldots, z^{\{1\}}, z\right)$. Фігурними дужками тут позначено квазіпохідні в сенсі спряженого до (2.3) рівняння. $C^*(x)$ – це матриця, ермітово спряжена до матриці $C(x)$. З (2.10) безпосередньо видно структуру спряженого рівняння і квазіпохідних у сенсі останнього.

Означення 2.4. *Спряженим* до (2.3) називається квазідиференціальне рівняння

$$L^*_{mn}(z) \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \Big(\bar{a}_{ij}(x) z^{(m-j)} \Big)^{(n-i)} = \bar{\lambda} \sigma(x) z, \tag{2.11}$$

де $\bar{a}_{ij}(x) = \left(\bar{b}_{ij}(x)\right)' \quad \forall i, j \geqslant 1$.

Означення 2.5. *Квазіпохідними* виразу $L^*_{mn}(z)$ (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (2.11)) називаються функції $z^{\{i\}}(x)$, $i = \overline{0, r}$, що визначаються формулами

$$\begin{cases} z^{\{k\}} = z^{(k)}, \quad k = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum\limits_{j=0}^{m} \bar{a}_{0j} z^{(m-j)}; \\ z^{\{m+k\}} = -\left(z^{\{m+k-1\}}\right)' - \sum\limits_{j=0}^{m} \bar{a}_{kj} z^{(m-j)}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.12}$$

При цьому, очевидно, $z^{\{r\}} \equiv L^*_{mn}(z)$.

Розглянемо тепер рівняння (2.11) з початковими умовами

$$z^{\{\nu\}}(a) = z_0^{\{\nu\}}, \quad \nu = \overline{0, r-1}. \tag{2.13}$$

Твердження 2.2 ([114, с. 14, 124, с. 91]). *Існує єдиний розв'язок задачі (2.11), (2.13) такий, що $z^{\{k\}} \in AC\left([a,b];\mathbb{C}\right)$, $k = \overline{0, m-1}$, а $z^{\{m+\nu\}} \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, і в точках $x_s \in [a,b]$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{m+\nu\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \bar{b}_{\nu+1, m-j}(x_s) z^{\{j\}}(x_s), \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{2.14}$$

Означення 2.6. Функція $K(x,t) = K(x,t,\lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (2.3), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a,b]$ задовольняє початкові умови $K^{[i]}(t,t) = 0$ $(i = \overline{0, r-2})$, $K^{[r-1]}(t,t) = 1$.

Означення 2.7. Нехай $f(x,\alpha)$ – достатньо гладка комплекснозначна функція двох дійсних змінних. Вираз $f^{\{j\}[i]}(x,\alpha)$ називатимемо *змішаною квазіпохідною* порядку $i+j$, якщо спочатку береться i-та квазіпохідна по x в сенсі вихідного квазідиференціального рівняння, а потім від отриманого результату – j-та квазіпохідна по α в сенсі спряженого рівняння.

Твердження 2.3 ([114, с. 15, 124, с. 102]). *Якщо $K(x,\alpha)$ – функція Коші квазідиференціального рівняння, то*

$K^{\{j\}[i]}(x,\alpha) = K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$ $\forall i,j = \overline{0, r-1}$, *тобто в цьому випадку результат не залежить від порядку «змішаного квазідиференціювання».*

Означення 2.8. Функція $\hat{K}(x,t) = \hat{K}(x,t,\lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (2.11), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a,b]$ задовольняє початкові умови $\hat{K}_x^{\{i\}}(t,t) = 0$ $(i = \overline{0, r-2})$, $\hat{K}_x^{\{r-1\}}(t,t) = 1$.

Твердження 2.4 ([114, с. 16, 124, с. 105]). *Для функцій Коші спряжених квазідиференціальних рівнянь справджується тотожність*

$$\hat{K}(x,t) \equiv \overline{K(t,x)}. \tag{2.15}$$

2.1.3. Асимптотика розв'язків рівняння без мір. Векторне рівняння (2.5) можна подати у вигляді

$$Y' = \Phi' Y + \Psi' Y, \tag{2.16}$$

де

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} & & & \\ & & & & a_{01}a_{00}^{-1} & -1 & & \\ & & \mathbf{0} & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ -\lambda\sigma & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{00}^{-1}a_{n0} & \cdots & -a_{00}^{-1}a_{20} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n1} & \cdots & A_{21} & A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{n2} & \cdots & A_{22} & A_{12} & a_{02}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{nm} & \cdots & A_{2m} & A_{1m} & a_{0m}a_{00}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

а A_{ij} визначаються формулами (2.8). Тоді система

$$Y' = \Phi' Y \tag{2.18}$$

буде еквівалентною до рівняння

$$(-1)^m \left[\left(a_{00} y^{(n)}\right)^{(m)} + \left(a_{10} y^{(n-1)}\right)^{(m)} - \right.$$
$$\left. - \left(a_{01} y^{(n)}\right)^{(m-1)} - \left(a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} y^{(n-1)}\right)^{(m-1)} \right] = \lambda \sigma y. \tag{2.19}$$

Зі структури матриці $\Phi'(x)$ і системи (2.18), де

$$Y = \mathrm{colon}\Big(y, y^{[1]}, \dots, y^{[r-1]}\Big), \tag{2.20}$$

можна безпосередньо визначити квазіпохідні в сенсі рівняння (2.19):

$$\begin{cases} y^{[k]} = y^{(k)}, \;\; k = \overline{0, n-1}; \;\; y^{[n]} = a_{00} y^{(n)} + a_{10} y^{(n-1)}; \\ y^{[n+1]} = -\left(y^{[n]}\right)' + a_{01} y^{(n)} + a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} y^{(n-1)}; \\ y^{[n+k]} = -\left(y^{[n+k-1]}\right)', \;\; k = \overline{2, m-1}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Введемо тепер квазіпохідні (позначатимемо їх кутовими дужками) іншим способом, так, як це робиться в роботах [88, 131]. Тоді рівняння (2.19) запишеться у вигляді

$$y^{<r>} = \tilde{\lambda} y, \tag{2.22}$$

де $\tilde{\lambda} = i^r \lambda$, а квазіпохідні визначаються формулами

$$\begin{cases} y^{<0>} = y; \;\; y^{<k>} = i\left(y^{<k-1>}\right)', \;\; k = \overline{1, n-1}; \\ y^{<n>} = i\, p_{nn}\left(y^{<n-1>}\right)' + p_{n,n-1} y^{<n-1>}; \\ y^{<n+1>} = i\,(y^{<n>})' + p_{n+1,n} y^{<n>}; \\ y^{<n+k>} = i\left(y^{<n+k-1>}\right)', \;\; k = \overline{2, m-1}; \\ y^{<r>} = i\, p_{rr}\left(y^{<r-1>}\right)', \end{cases} \tag{2.23}$$

де

$$p_{nn}(x) = a_{00}(x), \quad p_{n,n-1}(x) = i\, a_{10}(x),$$
$$p_{n+1,n}(x) = -i\, a_{01}(x) a_{00}^{-1}(x), \quad p_{rr}(x) = (-1)^m \sigma^{-1}(x).$$

Для того щоб переконатись в еквівалентності рівнянь (2.19) і (2.22), достатньо підставити квазіпохідні (2.23) в рівняння (2.22).

Введемо тепер для спрощення викладу заміну

$$\lambda = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r. \tag{2.24}$$

Розіб'ємо комплексну ρ-площину на $2r$ секторів $\mathcal{S}_q$, $q = \overline{0, 2r-1}$, де $\mathcal{S}_q = \{\rho : q\pi/r \leqslant \arg\rho \leqslant (q+1)\pi/r\}$. Через $\mathcal{T}_q$ позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з $\mathcal{S}_q$ шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$. Області $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ називатимемо просто областями $\mathcal{S}$ і $\mathcal{T}$.

Нехай $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ – всі різні корені r-го степеня з -1. Має місце наступна властивість коренів r-го степеня з -1.

Твердження 2.5 ([76, с. 53–54]). *Для кожного сектора $\mathcal{T}_q$ існує таке розташування чисел $\omega_1 = \omega_1(q)$, $\omega_2 = \omega_2(q)$, …, $\omega_r = \omega_r(q)$, що для всіх $\rho \in \mathcal{T}_q$ виконуються нерівності*

$$\operatorname{Re}((\rho + c)\omega_1) \leqslant \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}((\rho + c)\omega_r). \tag{2.25}$$

Оскільки

$$p_{nn}, p_{rr} \in W_1^1([a,b];\mathbb{R}), \quad p_{n,n-1}, p_{n+1,n} \in L_2([a,b];\mathbb{C}),$$
$$p_{nn}(x) \neq 0, \quad p_{rr}(x) \neq 0, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то виконуються всі умови теореми 1.3 (теореми 2 з [88]) і в кожній області $\mathcal{T}_q$ комплексної ρ-площини рівняння (2.22) має r лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, …, y_r, регулярних по $\rho \in \mathcal{T}_q$ для достатньо великих $|\rho|$, які мають для $k = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, r-1}$ асимптотику для $|\rho| \to \infty$ вигляду

$$y_k^{<\nu>}(x, \rho) = R_\nu(x)(i\rho\omega_k t'(x))^\nu \hat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)} (1 + o(1)), \tag{2.26}$$

де

$$R_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = \overline{0, n-1}, \\ a_{00}(x), & \nu = \overline{n, r-1}, \end{cases}$$

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[r]{\left|\frac{\sigma(\xi)}{a_{00}(\xi)}\right|} d\xi, \tag{2.27}$$

$$\hat{E}(x) = \left|\frac{a_{00}(x)}{\sigma(x)}\right|^{\frac{r-1}{2r}} |a_{00}(x)|^{-\frac{m}{r}} e^{-\frac{1}{r}\int_a^x \frac{a_{10}(\zeta)-a_{01}(\zeta)}{a_{00}(\zeta)} d\zeta}. \tag{2.28}$$

Тут під $o(1)$ розуміється така функція $f(x, \rho)$, що для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує достатньо велике $N > 0$, що для $|\rho| > N$, $x \in [a, b]$, має місце нерівність $|f(x, \rho)| < \varepsilon$.

З формул (2.21) і (2.23) видно, що $y^{<k>} = i^k y^{[k]}$, $k = \overline{0, n}$, $y^{<k>} = i^k (-1)^{k-n} y^{[k]}$, $k = \overline{n+1, r}$. Отже, у всій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини рівняння (2.19) має r лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, …, y_r, регулярних по $\rho \in \mathcal{T}$, і таких, що для досить великого $|\rho|$ задовольняють співвідношення ($k = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, r-1}$)

$$y_k^{[\nu]}(x, \rho) = \hat{R}_\nu(x)(\rho\omega_k t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)} \hat{E}(x) \left[1 + o(1)\right], \tag{2.29}$$

де

$$\hat{R}_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = \overline{0, n-1}, \\ (-1)^{\nu-n} a_{00}(x), & \nu = \overline{n, r-1}, \end{cases} \tag{2.30}$$

а $t(x)$ і $\hat{E}(x)$ визначаються так само, як і вище.

2.1.4. Оцінка квазіпохідних функції Коші. Наведемо тут у зв'язку з важкодоступністю джерел одну властивість [140], яка знадобиться у подальшому.

Лема 1. Для коренів r-го степеня з -1 мають місце рівності

$$\omega_1^\nu + \omega_2^\nu + \ldots + \omega_r^\nu = 0, \quad \nu = \overline{1, r-1}. \tag{2.31}$$

Доведення. Числа ω_1, ω_2, …, ω_r – рівновіддалені одна від одної точки на одиничному колі з центром у початку координат комплексної площини. Занумеруємо їх так:

$$\omega_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{r}}, \quad k = \overline{1,r}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Комплексним числам можна поставити у відповідність вектори з кінцями у цих точках комплексної площини і початками у початку координат. Зафіксуємо один з цих векторів (наприклад ω_1), сумістимо початок наступного вектора (відповідного числу ω_2) з кінцем попереднього і так далі. Утвориться правильний r-кутник, причому останній вектор закінчиться в початку координат. Отже, $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_r = 0$.

Числа ω_k^ν мають вигляд $\omega_k^\nu = e^{\nu i\frac{\pi+2\pi k}{r}}$. Зрозуміло, що в деяких випадках окремі з цих чисел можуть співпасти, але всі вони так само лежатимуть на одиничному колі з центром у початку координат. Аналогічно, як вище, суміщенням початків наступних векторів з кінцями попередніх, отримаємо многокутник, який означатиме рівність (2.31). Лему доведено.

Нехай $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.19). Квадратні дужки у формулах (2.21) і нижче позначають квазіпохідні в сенсі рівняння (2.19) за першою змінною. За допомогою фігурних дужок ми позначатимемо квазіпохідні в сенсі спряженого до (2.19) рівняння, їх можна відчитати з відповідної йому спряженої системи $Z' = -(\Phi^*(x))'Z$, де $Z = \mathrm{colon}(z^{\{r-1\}}, z^{\{r-2\}}, \ldots, z)$. Зі структури матриці $\Phi'(x)$ зрозуміло, що

$$\begin{cases} z^{\{k\}} = z^{(k)}, \;\; k = \overline{0, m-1}; \;\; z^{\{m\}} = -a_{00}z^{(m)} - \bar{a}_{01}z^{(m-1)}; \\ z^{\{m+1\}} = -(z^{\{m\}})' - \bar{a}_{10}z^{(m)} - \bar{a}_{01}a_{00}^{-1}\bar{a}_{10}z^{(m-1)}; \\ z^{\{m+k\}} = -(z^{\{m+k-1\}})', \;\; k = \overline{2, n-1}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Від функції Коші квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння братимуться за другою змінною. Мішані квазіпохідні функції Коші $K^{[i]\{j\}}(x,z)$ $(i,j = \overline{0, r-1})$ можна подати (див. [121, 124, с. 107]) у вигляді

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\frac{1}{W(z)}\begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-j-2]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j-2]}(z)\\ y_1^{[i]}(x) & \cdots & y_r^{[i]}(x)\\ y_1^{[r-j]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j]}(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-1]}(z) & \cdots & y_r^{[r-1]}(z)\end{vmatrix}, \qquad (2.33)$$

де

$$W(z)=\begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{[r-1]}(z) & \cdots & y_r^{[r-1]}(z)\end{vmatrix}, \qquad (2.34)$$

а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r$ – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (2.19), асимптотична поведінка якої для великих значень параметра $|\rho|$ подається формулами (2.29). Підставивши (2.29) в (2.33), (2.34), можна помітити, що з усіх рядків, крім $(r-j)$-го, обидвох визначників виносяться і скорочуються вирази

$$\hat{R}_\nu(z)(\rho t'(z))^\nu \hat{E}(z) \qquad (\nu=\overline{0,r-1}, \quad \nu\neq r-j-1),$$

а з усіх стовпців обидвох визначників виносяться і скорочуються вирази

$$e^{\rho\omega_1 t(z)},\ \ e^{\rho\omega_2 t(z)},\ \ \ldots,\ \ e^{\rho\omega_r t(z)}.$$

Тепер, розписавши чисельник за елементами $(r-j)$-го рядка, отримаємо для великих значень параметра $|\rho|$

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\rho^{i+j+1-r}Q_{ij}(x,z)\sum_{k=1}^{r}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}\langle\frac{\gamma_{kj}}{\gamma}\rangle_z\langle\omega_k^i\rangle_x, \qquad (2.35)$$

де

$$Q_{ij}(x,z)=\hat{R}_i(x)\hat{R}_{r-j-1}^{-1}(z)(t'(x))^i(t'(z))^{1+j-r}\hat{E}(x)\hat{E}^{-1}(z); \quad (2.36)$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{r-1} & \omega_2^{r-1} & \cdots & \omega_r^{r-1} \end{vmatrix},$$

а γ_{kj} – алгебричні доповнення елементу ω_k^{r-j-1} у визначнику γ, $\gamma \neq 0$ як визначник Вандермонда.

Тут і нижче $\langle\alpha\rangle_x = \alpha(1 + o(1))$ при $|\rho| \to \infty$, тобто $\langle\alpha\rangle_x = \alpha(1 + f(x,\rho))$, причому $\forall\varepsilon > 0$ достатньо малого $\exists N > 0$ таке, що для $|\rho| > N$ і $x \in [a,b]$ $|f(x,\rho)| \leqslant \varepsilon$.

Нехай $M_{kj} = \dfrac{\gamma_{kj}}{\gamma_{k0}}$, тобто $\gamma_{kj} = M_{kj}\gamma_{k0}$, $j = \overline{0, r-1}$. Врахувавши, що для функції Коші $K^{[i]}(z,z) = 0$, $i = \overline{0, r-2}$, $K^{[r-1]}(z,z) = 1$, а $Q_{r-1,0}(z,z) = 1$, $M_{k0} = 1$, розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих γ_{k0}

$$\sum_{k=1}^{r} \omega_k^i \frac{\gamma_{k0}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, r-2}, \\ 1, & i = r-1. \end{cases} \tag{2.37}$$

Система (2.37) має єдиний розв'язок, бо її визначник $\dfrac{\gamma}{\gamma} = 1$; з іншого боку, вона задовольняється для $\dfrac{\gamma_{k0}}{\gamma} = -\dfrac{\omega_k}{r}$, оскільки $\omega_k^r = -1$ і $\omega_1^{i+1} + \omega_2^{i+1} + \ldots + \omega_r^{i+1} = 0$ за лемою 1. Отже, формула (2.35) набуває вигляду $(i, j = \overline{0, r-1})$

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = -\frac{Q_{ij}(x,z)}{r\rho^{r-1-i-j}} \sum_{k=1}^{r} M_{kj} e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))} \omega_k^{i+1} \langle 1\rangle_x^k \langle 1\rangle_z^k. \tag{2.38}$$

2.1.5. Перехід до рівняння з мірами. Ми будемо шукати асимптотику фундаментальної системи розв'язків за допомогою узагальнення методу [172]. Якщо праву частину рівності

$$Y' - \Phi' Y = \Psi' Y$$

розглядати як «неоднорідність», то згідно з формулою для неоднорідного рівняння (1.41)

$$Y(x)=B(x,a)Y(a)+\int\limits_a^x B(x,\xi)d\Psi(\xi)Y(\xi), \tag{2.39}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця однорідної системи (2.18); вона має структуру (див. [112, 124, с. 103])

$$B(x,\xi)=\begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}}(x,\xi) & K(x,\xi) \\ K^{[1]\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{[1]\{1\}}(x,\xi) & K^{[1]}(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{[r-1]\{1\}}(x,\xi) & K^{[r-1]}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

де $K(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (2.19), квадратні дужки позначають квазіпохідні (2.21) в сенсі рівняння (2.19), а фігурні – квазіпохідні (2.32) в сенсі рівняння, спряженого до (2.19). Підставивши (2.6), (2.17), (2.20) і (2.40) в (2.39), отримаємо

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ \cdots \\ y^{[r-1]}(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,a) & \cdots & K(x,a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,a) & \cdots & K^{[r-1]}(x,a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde c_1 \\ \cdots \\ \tilde c_r \end{pmatrix}+$$

$$+\int\limits_a^x \begin{pmatrix} K^{\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{[r-1]\{r-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{[r-1]}(x,\xi) \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -\sum\limits_{s=2}^{n} a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)d\xi \\ \sum\limits_{s=1}^{n}\big(db_{s1}(\xi)-a_{01}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)d\xi\big)y^{(n-s)}(\xi) \\ \sum\limits_{s=1}^{n}\big(db_{s2}(\xi)-a_{02}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)d\xi\big)y^{(n-s)}(\xi)+\mathcal{A}_2(\xi)d\xi \\ \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{n}\big(db_{sm}(\xi)-a_{0m}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)d\xi\big)y^{(n-s)}(\xi)+\mathcal{A}_m(\xi)d\xi \end{pmatrix},$$

де останній стовпець містить нульові елементи лише в перших $n-1$ рядках, а $\mathcal{A}_j(\xi) = a_{0j}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)y^{[n]}(\xi)$, $j = \overline{2,m}$. Звідси випливає система інтегро-квазідиференціальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
y^{[\nu]}(x) = \sum_{s=1}^{r} \tilde{c}_s K^{[\nu]\{r-s\}}(x,a) - \\
- \sum_{s=2}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m\}}(x,\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi + \\
+ \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) y^{(n-s)}(\xi) db_{sp}(\xi) - \\
- \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi + \\
+ \sum_{p=2}^{m} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) y^{[n]}(\xi) d\xi, \quad \nu = \overline{0, r-1}.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Тут $y(x)$ – розв'язок рівняння (2.3) або, що те саме, врахувавши (2.24), рівняння

$$
L_{mn}(y) = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma) \rho^r \sigma(x) y. \tag{2.42}
$$

Підставивши (2.38) в (2.41) і замінивши індекс k на j, отримаємо

$$
\begin{aligned}
y^{[\nu]}(x) = - \sum_{s=1}^{r} \tilde{c}_s \frac{Q_{\nu,r-s}(x,a)}{r\rho^{s-\nu-1}} \sum_{j=1}^{r} M_{j,r-s} e^{\rho\omega_j t(x)} \omega_j^{\nu+1} \langle 1 \rangle_x^j \langle 1 \rangle^j + \\
+ \Omega_\nu(x), \quad \nu = \overline{0, r-1},
\end{aligned}
$$

де

$$\Omega_\nu(x) = \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \frac{Q_{\nu m}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m}} \sum_{j=1}^{r} M_{jm} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1} \times$$
$$\times \langle 1\rangle_x^j \langle 1\rangle_\xi^j a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi -$$
$$- \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^x \frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}} \sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1} \times$$
$$\times \langle 1\rangle_x^j \langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi) db_{sp}(\xi) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^x \frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}} \sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1} \times$$
$$\times \langle 1\rangle_x^j \langle 1\rangle_\xi^j a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi -$$
$$- \sum_{p=2}^{m} \int_a^x \frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}} \sum_{j=1}^{r} M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1} \langle 1\rangle_x^j \langle 1\rangle_\xi^j \times$$
$$\times a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) y^{[n]}(\xi) d\xi.$$

Виберемо c_j так, щоб для $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{j=1}^{r} \hat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu \omega_j^\nu c_j \hat{E}(x) e^{\rho\omega_j t(x)} \langle 1\rangle_x^j + \Omega_\nu(x). \quad (2.43)$$

Тоді для c_j справджується система ($j = \overline{1,r}$)

$$- \sum_{s=1}^{r} \tilde{c}_s \hat{R}_{s-1}^{-1}(a) \frac{(t'(a))^{1-s}}{r\rho^{s-1}} \hat{E}^{-1}(a) M_{j,r-s} \omega_j \langle 1\rangle^j = c_j. \quad (2.44)$$

Покладемо для деякого фіксованого k, $k = \overline{1,r}$,

$$\hat{c}_j = c_j \quad \text{для} \ \ j = \overline{1,k}, \quad (2.45)$$

$$
\begin{gathered}
\hat{c}_j = c_j - \sum_{s=2}^{n} \frac{M_{jm}}{r\rho^{n-1}} \int\limits_a^b \frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j \langle 1\rangle_\xi^j\, a_{s0}(\xi)}{\hat{E}(\xi)\, a_{00}^2(\xi)\, (t'(\xi))^{n-1}}\, y^{(n-s)}(\xi)d\xi + \\
+ \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^p M_{j,m-p}}{r\rho^{n+p-1}} \left[\int\limits_a^b \frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j \langle 1\rangle_\xi^j\, y^{(n-s)}(\xi)}{\hat{E}(\xi)\, a_{00}(\xi)\, (t'(\xi))^{n+p-1}}\, db_{sp}(\xi) - \right. \\
\left. - \int\limits_a^b \frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j \langle 1\rangle_\xi^j}{\hat{E}(\xi)\, a_{00}^2(\xi)\, (t'(\xi))^{n+p-1}}\, a_{0p}(\xi)\, a_{s0}(\xi)\, y^{(n-s)}(\xi)d\xi \right] + \\
+ \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^p}{r\rho^{n+p-1}} M_{j,m-p} \int\limits_a^b \frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)} a_{0p}(\xi)\,\omega_j}{\hat{E}(\xi)\, a_{00}^2(\xi)\, (t'(\xi))^{n+p-1}} \langle 1\rangle_\xi^j\, y^{[n]}(\xi)d\xi \\
\text{для } j = \overline{k+1, r}.
\end{gathered} \tag{2.46}
$$

Внаслідок того, що для $p \geqslant 1$

$$
\begin{gathered}
Q_{\nu,m-p}(x,\xi) = \hat{R}_\nu(x)(-1)^{p-1} a_{00}^{-1}(\xi)(t'(x))^\nu (t'(\xi))^{1-n-p} \times \\
\times \hat{E}(x)\hat{E}^{-1}(\xi), \qquad \nu = \overline{0, r-1},
\end{gathered}
$$

ввівши позначення

$$
\begin{gathered}
K_{1\nu p}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=1}^{k} \rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi) M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j (t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}, \\
K_{2\nu p}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=k+1}^{r} \rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi) M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j (t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}, \\
\nu = \overline{0, r-1}, \quad p = \overline{0, m},
\end{gathered}
$$

і підставивши (2.45), (2.46) в (2.43), отримаємо

$$
\begin{gathered}
y^{[\nu]}(x) = \hat{R}_\nu(x) \sum_{j=1}^{r} (\rho\omega_j t'(x))^\nu \langle \hat{c}_j\rangle_x^j \hat{E}(x) e^{\rho\omega_j t(x)} + \\
+ H_{1\nu}(a,x,\rho) + H_{2\nu}(b,x,\rho), \qquad \nu = \overline{0, r-1},
\end{gathered} \tag{2.47}
$$

де для $q = 1, 2,\ \nu = \overline{0, r-1}$

$$H_{q\nu}(u, x, \rho) =$$

$$= \sum_{s=2}^{n} \frac{\rho^{1-n}}{r} \int_u^x K_{q\nu 0}(x, \xi, \rho) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi} d\xi -$$

$$- \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{\rho^{1-n-p}}{r} \left[\int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) y^{(n-s)}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi} db_{sp}(\xi) - \right.$$

$$\left. - \int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi} d\xi \right] -$$

$$- \sum_{p=2}^{m} \frac{\rho^{1-n-p}}{r} \int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) y^{[n]}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi} d\xi.$$

2.1.6. Асимптотика розв'язків рівняння з мірами.

Лема 2. *Існує така стала C, що для всіх $\rho \in \mathcal{T}$ мають місце нерівності*

$$|K_{1\nu p}(x, \xi, \rho)| \leqslant C |\rho|^{\nu} k \left| e^{\rho \omega_k (t(x) - t(\xi))} \right| \text{ для } a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b, \quad (2.48)$$

$$|K_{2\nu p}(x, \xi, \rho)| \leqslant C |\rho|^{\nu} (r - k) \left| e^{\rho \omega_k (t(x) - t(\xi))} \right| \text{ для } a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \quad (2.49)$$

$$\nu = \overline{0, r-1}, \quad p = \overline{0, m}.$$

Доведення. Виберемо сталу C_1 так, щоб

$$\left| e^{c(\omega_j - \omega_k)(t(x) - t(\xi))} \right| \leqslant C_1 \quad (2.50)$$

для всіх $j, k = \overline{1, r}$ і всіх x та ξ з інтервалу $[a, b]$; це можливо, бо ліва частина (2.50) є неперервною функцією змінних x і ξ. Якщо $\rho \in \mathcal{T}$, то з нерівностей (2.25) випливає, що для $\alpha \leqslant k$

$$\mathrm{Re}(\rho \omega_\alpha) \leqslant \mathrm{Re}(\rho \omega_\alpha + (\rho + c)(\omega_k - \omega_\alpha));$$

звідки для $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$

$$\left|e^{\rho\omega_\alpha(t(x)-t(\xi))}\right| \leqslant \left|e^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha)](t(x)-t(\xi))}\right| \leqslant C_1 \left|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right|,$$

бо $t(x)$ – монотонна функція. Пригадаємо, що функції $a_{00}(x)$ і $\sigma(x)$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$ і не перетворюються в нуль у жодній точці цього проміжку. Отже, функції $a_{00}(x)$, $\sigma(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$ і $\sigma^{-1}(x)$ на відрізку $[a,b]$ є обмеженими. Тоді функції $Q_{\nu,m-p}(x,\xi)$ теж є там обмеженими і

$$|K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)| = \left|\sum_{j=1}^{k} \rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi) M_{j,m-p} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant Ck\,|\rho|^\nu \left|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right|.$$

Аналогічно доводиться нерівність (2.49). Лему доведено.

У наступній теоремі на основі аналізу інтегро-квазідиференціальних рівнянь (2.47) встановлюються асимптотичні формули для розв'язків рівняння (2.3).

Теорема 2.1. *За вищезгаданих умов на коефіцієнти квазідиференціального рівняння* (2.3), *воно у всій області* $\mathcal{T}$ *комплексної* ρ*-площини має* r *лінійно незалежних розв'язків* y_1, y_2, $\ldots$, y_r, *регулярних (тобто однозначних аналітичних) відносно* $\rho \in \mathcal{T}$ *для досить великого* $|\rho|$ *і таких, що для великих* $|\rho|$ *задовольняють співвідношення*

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \hat{R}_\nu(x)(\rho\omega_k t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)} \hat{E}(x)\left[1 + o(1)\right], \qquad (2.51)$$

де $\nu = \overline{0, r-1}$, $k = \overline{1, r}$, *а* $\hat{R}_\nu(x)$, $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.27), (2.28) *і* (2.30).

Доведення. Припустимо, що рівняння (2.3) має такий розв'язок y_k, що $\hat{c}_\nu = 0$ для $\nu \neq k$, $\hat{c}_k = 1$. Таким чином,

$$y_k^{[\nu]}(x) = \hat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu \langle\omega_k^\nu\rangle_x \hat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)} +$$
$$+ H_{1\nu}(a,x,\rho) + H_{2\nu}(b,x,\rho), \qquad \nu = \overline{0, r-1}. \qquad (2.52)$$

Покладемо для $\nu = \overline{0, r-1}$

$$z_{k\nu}(x) = y_k^{[\nu]}(x)\hat{R}_\nu^{-1}(x)(\rho t'(x))^{-\nu}\hat{E}^{-1}(x)e^{-\rho\omega_k t(x)} \tag{2.53}$$

і введемо позначення

$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = \frac{1}{r}\hat{R}_\nu^{-1}(x)K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\times$$
$$\times\rho^{2-p-s-\nu}\frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi \leqslant x, \tag{2.54}$$
$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = -\frac{1}{r}\hat{R}_\nu^{-1}(x)K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\times$$
$$\times\rho^{2-p-s-\nu}\frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi > x; \tag{2.55}$$
$$\nu = \overline{0,r-1}, \quad k = \overline{1,r}, \quad p = \overline{0,m}, \quad s = \overline{0,n};$$

тоді для функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$ ми отримаємо систему інтегральних рівнянь ($k = \overline{1,r}$, $\nu = \overline{0,r-1}$)

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \langle\omega_k^\nu\rangle_x +$$
$$+\frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho)\frac{a_{s0}(\xi)}{a_{00}(\xi)}\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{k,n-s}(\xi,\rho)\,d\xi -$$
$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{k,n-s}(\xi,\rho)\,db_{sp}(\xi) +$$
$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\frac{a_{0p}(\xi)}{a_{00}(\xi)}a_{s0}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{k,n-s}(\xi,\rho)\,d\xi -$$
$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{kn}(\xi,\rho)\,d\xi. \tag{2.56}$$

Другий інтеграл в (2.56) буде існувати як інтеграл Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна функція може мати розриви хіба що справа, тоді як $b_{sp}(x)$ є неперервними праворуч. Побудуємо функції $\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ і $g_{sp}(x)$ ($k=\overline{1,r}$, $p=\overline{0,2m}$, $\nu=\overline{0,r-1}$, $s=\overline{0,n}$) наступним чином:

$$\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}-\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{0,n},\ p=\overline{1,m};\\ \mathcal{K}_{k,p-m,\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{1,n},\ p=\overline{m+1,2m};\\ \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{1,n},\ p=0;\\ 0, & s=0,\ p=0,m+1,m+2,\dots,2m;\end{cases} \tag{2.57}$$

$$g_{sp}(x)=\begin{cases}b_{sp}(x), & s=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m};\\ \int\limits_a^x a_{0p}(t)a_{00}^{-1}(t)dt, & s=0,\ p=\overline{0,m};\\ \int\limits_a^x a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt, & s=\overline{1,n},\ p=0;\\ \int\limits_a^x a_{0,p-m}(t)a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt, & s=\overline{0,n},\ p=\overline{m+1,2m}.\end{cases} \tag{2.58}$$

Інтеграл Лебега зі змінною верхньою межею від сумовної функції є абсолютно неперервною функцією на проміжку $[a,b]$, а отже, має обмежену варіацію на цьому проміжку. Внаслідок цього всі $g_{sp}(x)$ теж мають обмежену варіацію на $[a,b]$. Тоді (2.56) можна зобразити в компактнішому вигляді

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\langle\omega_k^\nu\rangle_x+$$
$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\,z_{k,n-s}(\xi,\rho)dg_{sp}(\xi). \tag{2.59}$$

Для фіксованого k і $\nu=\overline{0,r-1}$ (2.59) є системою інтегральних рівнянь відносно функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$ ($\nu=\overline{0,r-1}$). Якщо вона має розв'язок $z_{k\nu}$, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо:

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\langle\omega_k^\nu\rangle_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}dg_{sp}(\xi)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2=0}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi,\rho)\hat{Q}_{kp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$
$$\times z_{k,n-s_2}(\xi_2)\langle 1\rangle_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)dg_{s_2p_2}(\xi_2)=\ldots$$
$$\ldots=\langle\omega_k^{\nu}\rangle_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}dg_{sp}(\xi)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{\rho^d}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_d=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_d=0}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$
$$\ldots\times\hat{Q}_{k,p_d,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)\langle\omega_k^{n-s_d}\rangle_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots dg_{s_dp_d}(\xi_d)+$$
$$+\frac{1}{\rho^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_{d+1}=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=0}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$
$$\ldots\times\hat{Q}_{k,p_{d+1},n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho)z_{k,n-s_{d+1}}(\xi_{d+1})\times$$
$$\times\langle 1\rangle_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots dg_{s_{d+1},p_{d+1}}(\xi_{d+1}). \tag{2.60}$$

Покладемо $B=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|z_{k\nu}(x)|$, $\nu=\overline{0,r-1}$. Пригадаємо, що функції $a_{00}(x)$ і $\sigma(x)$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$ і не перетворюються в нуль у жодній точці цього проміжку. Отже, функції $a_{00}(x)$, $\sigma(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$ і $\sigma^{-1}(x)$ на відрізку $[a,b]$ є обмеженими. Тоді з леми 2 випливає, що існують такі сталі L і R, що для $|\rho|>R$ $\forall k,p,\nu,s$ маємо $\left|\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\right|\leqslant L$. Введемо позначення $v_{sp}=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,g_{sp}(x)$, $s=\overline{0,n}$, $p=\overline{0,2m}$; тоді останній доданок в (2.60) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\ldots p_{d+1}=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=0}^{n}\prod_{j=1}^{d+1}v_{s_jp_j}=$$
$$=B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{s_{ij}\geqslant 0,\ \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{2m}s_{ij}=d+1}\frac{(d+1)!}{\prod\limits_{i=0}^{n}\prod\limits_{j=0}^{2m}s_{ij}!}\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{2m}v_{ij}^{s_{ij}},$$

що можна записати за формулою полінома у вигляді

$$B\left[\frac{L}{|\,\rho\,|}\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=0}^{2m}v_{sp}\right]^{d+1}.$$

Для $|\rho|>R_0$, де

$$R_0=\max\left\{R,\ L\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=0}^{2m}v_{sp}\right\},$$

функція $z_{k\nu}(x)=z_{k\nu}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\langle\omega_k^{\nu}\rangle_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}dg_{sp}(\xi)+$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2=0}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\hat{Q}_{kp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$
$$\times\langle\omega_k^{n-s_2}\rangle_{x,\xi}\,dg_{s_1p_1}(\xi_1)\,dg_{s_2p_2}(\xi_2)+\ldots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho|\geqslant R_1>R_0$, $a\leqslant x\leqslant b$ цей ряд збігається рівномірно і є розв'язком системи (2.56). Отже, ця система має один і тільки один розв'язок $z_{k\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\omega_k^{\nu}(1+o(1))+O\left(\tfrac{1}{\rho}\right)=\omega_k^{\nu}(1+o(1)).$$

Звідси і з (2.53) випливають співвідношення (2.51), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_r. Залишається довести, що існує розв'язок $y_k(x,\rho)$ рівняння (2.3), що задовольняє (2.52). Для цього достатньо показати, що якими б не були сталі $\hat{c}_\nu$, існує розв'язок y рівняння (2.3), що задовольняє (2.47) для цих значень $\hat{c}_\nu$. Очевидно, досить довести, що визначник лінійного перетворення від сталих $\tilde{c}_j$ до $\hat{c}_j$

(добуток двох перетворень від $\tilde{c}_j$ до c_j та від c_j до $\hat{c}_j$) для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля; в цьому випадку системи (2.44) і (2.45), (2.46) можна розв'язати відносно $\tilde{c}_j$ для довільно заданих $\hat{c}_j$. Розв'язок y рівняння (2.3), рівносильного першому рівнянню системи (2.43), що відповідає цим значенням $\tilde{c}_j$, буде тоді шуканим.

Але якщо визначник перетворення (2.44) – (2.46) дорівнює нулю для як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$ (детермінант хоча б одного з перетворень (2.44) – (2.46) дорівнює нулю), то для цих значень ρ системи (2.44) і (2.45), (2.46) мають нетривіальні розв'язки відносно $\tilde{c}_j$ для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_r = 0$. Відповідна функція y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи

$$y_k^{[\nu]}(x) = H_{1\nu}(a, x, \rho) + H_{2\nu}(b, x, \rho), \qquad \nu = \overline{0, r-1},$$

яку можна отримати з (2.47) для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_r = 0$.

Доведемо, що це неможливо. Скориставшись заміною

$$z_\nu(x) = y^{[\nu]}(x)\hat{R}_\nu^{-1}(x)(\rho t'(x))^{-\nu}\hat{E}^{-1}(x)e^{-\rho\omega_k t(x)}, \tag{2.61}$$

де $\nu = \overline{0, r-1}$, і врахувавши (2.54), (2.55), отримаємо для функцій z_ν систему рівнянь

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi -$$

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{n-s}(\xi,\rho)db_{sp}(\xi) +$$

$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi -$$

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_n(\xi,\rho)d\xi.$$

За допомогою (2.57) і (2.58) останню рівність можна записати в компактнішій формі

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b \hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, z_{n-s}(\xi,\rho)\,dg_{sp}(\xi).$$

Поклавши $m(\rho) = \max|z_\nu(x,\rho)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\nu = \overline{0, r-1}$, і застосувавши лему до правої частини останньої системи, можна прийти до оцінки

$$|z_\nu(x,\rho)| \leqslant \frac{C_1}{|\rho|}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b |\rho|^{2-p-s}\,|dg_{sp}(\xi)|\,m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \leqslant m(\rho)C_2/|\rho|$, де C_1, C_2 – сталі.

Для великих значень $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (2.61) $y \equiv 0$ при $\nu = 0$, і теорему повністю доведено.

Зауваження. Оскільки асимптотичні формули (2.51) збігаються з асимптотичними формулами (2.29), формули (2.38) мають місце й у тому випадку, коли $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.3), причому M_{kj} і $Q_{ij}(x,z)$ визначаються так само, як і у пункті 2.1.4. Квазіпохідні функції Коші в сенсі вихідного і спряженого рівнянь подаються, відповідно, формулами (2.2) і (2.12).

2.2. Асимптотика власних значень і власних функцій крайової задачі

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [67].

2.2.1. Сингулярний квазідиференціальний оператор. Квазідиференціальний вираз $L_{mn}(y)$, визначений формулою (2.1), і крайові умови

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \tag{2.62}$$

породжують квазідиференціальний оператор L з областю визначення

$$D(L) = \Big\{ y : y^{[k]} \in AC\left([a,b];\mathbb{C}\right),\ k = \overline{0, n-1},$$
$$y^{[s]} \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right),\ s = \overline{n, r-1},\ U_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1, r} \Big\},$$

який діє з простору $BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right)$ в простір мір. Тут квадратні дужки позначають квазіпохідні в сенсі квазідиференціального виразу $L_{mn}(y)$, визначені формулами (2.2).

Функції $f_1, f_2 \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right)$ ми будемо вважати еквівалентними, якщо

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|^2 \, dx = 0. \tag{2.63}$$

Тоді норма і скалярний добуток визначаються в просторі $BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right)$ (елементами якого можна вважати не самі функції, а введені вище класи еквівалентності) наступним чином:

$$(f_1, f_2)_{BV} = \int_a^b \sigma(x) f_1(x) \overline{f_2(x)} dx, \quad \|f\|_{BV} = \sqrt{(f,f)_{BV}}; \tag{2.64}$$

а в просторі мір

$$\|f\| = \int_a^b |dg(x)| = \mathop{\mathrm{V}}_a^b g, \tag{2.65}$$

де $f(x) = g'(x)$, а $g \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$.

2.2.2. Регулярні крайові умови. Розглянемо лінійні форми $U_\nu(y)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Число k назвемо *порядком* форми $U_\nu(y)$, якщо ця форма містить $y^{[k]}(a)$ або $y^{[k]}(b)$, але не містить змінних $y^{[\nu]}(a)$ і $y^{[\nu]}(b)$ для $\nu > k$. Розглянемо форми порядку $n-1$, якщо такі є. Замінюючи їх, за необхідності, лінійними комбінаціями, можна добитись того, що максимальне число форм порядку $n-1$ буде меншим або рівним 2. Решта форм має порядок менший або рівний $n-2$; застосовуючи до форм порядку $n-2$ той самий засіб, зведемо їх число до мінімуму і т. д.

Цю операцію називають *нормуванням крайових умов*, а самі умови – *нормованими*. Таким чином, за допомогою нормування крайові умови (2.62) можна подати у вигляді

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu a}(y) + U_{\nu b}(y) = 0, \tag{2.66}$$

де

$$U_{\nu a}(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\alpha}_{\nu j} y^{[j]}(a), \tag{2.67}$$

$$U_{\nu b}(y) = \beta_\nu y^{[k_\nu]}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\beta}_{\nu j} y^{[j]}(b), \tag{2.68}$$

$$r - 1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r \geqslant 0, \quad k_{s+2} < k_s,$$
$$s = \overline{1, r-2}, \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Нехай

$$\hat{\alpha}_\nu = \begin{cases} \alpha_\nu \hat{E}(a) \left(\sqrt[r]{\left| \dfrac{\sigma(a)}{a_{00}(a)} \right|} \right)^{k_\nu}, & k_\nu < n, \\ \alpha_\nu a_{00}(a) \hat{E}(a) \left(\sqrt[r]{\left| \dfrac{\sigma(a)}{a_{00}(a)} \right|} \right)^{k_\nu}, & k_\nu \geqslant n, \end{cases} \tag{2.69}$$

$$\hat{\beta}_\nu = \begin{cases} \beta_\nu \hat{E}(b) \left(\sqrt[r]{\left| \dfrac{\sigma(b)}{a_{00}(b)} \right|} \right)^{k_\nu}, & k_\nu < n, \\ \beta_\nu a_{00}(b) \hat{E}(b) \left(\sqrt[r]{\left| \dfrac{\sigma(b)}{a_{00}(b)} \right|} \right)^{k_\nu}, & k_\nu \geqslant n. \end{cases} \tag{2.70}$$

Означення 2.9. Для r непарного ($r = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (2.66) назвемо *регулярними* для розглядуваної задачі (2.3), (2.66), якщо числа θ_0 і θ_1, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_1 \omega_1^{k_1} & \cdots & \hat{\alpha}_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + s\hat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & \hat{\beta}_1 \omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \hat{\beta}_1 \omega_r^{k_1} \\ \hat{\alpha}_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \hat{\alpha}_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + s\hat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & \hat{\beta}_2 \omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \hat{\beta}_2 \omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_r \omega_1^{k_r} & \cdots & \hat{\alpha}_r \omega_{\mu-1}^{k_r} & (\hat{\alpha}_r + s\hat{\beta}_r)\omega_\mu^{k_r} & \hat{\beta}_r \omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & \hat{\beta}_r \omega_r^{k_r} \end{vmatrix}, \tag{2.71}$$

відрізняються від нуля. Для r парного ($r = 2\mu$) нормовані крайові умови (2.66) називатимемо *регулярними* для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \det(A, B), \tag{2.72}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \omega_1^{k_1} & \cdots & \hat{\alpha}_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + s\hat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\hat{\alpha}_1 + \frac{1}{s}\hat{\beta}_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} \\ \hat{\alpha}_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \hat{\alpha}_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + s\hat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{s}\hat{\beta}_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_r \omega_1^{k_r} & \cdots & \hat{\alpha}_r \omega_{\mu-1}^{k_r} & (\hat{\alpha}_r + s\hat{\beta}_r)\omega_\mu^{k_r} & \left(\hat{\alpha}_r + \frac{1}{s}\hat{\beta}_r\right)\omega_{\mu+1}^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \hat\beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \hat\beta_1\omega_r^{k_1} \\ \hat\beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \hat\beta_2\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat\beta_r\omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & \hat\beta_r\omega_r^{k_r} \end{pmatrix}.$$

Це означення є узагальненням класичних регулярних умов, які наводяться в [76, с. 66–67] і, в більш загальному сенсі, в [42, с. 203–205] (див. пункт 1.1.3). Відмінність полягає в тому, що у виразах (2.67), (2.68) фігурують квазіпохідні замість звичайних похідних, а в (2.69) і (2.70) присутні додатково ще й $a_{00}(x)$, $\sigma(x)$ та $\hat E(x)$.

Означення регулярності 1.1 не залежить від вибору області $\mathcal{S}$, за допомогою якої були занумеровані числа ω_j. Останнє твердження доводиться абсолютно так само, як і в [76, с. 67–69].

Мають місце наступні властивості регулярних умов, які доводяться так само, як і в класичному регулярному випадку.

1. Корені рівняння $\theta_1\xi+\theta_0 = 0$ не змінюються при переході від $\mathcal{S}_q$ до $\mathcal{S}_{q'}$ для $q = q' \pmod 2$; при переході від $\mathcal{S}_{2q+1}$ до $\mathcal{S}_{2q}$ вони множаться на $e^{\pm\frac{2\pi i}{r}(k_1+k_2+\ldots+k_r)}$, причому знак $+$ $(-)$ відповідає $r = 4p+1$ $(r = 4p-1)$.

2. При зміні номера q області $\mathcal{S}_q$ на парний доданок корені ξ' і ξ'' квадратного рівняння $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$ (відповідного регулярним крайовим умовам) не змінюються; при переході від парного q до непарного вони переходять у $\frac{1}{\xi'}$, $\frac{1}{\xi''}$.

2.2.3. Приклад регулярних крайових умов. Розглянемо крайові умови типу Штурма для парного r $(r = 2\mu)$:

$$U_{ja}(y) \equiv y^{[k_j]}(a) + \sum_{\nu=1}^{k_j-1} \alpha_{j\nu} y^{[\nu]}(a) = 0,$$

$$U_{jb}(y) \equiv y^{[k'_j]}(b) + \sum_{\nu=1}^{k'_j-1} \beta_{j\nu} y^{[\nu]}(b) = 0, \quad j = \overline{1,\mu},$$

де $r-1 \geqslant k_1 > k_2 > \ldots > k_\mu \geqslant 0$; $r-1 \geqslant k'_1 > k'_2 > \ldots > k'_\mu \geqslant 0$. Тут половина умов містить значення функції y і її квазіпохідних лише в точці $x = a$, а половина – тільки в точці $x = b$. У цьому випадку рівність (2.72) набуває вигляду

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \hat\alpha_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \hat\alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & \hat\alpha_1\omega_\mu^{k_1} & \hat\alpha_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat\alpha_\mu\omega_1^{k_\mu} & \cdots & \hat\alpha_\mu\omega_{\mu-1}^{k_\mu} & \hat\alpha_\mu\omega_\mu^{k_\mu} & \hat\alpha_\mu\omega_{\mu+1}^{k_\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s\hat\beta_1\omega_\mu^{k_1'} & \frac{\hat\beta_1}{s}\omega_{\mu+1}^{k_1'} & \hat\beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1'} & \cdots & \hat\beta_1\omega_r^{k_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & s\hat\beta_\mu\omega_\mu^{k_\mu'} & \frac{\hat\beta_\mu}{s}\omega_{\mu+1}^{k_\mu'} & \hat\beta_\mu\omega_{\mu+2}^{k_\mu'} & \cdots & \hat\beta_\mu\omega_r^{k_\mu'} \end{vmatrix},$$

звідки

$$\theta_1 = \pm\prod_{j=1}^{\mu}\hat\alpha_j\hat\beta_j \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{k_1} & \omega_{\mu+1}^{k_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{k_\mu} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{k_\mu} & \omega_{\mu+1}^{k_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_\mu^{k_1'} & \omega_{\mu+2}^{k_1'} & \cdots & \omega_r^{k_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_\mu^{k_\mu'} & \omega_{\mu+2}^{k_\mu'} & \cdots & \omega_r^{k_\mu'} \end{vmatrix},$$

$$\theta_{-1} = \pm\prod_{j=1}^{\mu}\hat\alpha_j\hat\beta_j \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \cdots & \omega_\mu^{k_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{k_\mu} & \cdots & \omega_\mu^{k_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{\mu+1}^{k_1'} & \cdots & \omega_r^{k_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\mu+1}^{k_\mu'} & \cdots & \omega_r^{k_\mu'} \end{vmatrix}.$$

Знак $\pm$ отримується в останніх формулах тому, що рядки тут розташовані не в тому порядку, що в формулі (2.72). З (2.69), (2.70) видно, що $\hat\alpha_j, \hat\beta_j \neq 0$, $j = \overline{1,\mu}$, а в [76, с. 70–71] доведена відмінність від нуля всіх визначників у двох останніх формулах. Тому крайові умови типу Штурма є регулярними для рівняння (2.3).

2.2.4. Асимптотика власних значень. Для крайової задачі (2.3), (2.66) можна встановити, що за регулярних для неї крайових умов множина власних значень є зліченною, а асимптотична поведінка великих за модулем власних значень залежить лише від чисел θ_0, θ_{-1}, θ_1. Ми будемо вважати (не уточнюючи цього в умові теореми заради лаконічності), що коефіцієнти рівняння (2.3) задовольняють накладені на них у пункті 2.1.1 умови.

Теорема 2.2. *Власні значення задачі на власні значення* (2.3), (2.66) *з регулярними крайовими умовами* (2.66) *утворюють дві нескінченні послідовності* λ'_k, λ''_k $(k = N, N+1, N+ + 2, \ldots)$, *де* $N \in \mathbb{N}$. *Для непарного* r

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\mp\frac{2k\pi i}{h}\right)^r \left[1 \mp \frac{r\ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\pm\frac{2k\pi i}{h}\right)^r \left[1 \pm \frac{r\ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \end{cases} \tag{2.73}$$

де $h = t(b) > 0$, $t(x)$ *визначається формулою* (2.27), *верхній знак відповідає* $r = 4p-1$, *а нижній –* $r = 4p+1$; $\ln_0 \xi$ *– деяке фіксоване значення натурального логарифма, а* $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *– корені рівняння* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, *що відповідає області* $\mathcal{S}_q$ *з* q *відповідно непарним і парним.*

Для парного r, $r = 2\mu$

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^{m+\mu} \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r \left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi'}{k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^{m+\mu} \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r \left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi''}{k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \end{cases} \tag{2.74}$$

де ξ' *і* ξ'' *– (різні чи однакові) корені рівняння*

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{2.75}$$

що відповідає області $\mathcal{S}_0$; *причому верхній знак у формулах* (2.74) *відповідає парному, а нижній – непарному* μ.

У випадку парного r *при* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$ *всі власні значення, починаючи з деякого, є простими чи двократними, а у всіх інших випадках всі власні значення, починаючи з деякого, є простими.*

Доведення здійснюється методом, запропонованим в [76, с. 75–83].

Розглянемо спочатку випадок непарного r. Нехай $r = 2\mu - 1$, а ρ визначається за формулою (2.24). Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2r$ секторів $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ (так само, як це робиться в пункті 2.1.3). Нехай числа ω_j (різні корені r-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{T}$ виконується ланцюг нерівностей (2.25).

Покладемо
$$\tilde\rho_j = (\rho + c)\omega_j, \quad j = \overline{1, r}.$$

Точки $\tilde\rho_1$, $\tilde\rho_2$, ..., $\tilde\rho_r$ лежать на колі радіуса $|\rho + c|$ на однаковій кутовій відстані $\frac{2\pi}{r} = \frac{2\pi}{2\mu-1}$ одна від одної; тому на правому замкненому півколі їх не більше, ніж μ. Справді, якби їх там було принаймні $\mu + 1$, то ми прийшли б до суперечливої нерівності

$$\pi \geqslant \frac{2\pi}{2\mu - 1}\mu > \pi,$$

оскільки кутова міра півкола дорівнює π. Звідси з нерівностей (2.25) випливає, що принаймні перші $\mu - 1$ точок $\tilde\rho_1$, $\tilde\rho_2$, ..., $\tilde\rho_{\mu-1}$ повинні знаходитись у лівій відкритій півплощині, аналогічно останні $\mu - 1$ точок $\tilde\rho_{\mu+1}$, $\tilde\rho_{\mu+2}$, ..., $\tilde\rho_{2\mu-1}$ знаходяться у правій відкритій півплощині. Іншими словами,

$$\operatorname{Re}(\tilde\rho_1) < 0,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_2) < 0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu-1}) < 0, \tag{2.76}$$
$$\operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu+1}) > 0,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu+2}) > 0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_r) > 0. \tag{2.77}$$

Якщо $\rho \to \infty$, залишаючись у області $\mathcal{T}$, то ліві частини (2.76) і (2.77) прямують до $-\infty$ і $+\infty$ відповідно.

Справді, $\operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu-1})$, наприклад, не буде прямувати до $-\infty$ лише тоді, коли кутова відстань між $\tilde\rho_{\mu-1}$ і від'ємною чи додатною уявними півосями прямує до нуля, але тоді для достатньо великих $|\rho|$ на дузі
$$-\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arg\tilde\rho \leqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$
розміститься $\mu + 1$ точок $\tilde\rho_{\mu-1}$, $\tilde\rho_\mu$, ..., $\tilde\rho_r$. Звідси випливає, що

$$\pi + 2\varepsilon \geqslant \frac{2\pi\mu}{2\mu - 1}$$

для як завгодно малого $\varepsilon > 0$, що є неможливим.

Отже, для $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$, $e^{\tilde\rho_j}$ експоненціально прямує до нуля, якщо $j < \mu$, і до безмежності, якщо $j > \mu$.

Згідно з теоремою 2.1 для рівняння (2.3) є r лінійно незалежних розв'язків, які для великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, подаються разом зі своїми квазіпохідними формулами (2.51). Складемо з їх допомогою визначник $\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j))$, $\nu, j = \overline{1, r}$. Відомо, що власні значення є нулями $\Delta(\lambda)$.

Підставивши вирази (2.51) в нормовані форми $U_\nu(y)$ ((2.67), (2.68)), отримаємо

$$U_{\nu a}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu \langle \hat{\alpha}_\nu \rangle, \quad U_{\nu b}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h} \langle \hat{\beta}_\nu \rangle,$$

де

$$\varphi_\nu = \begin{cases} 1, \ k_\nu < n, \\ (-1)^{k_\nu - n}, \ k_\nu \geqslant n. \end{cases}$$

Звідси

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu \{\langle \hat{\alpha}_\nu \rangle + e^{\rho\omega_j h} \langle \hat{\beta}_\nu \rangle\}.$$

У випадку $j < \mu$ функція $e^{\rho\omega_j h} = e^{-c\omega_j h} e^{\tilde{\rho}_j h}$ експоненціально спадає при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$; отже,

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu \langle \hat{\alpha}_\nu \rangle \text{ для } j < \mu. \tag{2.78}$$

Аналогічно,

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h} \langle \hat{\beta}_\nu \rangle \text{ для } j > \mu. \tag{2.79}$$

Нарешті,

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu \{\langle \hat{\alpha}_\nu \rangle + e^{\rho\omega_\mu h} \langle \hat{\beta}_\nu \rangle\}. \tag{2.80}$$

Підставимо всі ці вирази в рівняння

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(y_j)\right) = 0$$

і скоротимо на спільні множники $\rho^{k_1}\varphi_1$, $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\ldots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$ рядків і $e^{\rho\omega_{\mu+1} h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2} h}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r h}$ останніх стовпців визначника $\Delta(\lambda)$. Тоді це рівняння запишеться у вигляді

$$\Delta_0 = \det(A, B) = 0, \tag{2.81}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \langle\hat{\alpha}_1\rangle\omega_1^{k_1} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_1\rangle\omega_{\mu-1}^{k_1} & \langle\hat{\alpha}_1 + e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_1\rangle\omega_\mu^{k_1} \\ \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_1^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_{\mu-1}^{k_2} & \langle\hat{\alpha}_2 + e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_2\rangle\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_1^{k_r} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_{\mu-1}^{k_r} & \langle\hat{\alpha}_r + e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_r\rangle\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix}, \tag{2.82}$$

$$B = \begin{pmatrix} \langle\hat{\beta}_1\rangle\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \langle\hat{\beta}_1\rangle\omega_r^{k_1} \\ \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_r^{k_r} \end{pmatrix}.$$

Згідно з визначенням чисел θ_0 і θ_1 у формулі (2.71) з (2.81) випливає, що

$$\Delta_0 = \langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle.$$

Якщо ρ – корінь рівняння (2.81), то

$$e^{\rho\omega_\mu h} = -\frac{\langle\theta_0\rangle}{\langle\theta_1\rangle},$$

тобто

$$e^{\rho\omega_\mu h} = -\frac{\theta_0(1+o(1))}{\theta_1(1+o(1))} = -\frac{\theta_0}{\theta_1}\{1+o(1)\} = \xi\{1+o(1)\}, \tag{2.83}$$

бо внаслідок регулярності крайових умов $\theta_0 \neq 0$, $\theta_1 \neq 0$. Тому

$$\rho = \frac{1}{\omega_\mu h}\{\ln_0 \xi + 2k\pi i + o(1)\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.84}$$

Доведемо тепер, що дійсно існують нулі функції Δ, які подаються формулою (2.84).

Покладемо

$$\rho_k = \frac{1}{\omega_\mu h}\{2k\pi i + \ln_0 \xi\};$$

тоді співвідношення (2.84) перепишеться у вигляді

$$\rho = \rho_k + o(1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пригадаємо, що всі корені r-го степеня з -1 є точками на одиничному колі з центром у початку координат, повернутими проти годинникової стрілки відносно додатного напрямку дійсної осі на кут

$$\frac{\pi + 2\pi q}{r} \quad (q = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{2.85}$$

Тому будь-яка точка із сектора $\mathcal{S}_j$ при множенні на корінь r-го степеня з -1 перетворюється в точку, отриману з попередньої поворотом на кут (2.85) відносно початку координат, тобто точки сектора $\mathcal{S}_\nu$ з непарним індексом ν перетворюються в точки сектора $\mathcal{S}_j$ з парним індексом j і навпаки.

Зрозуміло, що числа $2k\pi i + \ln_0 \xi$ розташовані вздовж прямої, паралельної уявній осі комплексної площини. Якщо $r = 4q - 1$, то для $k > 0$ вони розташовуватимуться в секторі $\mathcal{S}_{2q-1}$ (тобто з непарним індексом), а для $k < 0$ – у секторі $\mathcal{S}_{r+2q-1}$ (тобто з парним індексом). Якщо $r = 4q + 1$, то для $k > 0$ ці числа розташовуватимуться в секторі $\mathcal{S}_{2q}$ (з парним індексом), а для $k < 0$ – у секторі $\mathcal{S}_{r+2q}$ (з непарним індексом). Оскільки множення кожного числа із сектора з непарним індексом на число ω_μ переводить його в число із сектора $\mathcal{S}_{r+2q-1}$ для $r = 4q - 1$ ($\mathcal{S}_{2q}$ для $r = 4q+1$), а множення будь-якого числа із сектора з парним індексом на число ω_μ – в число із сектора $\mathcal{S}_{2q-1}$ для $r = 4q - 1$ ($\mathcal{S}_{2q-1}$ для $r = 4q + 1$), то ми приходимо до наступного висновку.

Числа ρ_k розташовані паралельно бісектрисі області $\mathcal{T}$, причому у випадку $r = 4q - 1$ для області $\mathcal{T}$ з парним індексом слід брати $k > 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом потрібно брати $k < 0$; у випадку $r = 4q+1$ навпаки: для області $\mathcal{T}$ з парним індексом необхідно брати $k < 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом $k > 0$.

Опишемо тепер навколо кожної точки ρ_k коло Γ_k одного й того самого радіуса p/h, де $p < \pi$, $h = t(b)$ – скінченне число, $h > 0$. Внаслідок щойно сказаного, при k достатньо великому ці кола будуть повністю міститись в області $\mathcal{T}$. Оскільки $\xi = e^{\rho_k \omega_\mu h}$, рівняння (2.83) можна переписати у вигляді

$$e^{\omega_\mu (\rho - \rho_k) h} - 1 - o(1) = 0. \tag{2.86}$$

Розглянемо тепер функцію

$$f = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1 = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_0)h} - 1$$

(бо $(\rho_k - \rho_0)\omega_\mu h = 2k\pi i$). Введемо нову змінну ζ, поклавши

$$\omega_\mu(\rho - \rho_0)h = \zeta.$$

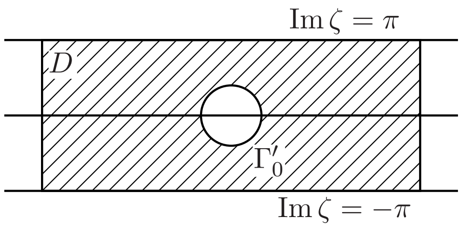

Рис. 2.

Тоді

$$f = e^{\zeta} - 1$$

і кола Γ_k перейдуть у кола Γ'_k радіуса p навколо точок $\zeta_k = 2k\pi i$. Розглянемо спочатку область D, обмежену прямими $\operatorname{Im}\zeta = \pm\pi$ і колом Γ'_0 (рис. 2). У цій області функція $f(\zeta)$ не перетворюється в нуль, а для $|\operatorname{Re}\zeta|$ достатньо великих ($|\operatorname{Re}\zeta| > N$) функція $f(\zeta)$ обмежена знизу, оскільки

$$\lim_{\operatorname{Re}\zeta\to+\infty} |f(\zeta)| = \infty, \qquad \lim_{\operatorname{Re}\zeta\to-\infty} |f(\zeta)| = 1.$$

Отже, внаслідок того, що $f(\zeta)$ – періодична функція з періодом $2\pi i$, вона скрізь зовні кіл Γ'_k *обмежена знизу додатним числом.* Звідси можна зробити висновок, що при достатньо великих $|\rho|$ функція Δ не має нулів зовні кіл Γ_k (бо рівняння (2.81) еквівалентне рівнянню (2.86)).

Нехай m – мінімум функції $|e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1|$ на Γ_k; оскільки на колі Γ_k

$$\rho - \rho_k = \frac{p}{h}e^{i\theta},$$

то m не залежить від k. На цьому самому колі $|o(1)| < m$ для достатньо великих $|\rho|$. Внаслідок відомої теореми Руше (див., наприклад, [82, с. 246]), звідси випливає, що рівняння (2.86) має всередині Γ_k стільки ж коренів, скільки їх там має рівняння $e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h}-1=0$, тобто рівно один корінь, який позначимо через ρ'_k.

Внаслідок (2.84)

$$\rho'_k=\frac{1}{\omega_\mu h}\{2k\pi i+\ln_0\xi+o(1)\}$$

або

$$\rho'_k=\frac{2k\pi i}{\omega_\mu h}\left\{1+\frac{\ln_0\xi}{2k\pi i}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Якщо тепер застосувати останню формулу до кожної з областей $\mathcal{T}$ і врахувати сформульовані вище міркування стосовно вибору знаку k, то після піднесення до r-го степеня ми отримаємо формули (2.73). Простота цих власних значень для достатньо великого $|k|$ пов'язана з тим, що згідно з теоремою Руше вони є простими нулями визначника $\Delta(\lambda)$.

Нехай тепер r парне ($r=2\mu$), доведення теореми в цьому випадку здійснюється за тією самою схемою. Розглянемо знову фіксовану область $\mathcal{T}$, для якої справджуються нерівності (2.25). Міркуючи так само, як і у випадку непарного r, можна показати, що

$$\operatorname{Re}(\tilde\rho_1)<0,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_2)<0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu-1})<0, \tag{2.87}$$

$$\operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu+2})>0,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_{\mu+3})>0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde\rho_r)>0, \tag{2.88}$$

причому ліві частини (2.87) і (2.88) прямують відповідно до $-\infty$ і $+\infty$, коли $\rho\to\infty$, залишаючись у заданій області $\mathcal{T}$.

Звідси, як і у випадку непарного r, можна зробити висновок, що

$$\begin{cases} U_\nu(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}\ \varphi_\nu\langle\hat\alpha_\nu\rangle & \text{для } j\leqslant\mu-1,\\ U_\nu(y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}\ \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h}\langle\hat\beta_\nu\rangle & \text{для } j\geqslant\mu+2,\end{cases} \tag{2.89}$$

і, крім того, врахувавши, що рівняння парного степеня $\omega^r+1=0$ разом з коренем ω_j містить також корінь $-\omega_j$,

$$U_\nu(y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\ \varphi_\nu\langle\hat\alpha_\nu+e^{\rho\omega_\mu h}\hat\beta_\nu\rangle, \tag{2.90}$$

$$U_\nu(y_{\mu+1})=(\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\ \varphi_\nu\langle\hat\alpha_\nu+e^{-\rho\omega_\mu h}\hat\beta_\nu\rangle \tag{2.91}$$

в позначеннях попереднього пункту, причому зрозуміло, що $\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_\mu) \leqslant 0$, а $\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_{\mu+1}) \geqslant 0$.

Підставивши в рівняння $\Delta = 0$ вирази (2.89), (2.90), (2.91) для $U_\nu(y_j)$ і здійснивши скорочення, отримаємо рівняння вигляду

$$\Delta_0 = 0,$$

де

$$\Delta_0 = \det(A, B_1),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \langle \hat{\alpha}_1 + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_1\rangle \omega_{\mu+1}^{k_1} & \langle \hat{\beta}_1\rangle \omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \langle \hat{\beta}_1\rangle \omega_r^{k_1} \\ \langle \hat{\alpha}_2 + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_2\rangle \omega_{\mu+1}^{k_2} & \langle \hat{\beta}_2\rangle \omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \langle \hat{\beta}_2\rangle \omega_r^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \hat{\alpha}_r + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_r\rangle \omega_{\mu+1}^{k_r} & \langle \hat{\beta}_r\rangle \omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & \langle \hat{\beta}_r\rangle \omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

а матриця A визначається формулою (2.82).

За означенням чисел θ_0, θ_1, θ_{-1} (див. формулу (2.72))

$$\Delta_0 = \langle\theta_0\rangle + \langle\theta_1\rangle e^{\rho\omega_\mu h} + \langle\theta_{-1}\rangle e^{-\rho\omega_\mu h},$$

отже,

$$\begin{aligned} e^{\rho\omega_\mu h}\Delta_0 &= \langle\theta_1\rangle e^{2\rho\omega_\mu h} + \langle\theta_0\rangle e^{\rho\omega_\mu h} + \langle\theta_{-1}\rangle = \\ &= \Big(\theta_1 e^{2\rho\omega_\mu h} + \theta_0 e^{\rho\omega_\mu h} + \theta_{-1}\Big)\,(1 + o(1)), \end{aligned} \tag{2.92}$$

бо внаслідок співвідношення $\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_\mu) \leqslant 0$

$$\left|e^{\rho\omega_\mu h}\right| = \left|e^{\tilde{\rho}\omega_\mu h}\right| \cdot \left|e^{-c\omega_\mu h}\right| \leqslant \left|e^{-c\omega_\mu h}\right|,$$

тобто функція $e^{\rho\omega_\mu h}$ обмежена в області $\mathcal{T}$.

Якщо ξ' і ξ'' – корені квадратного рівняння (2.75), то рівність (2.92) можна записати у вигляді

$$e^{\rho\omega_\mu h}\Delta_0 = \theta_1\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'\Big)\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi''\Big)(1 + o(1)).$$

Рівняння

$$e^{\rho\omega_\mu h} - \xi' = 0, \quad e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'' = 0$$

мають відповідно корені

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i), \qquad \rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' + 2k\pi i),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Для нас становлять інтерес лише ті з них, які лежать всередині області $\mathcal{T}$. Для визначеності будемо припускати, що розглядуваним сектором є область $\mathcal{S}_0$.

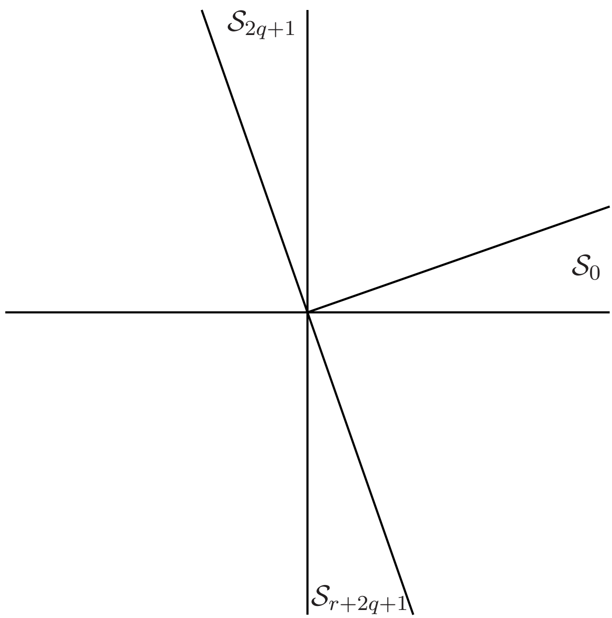

Рис. 3.

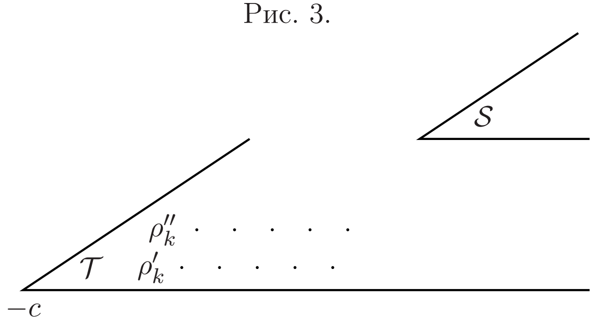

Рис. 4.

Якщо $r = 4q+2$, то всі корені r-го степеня з -1 будуть точками на одиничному колі з центром у початку координат, повернутими проти годинникової стрілки відносно додатного напряму дійсної осі на кут

$$\frac{\pi(2l+1)}{2(2q+1)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Очевидно, що серед цих чисел є число i (при $l = q$), а отже, й $-i$. Більше того, для сектора $\mathcal{S}_0$ $\omega_\mu = i$, $\omega_{\mu+1} = -i$, бо множення на ω_μ перетворює точки сектора $\mathcal{S}_0$ у точки сектора $\mathcal{S}_{2q+1}$, а множення на $\omega_{\mu+1}$ переводить сектор $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{S}_{r+2q+1}$ (рис. 3). Точки $\ln_0 \xi' + 2k\pi i$, $\ln_0 \xi'' + 2k\pi i$ лежать вздовж прямих, паралельних уявній осі. Тому для достатньо великих $k > 0$ всі числа ρ'_k, ρ''_k знаходяться всередині області $\mathcal{T}_0$ на прямих, паралельних дійсній осі, на додатній відстані від межі, якщо тільки певним чином вибрати вершину $\rho = -c$ цієї області (рис. 4).

Якщо $r = 4q$, то всі корені r-го степеня з -1 будуть точками на одиничному колі з центром у початку координат, повернутими проти годинникової стрілки відносно додатного напряму дійсної осі на кут

$$\frac{\pi(2l+1)}{2(2q)}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Нас серед них будуть цікавити точки з кутами $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{r}$ (для $l = 3q-1$) і $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{r}$ (для $l = q-1$), які виконуватимуть роль чисел ω_μ і $\omega_{\mu+1}$ для сектора $\mathcal{S}_0$. При множенні на них точки сектора $\mathcal{S}_0$ переходитимуть у точки секторів $\mathcal{S}_{r+2q-1}$ і $\mathcal{S}_{2q-1}$ відповідно (рис. 5). Тому для достатньо великих за абсолютною величиною чисел $k < 0$ всі числа ρ'_k, ρ''_k знаходяться всередині області $\mathcal{T}_0$ на прямих, паралельних межі секторів $\mathcal{T}_0$ і $\mathcal{T}_1$, якщо тільки певним чином вибрати вершину $\rho = -c$ цієї області (рис. 6).

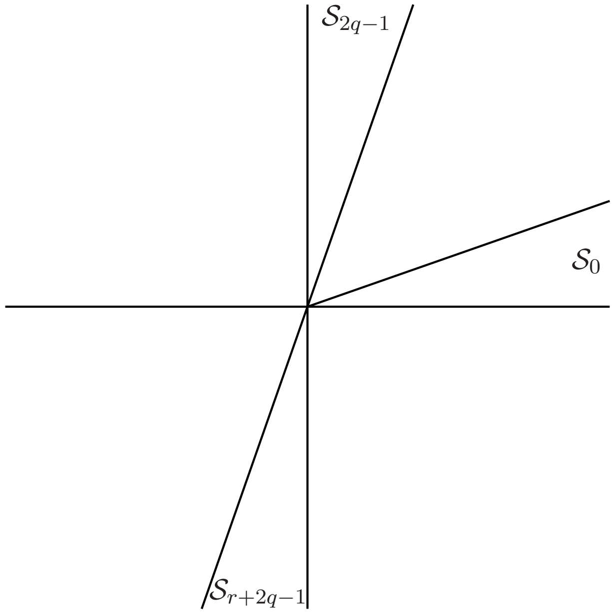

Рис. 5.

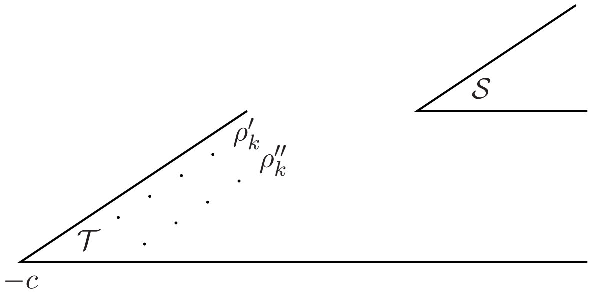

Рис. 6.

Отже, ми отримаємо послідовності

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.93}$$

що належать області $\mathcal{T}_0$ при умові, що у випадку $r = 4q$ береться верхній знак, а у випадку $r = 4q + 2$ – нижній. Використовуючи ρ'_k, ρ''_k і беручи до уваги (2.92), можна перетворити рівняння

$\Delta_0 = 0$ до вигляду

$$\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1\right)\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1\right) + o(1) = 0. \qquad (2.94)$$

Навколо кожної з точок ρ'_k, ρ''_k $(k = 1, 2, \ldots)$ опишемо коло відповідно Γ'_k і Γ''_k одного і того самого радіуса p. При достатньо малому p ці кола будуть повністю міститись в області $\mathcal{T}_0$ і не перетинатимуться.

Застосовуючи, як і у випадку непарного r теорему Руше, отримаємо, що для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, рівняння $\Delta_0 = 0$ може мати нулі лише всередині Γ'_k і Γ''_k, причому стільки, скільки їх там має рівняння

$$\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1\right)\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1\right) = 0. \qquad (2.95)$$

Нехай тепер $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$; тоді $\xi' \neq \xi''$, отже, числа ρ'_k і ρ''_k, а тому й круги Γ'_k і Γ''_k, відрізняються одне від одного.

В кожному з цих кругів рівняння (2.95), а отже, і рівняння $\Delta_0 = 0$, має рівно один корінь; позначимо ці корені через $\tilde{\rho}'_k$ і $\tilde{\rho}''_k$ відповідно. У крузі Γ'_k множник $e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1$ є обмеженим знизу; внаслідок (2.94) звідси випливає, що у крузі Γ'_k рівняння $\Delta = 0$ є еквівалентним рівнянню

$$e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1 = o(1).$$

Тому

$$\tilde{\rho}'_k = \rho'_k + o(1);$$

і аналогічно

$$\tilde{\rho}''_k = \rho''_k + o(1).$$

Звідси отримуємо

$$\tilde{\rho}'_k = \mp\frac{2k\pi i}{\omega_\mu h}\left[1 \mp \frac{\ln_0 \xi'}{2k\pi i} + \left(\frac{1}{k}\right)\right];$$

аналогічна формула має місце для $\tilde{\rho}''_k$. Після піднесення до r-го степеня, отримаємо формули (2.74).

Слід зазначити, що, як випливає з властивості 2 пункту 2.2.2, розгляд області $\mathcal{T}_q$ з парним індексом q дає ті самі послідовності власних значень. У випадку області $\mathcal{T}_q$ з непарним індексом q теж не буде нових послідовностей. Дійсно, якщо для $r = 4q + 2$ замість області $\mathcal{T}_0$ розглядати область $\mathcal{T}_{2r-1}$, то ξ' і ξ'' перейдуть у $\frac{1}{\xi'}$ і $\frac{1}{\xi''}$, а їх логарифми – у $-\ln_0 \xi'$ і $-\ln_0 \xi''$ з точністю до доданка вигляду $2k\pi i$. Крім того, ω_μ замінюється на $-\omega_\mu$. Тепер точки $\frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i)$ належатимуть області $\mathcal{T}_{2r-1}$ лише при $k < 0$, а це означає, що для $r = 4q + 2$ у формулах (2.93) слід взяти знак мінус. Тому ρ'_k і ρ''_k, а також $\tilde{\rho}'_k$ і $\tilde{\rho}''_k$ залишаються без змін. Подібна ситуація буде і для $r = 4q$, коли від області $\mathcal{T}_0$ ми перейдемо до області $\mathcal{T}_1$. Таким чином, для великих $|\rho|$ числа (2.74) є єдиними власними значеннями задачі (2.3), (2.66).

Нехай тепер $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$. Тоді $\xi' = \xi''$; отже, $\hat{\rho}'_k = \hat{\rho}''_k$ і круги Γ'_k, Γ''_k збігаються. Тому рівняння $\Delta_0 = 0$ має в кожному такому крузі рівно два корені, які в окремих випадках можуть перетворитись в один подвійний корінь.

Нехай $\tilde{\rho}_k$ – один з цих коренів. Рівняння (2.94) набуває у цьому випадку вигляду

$$\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1\right)^2 + o(1) = 0.$$

Звідси

$$e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1 + o(1) = 0,$$

а отже,

$$\tilde{\rho}_k = \rho'_k + o(1).$$

Піднесення останнього співвідношення до r-го степеня дає нам знову формули (2.74). Теорему доведено.

2.2.5. Асимптотика власних функцій. Застосуємо тепер отримані результати до знаходження асимптотичних формул для власних функцій при великих за модулем простих власних значеннях.

Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_r$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.3), що задовольняють співвідношенням (2.51) в деякій області $\mathcal{T}$. Власна функція y, відповідна власному значенню $\lambda = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r$, повинна бути лінійною комбінацією функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_r:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ry_r,$$

коефіцієнти якої є нетривіальними розв'язками однорідної системи

$$U_\nu(y_1)c_1 + U_\nu(y_2)c_2 + \ldots + U_\nu(y_r)c_r = 0, \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Отже, вони пропорційні алгебричним доповненням якого-небудь рядка визначника цієї системи за умови простоти власних значень. Тому

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_r(y_1) & U_r(y_2) & \cdots & U_r(y_r) \end{vmatrix}, \tag{2.96}$$

якщо не всі доповнюючі мінори елементів першого рядка цього визначника дорівнюють нулю. (В протилежному випадку y_1, y_2, $\ldots$, y_r слід розмістити в тому рядку, не всі мінори елементів якого дорівнюють нулю.)

Нехай r непарне ($r = 2\mu - 1$). Пригадаємо, що у цьому випадку всі власні значення, крім, можливо, скінченного числа, є простими. Підставимо формули (2.51), (2.78), (2.79) і (2.80) в (2.96), скоротимо отриманий вираз на несуттєві множники $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\rho^{k_3}\varphi_3$, $\ldots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$, $e^{\rho\omega_{\mu+1}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r h}$ і, врахувавши, що, оскільки $e^{o(1)} = 1 + o(1) = \langle 1\rangle$, справджується, зокрема, співвідношення $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}\langle 1\rangle = \xi\langle 1\rangle$, ми прийдемо до наступної теореми. Заради лаконічності формулювання теореми, ми в ньому не вказуємо, що коефіцієнти квазідиференціального рівняння (2.3) задовольняють умови, наведені у пункті 2.1.1. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ за формулою (2.24) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.73).

Теорема 2.3. *Власні функції крайової задачі* (2.3), (2.66) *з регулярними крайовими умовами* (2.66) *у випадку непарного* r

$(r = 2\mu - 1)$ *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$, *відповідні власним значенням* λ_k', λ_k'' (*що визначаються формулами* (2.73)), *вигляду*

$$y_k^{(s)}(x) = \hat{E}(x)\langle 1\rangle_x \det\,(X_{1k}^{(s)}, X_{2k}^{(s)}), \tag{2.97}$$

де

$$X_{1k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k^{(s)}t(x)} & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(s)}t(x)} & e^{\omega_\mu\rho_k^{(s)}t(x)} \\ \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_1^{k_2} & \dots & \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_{\mu-1}^{k_2} & \langle\hat{\alpha}_2 + \xi^{(s)}\hat{\beta}_2\rangle\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_1^{k_r} & \dots & \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_{\mu-1}^{k_r} & \langle\hat{\alpha}_r + \xi^{(s)}\hat{\beta}_r\rangle\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} & \dots & e^{\omega_r\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} \\ \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_r^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_{\mu+1}^{k_r} & \dots & \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0\xi^{(1)} \mp 2k\pi i), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0\xi^{(2)} \pm 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \dots;$ N – *достатньо велике натуральне число*, $s = 1, 2$, $h = t(b)$, *а* $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.27), (2.28), *причому верхній знак у формулах для* $\rho_k^{(s)}$ *треба вибирати при* $r = 4p - 1$, *а нижній – при* $r = 4p + 1$; $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ – *тут ті самі, що і в теоремі 2.2.*

Аналогічну теорему можна встановити, повторивши попередні міркування, і у випадку простих власних значень для парного r $(r = 2\mu)$. Для цього потрібно підставити формули (2.51), (2.89), (2.90) і (2.91) у (2.96), скоротити отриманий вираз на несуттєві множники $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\rho^{k_3}\varphi_3$, $\dots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+3}h}$, $\dots$, $e^{\rho\omega_r h}$ і, врахувавши, що $e^{o(1)} = 1 + o(1) = \langle 1\rangle$, $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0\xi}\langle 1\rangle = \xi\langle 1\rangle$, можна прийти до наступного висновку. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що ρ_k', ρ_k'' за формулою (2.24) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.74).

Теорема 2.4. *Власні функції крайової задачі* (2.3), (2.66) *з регулярними крайовими умовами* (2.66) *у випадку парного* r ($r = 2\mu$) *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_{1k}(x)$, $y_{2k}(x)$, *відповідні простим власним значенням* λ'_k, λ''_k (*що визначаються формулами* (2.74)), *вигляду*

$$\begin{aligned} y_{1k}(x) &= \hat{E}(x)\langle 1\rangle_x \det\left(X'_{1k}, X'_{2k}\right),\\ y_{2k}(x) &= \hat{E}(x)\langle 1\rangle_x \det\left(X''_{1k}, X''_{2k}\right), \end{aligned} \tag{2.98}$$

де

$$X'_{1k} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho'_k t(x)} & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho'_k t(x)} & e^{\omega_\mu\rho'_k t(x)} \\ \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_1^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_{\mu-1}^{k_2} & \langle\hat{\alpha}_2 + \xi'\hat{\beta}_2\rangle\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_1^{k_r} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_r\rangle\omega_{\mu-1}^{k_r} & \langle\hat{\alpha}_r + \xi'\hat{\beta}_r\rangle\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$X'_{2k} = \begin{pmatrix} e^{-\omega_\mu\rho'_k t(x)} & e^{\omega_{\mu+2}\rho'_k(t(x)-h)} & \dots & e^{\omega_r\rho'_k(t(x)-h)} \\ \langle\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2} & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_r^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\alpha}_r + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_r\rangle\omega_{\mu+1}^{k_r} & \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & \langle\hat{\beta}_r\rangle\omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0\xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0\xi'' \mp 2k\pi i), \tag{2.99}$$

$k = N, N+1, \ldots$; N – *достатньо велике натуральне число*, $h = t(b)$, *а* $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.27), (2.28), *причому у формулах* (2.99) *верхній знак потрібно брати для* $r = 4p$, *а нижній – для* $r = 4p+2$; X''_{1k}, X''_{2k} *відрізняються від* X'_{1k}, X'_{2k} *заміною* ρ'_k *на* ρ''_k *і* ξ' *на* ξ''; ξ' *і* ξ'' *тут ті самі, що і в теоремі 2.2.*

Особливо просто виглядають ці формули для $r = 2$. Якщо, наприклад, областю $\mathcal{T}$ є перший квадрант ρ-площини, то $\omega_\mu = i$, $\omega_{\mu+1} = -i$, а формули (2.98) для великих k у цьому випадку мають вигляд

$$y_{k1} = (-i)^{k_2} e^{i\rho'_k t(x)} \left\{\hat{\alpha}_2 + \tfrac{1}{\xi'}\hat{\beta}_2\right\}(1+o(1)) - \\ -i^{k_2} e^{-i\rho'_k t(x)} \left\{\hat{\alpha}_2 + \xi'\hat{\beta}_2\right\}(1+o(1)),$$

$$y_{k2} = (-i)^{k_2} e^{i\rho''_k t(x)} \left\{\hat{\alpha}_2 + \tfrac{1}{\xi''}\hat{\beta}_2\right\}(1+o(1)) - \\ -i^{k_2} e^{-i\rho''_k t(x)} \left\{\hat{\alpha}_2 + \xi''\hat{\beta}_2\right\}(1+o(1)).$$

2.3. Спряжені крайові умови

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [70].

2.3.1. Спряжені крайові умови. Крайові умови (2.62) з використанням того ж, що й у пункті 2.1.1, вектора $Y = \operatorname{colon}\left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\right)$ можуть бути записані у векторному вигляді

$$W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0, \tag{2.100}$$

де $W_a = (\alpha_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$, $W_b = (\beta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$.

Розглянемо вираз Z^*Y і здиференціюємо його, скориставшись формулами (2.5) і (2.10):

$$(Z^*Y)' = (Z^*)' Y + Z^*Y' = -\left((C^*)' Z\right)^* Y + Z^*C'Y = \\ = -Z^*C'Y + Z^*C'Y = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(Z^*)' Y$ і Z^*Y' є коректними на підставі відомого факту про те, що y, $y^{[1]}$, …, $y^{[n-1]}$, z, $z^{\{1\}}$, …, $z^{\{m-1\}}$ – абсолютно неперервні функції, а $y^{[n]}$, $y^{[n+1]}$, …, $y^{[r-1]}$, $z^{\{m\}}$, $z^{\{m+1\}}$, …, $z^{\{r-1\}}$ є неперервними справа функціями обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$ (див. твердження 2.1, 2.2). Отже, Z^*Y є сталою величиною і тому

$$(Z^*Y)\big|_a^b = 0 \tag{2.101}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\bar{z}^{\{r-1\}}(b)y(b) + \bar{z}^{\{r-2\}}(b)y^{[1]}(b) + \ldots + \bar{z}(b)y^{[r-1]}(b) -$$
$$- \bar{z}^{\{r-1\}}(a)y(a) - \bar{z}^{\{r-2\}}(a)y^{[1]}(a) - \ldots - \bar{z}(a)y^{[r-1]}(a) = 0. \tag{2.102}$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $U_1(y)$, $U_2(y)$, $\ldots$, $U_r(y)$ довільними формами $U_{r+1}(y)$, $U_{r+2}(y)$, $\ldots$, $U_{2r}(y)$ до лінійно незалежної системи $2r$ лінійних форм. Система лінійних алгебричних рівнянь з невідомими

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(b), \quad \nu = \overline{1, 2r},$$

має відмінний від нуля визначник внаслідок лінійної незалежності всіх рівнянь. Тоді її можна однозначно розв'язати відносно невідомих $y^{[q]}(a)$, $y^{[q]}(b)$, які визначаються через лінійні комбінації форм $U_1(y)$, $\ldots$, $U_{2r}(y)$. Підставивши знайдені $y^{[q]}(a)$, $y^{[q]}(b)$ $(q = \overline{0, r-1})$ в білінійну форму в лівій частині рівності (2.101), ми отримаємо, що

$$(Z^*Y)\big|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2r} \mathcal{A}_\nu(\xi) U_\nu(y),$$

де $\xi = \big(\bar{z}^{\{q\}}(a), \bar{z}^{\{q\}}(b)\big)$, $q = \overline{0, r-1}$. Позначимо $\mathcal{A}_{2r}(\xi) = V_1(z)$, $\ldots$, $\mathcal{A}_1(\xi) = V_{2r}(z)$. Очевидно, що для того, щоб виконувалась рівність (2.101), повинні мати місце співвідношення

$$V_\nu(z) = 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \tag{2.103}$$

де

$$V_\nu(z) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b), \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Означення 2.10. Крайові умови (2.103) ми називатимемо *спряженими крайовими умовами* до умов (2.62).

Зауваження. Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (2.100), то крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$Z^*(a)W_a^{-1} + Z^*(b)W_b^{-1} = 0. \tag{2.104}$$

Справді, з рівності (2.100), якщо $|W_a| \neq 0$, маємо

$$Y(a) = -W_a^{-1}W_bY(b).$$

Підставивши отриманий вираз у (2.101), отримаємо співвідношення

$$Z^*(b)Y(b) + Z^*(a)W_a^{-1}W_bY(b) = 0,$$

звідки при $|W_b| \neq 0$ випливає (2.104).

2.3.2. Спряжені крайові умови у випадку квазідиференціального рівняння другого порядку. Нехай крайові умови мають вигляд

$$U_1(y) = a_0y(a) + b_0y(b) + a_1y^{[1]}(a) + b_1y^{[1]}(b) = 0, \tag{2.105}$$

$$U_2(y) = c_0y(a) + d_0y(b) + c_1y^{[1]}(a) + d_1y^{[1]}(b) = 0. \tag{2.106}$$

Додамо ще дві форми

$$U_3(y) = \alpha_0y(a) + \beta_0y(b) + \alpha_1y^{[1]}(a) + \beta_1y^{[1]}(b) = 0, \tag{2.107}$$

$$U_4(y) = \gamma_0y(a) + \delta_0y(b) + \gamma_1y^{[1]}(a) + \delta_1y^{[1]}(b) = 0 \tag{2.108}$$

так, щоб система форм $U_1(y)$, $U_2(y)$, $U_3(y)$, $U_4(y)$ була лінійно незалежною. Цю систему можна однозначно розв'язати відносно невідомих $y(a)$, $y(b)$, $y^{[1]}(a)$, $y^{[1]}(b)$ і за допомогою матричного методу розв'язування алгебричних систем або методу Крамера отримати співвідношення

$$\begin{aligned}
y(a) &= D^{-1}\left(p_{11}U_1 + p_{12}U_2 + p_{13}U_3 + p_{14}U_4\right),\\
y(b) &= D^{-1}\left(p_{21}U_1 + p_{22}U_2 + p_{23}U_3 + p_{24}U_4\right),\\
y^{[1]}(a) &= D^{-1}\left(p_{31}U_1 + p_{32}U_2 + p_{33}U_3 + p_{34}U_4\right),\\
y^{[1]}(b) &= D^{-1}\left(p_{41}U_1 + p_{42}U_2 + p_{43}U_3 + p_{44}U_4\right),
\end{aligned}$$

де D – визначник системи рівнянь (2.105) – (2.108), а p_{ij} подаються формулами

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= d_0\alpha_1\delta_1 - d_0\beta_1\gamma_1 - \beta_0 c_1\delta_1 + \beta_0 d_1\gamma_1 + \delta_0 c_1\beta_1 - \delta_0 d_1\alpha_1,\\
p_{12} &= -b_0\alpha_1\delta_1 + b_0\beta_1\gamma_1 + \beta_0 a_1\delta_1 - \beta_0 b_1\gamma_1 - \delta_0 a_1\beta_1 + \delta_0 b_1\alpha_1,\\
p_{13} &= b_0 c_1\delta_1 - b_0 d_1\gamma_1 - d_0 a_1\delta_1 + d_0 b_1\gamma_1 + \delta_0 a_1 d_1 - \delta_0 b_1 c_1,\\
p_{14} &= -b_0 c_1\beta_1 + b_0 d_1\alpha_1 + d_0 a_1\beta_1 - d_0 b_1\alpha_1 - \beta_0 a_1 d_1 + \beta_0 b_1 c_1,\\
p_{21} &= -c_0\alpha_1\delta_1 + c_0\beta_1\gamma_1 + \alpha_0 c_1\delta_1 - \alpha_0 d_1\gamma_1 - \gamma_0 c_1\beta_1 + \gamma_0 d_1\alpha_1,\\
p_{22} &= a_0\alpha_1\delta_1 - a_0\beta_1\gamma_1 - \alpha_0 a_1\delta_1 + \alpha_0 b_1\gamma_1 + \gamma_0 a_1\beta_1 - \gamma_0 b_1\alpha_1,\\
p_{23} &= -a_0 c_1\delta_1 + a_0 d_1\gamma_1 + c_0 a_1\delta_1 - c_0 b_1\gamma_1 - \gamma_0 a_1 d_1 + \gamma_0 b_1 c_1,\\
p_{24} &= a_0 c_1\beta_1 - a_0 d_1\alpha_1 - c_0 a_1\beta_1 + c_0 b_1\alpha_1 + \alpha_0 a_1 d_1 - \alpha_0 b_1 c_1,\\
p_{31} &= c_0\beta_0\delta_1 - c_0\beta_1\delta_0 - \alpha_0 d_0\delta_1 + \alpha_0 d_1\delta_0 + \gamma_0 d_0\beta_1 - \gamma_0 d_1\beta_0,\\
p_{32} &= -a_0\beta_0\delta_1 + a_0\beta_1\delta_0 + \alpha_0 b_0\delta_1 - \alpha_0 b_1\delta_0 - \gamma_0 b_0\beta_1 + \gamma_0 b_1\beta_0,\\
p_{33} &= a_0 d_0\delta_1 - a_0 d_1\delta_0 - c_0 b_0\delta_1 + c_0 b_1\delta_0 + \gamma_0 b_0 d_1 - \gamma_0 b_1 d_0,\\
p_{34} &= -a_0 d_0\beta_1 + a_0 d_1\beta_0 + c_0 b_0\beta_1 - c_0 b_1\beta_0 - \alpha_0 b_0 d_1 + \alpha_0 b_1 d_0,\\
p_{41} &= -c_0\beta_0\gamma_1 + c_0\alpha_1\delta_0 + \alpha_0 d_0\gamma_1 - \alpha_0 c_1\delta_0 - \gamma_0 d_0\alpha_1 + \gamma_0 c_1\beta_0,\\
p_{42} &= a_0\beta_0\gamma_1 - a_0\alpha_1\delta_0 - \alpha_0 b_0\gamma_1 + \alpha_0 a_1\delta_0 + \gamma_0 b_0\alpha_1 - \gamma_0 a_1\beta_0,\\
p_{43} &= -a_0 d_0\gamma_1 + a_0 c_1\delta_0 + c_0 b_0\gamma_1 - c_0 a_1\delta_0 - \gamma_0 b_0 c_1 + \gamma_0 a_1 d_0,\\
p_{44} &= a_0 d_0\alpha_1 - a_0 c_1\beta_0 - c_0 b_0\alpha_1 + c_0 a_1\beta_0 + \alpha_0 b_0 c_1 - \alpha_0 a_1 d_0.
\end{aligned}
$$

Тепер, підставивши $y(a)$, $y^{[1]}(a)$, $y(b)$, $y^{[1]}(b)$ в (2.102), отримаємо із співвідношення

$$
\begin{gathered}
\bar z^{\{1\}}(b)\,(p_{21}U_1 + p_{22}U_2 + p_{23}U_3 + p_{24}U_4) +\\
+\,\bar z(b)\,(p_{41}U_1 + p_{42}U_2 + p_{43}U_3 + p_{44}U_4) -\\
-\,\bar z^{\{1\}}(a)\,(p_{11}U_1 + p_{12}U_2 + p_{13}U_3 + p_{14}U_4) -\\
-\,\bar z(a)\,(p_{31}U_1 + p_{32}U_2 + p_{33}U_3 + p_{34}U_4) = 0,
\end{gathered}
$$

оскільки $U_1 = U_2 = 0$, що

$$
\begin{aligned}
V_1(z) &= p_{24}\bar z^{\{1\}}(b) + p_{44}\bar z(b) - p_{14}\bar z^{\{1\}}(a) - p_{34}\bar z(a) = 0,\\
V_2(z) &= p_{23}\bar z^{\{1\}}(b) + p_{43}\bar z(b) - p_{13}\bar z^{\{1\}}(a) - p_{33}\bar z(a) = 0.
\end{aligned}
$$

Цей вигляд спряжених крайових умов є однозначним у тому сенсі, що лінійно незалежні лінійні комбінації крайових умов знову є тими самими, фактично, крайовими умовами.

Якщо

$$U_1(y) = y(a) = 0, \quad U_2(y) = y^{[1]}(b) = 0,$$

то

$$V_1(z) = -\alpha_1 \bar{z}^{\{1\}}(b) - \beta_0 \bar{z}(a) = 0,$$
$$V_2(z) = \gamma_1 \bar{z}^{\{1\}}(b) + \delta_0 \bar{z}(a) = 0,$$

тобто

$$\tilde{V}_1(z) = z^{\{1\}}(b) = 0, \quad \tilde{V}_2(z) = z(a) = 0.$$

2.3.3. Спряжений квазідиференціальний оператор. Спряжений квазідиференціальний вираз $L^*_{mn}(z)$ і спряжені крайові умови (2.103) породжують квазідиференціальний оператор L^* з областю визначення

$$D(L^*) = \Big\{ z : z^{\{k\}} \in AC\,([a,b];\mathbb{C}),\;\; k = \overline{0, m-1},$$
$$z^{\{s\}} \in BV^+\,([a,b];\mathbb{C}),\;\; s = \overline{m, r-1},\;\; V_\nu(z) = 0,\;\; \nu = \overline{1, r} \Big\},$$

який діє з простору $BV^+\,([a,b];\mathbb{C})$ у простір мір. Норма і скалярний добуток для еквівалентних функцій у сенсі (2.63) визначаються в просторі $BV^+\,([a,b];\mathbb{C})$ формулами (2.64), а в просторі мір норма вводиться формулою (2.65).

Означення 2.11. Оператор L^* будемо називати *спряженим* до оператора L.

Ми розглядатимемо також спряжені оператори $L - \lambda\sigma I$ і $L^* - \bar{\lambda}\sigma I$ (I – тотожний оператор), які визначаються спряженими квазідиференціальними виразами $L_{mn}(y) - \lambda\sigma y$ і $L^*_{mn}(z) - \bar{\lambda}\sigma z$ та спряженими крайовими умовами (2.62) й (2.103) відповідно. Області визначення цих операторів збігаються з областями визначення операторів L і L^*.

2.4. Функція Ґріна крайової задачі

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [70].

2.4.1. Побудова скалярної функції Ґріна та її властивості. Для квазідиференціального оператора, породженого самоспряженим квазідиференціальним виразом з мірами в [45] було побудовано функцію Ґріна і досліджено її властивості. Дослідження ж функції Ґріна в несамоспряженому випадку наштовхується на додаткові труднощі, подолання яких спирається на результати попереднього підрозділу. Розглянемо тепер неоднорідне квазідиференціальне рівняння

$$L_{mn}(y) = \lambda\sigma y + f, \tag{2.109}$$

де $f(x) = g'(x)$, $g \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Неоднорідне рівняння (2.109) шляхом введення вектора $Y = \operatorname{colon}\big(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\big)$ зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'Y + F', \tag{2.110}$$

де $F(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, -g(x))$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta C(x)\Delta F(x) \equiv 0$ (див. підрозділ 1.2 і [124, с. 73]).

Побудуємо функцію Ґріна крайової задачі (2.109), (2.62). Нехай $K(x,t,\lambda)$ – функція Коші однорідного рівняння (2.3). З формули про структуру еволюційного оператора (2.40), яка має місце і для фундаментальної матриці системи (2.5) випливає, що $K(x,a,\lambda)$, $K^{\{1\}}(x,a,\lambda)$, …, $K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків квазідиференціального рівняння (2.3) (див. [114, с. 16, 124, с. 105]). Більше того [114, с. 17, 124, с. 114], розв'язок рівняння (2.109) можна подати у вигляді

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} c_k K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) + \int_a^x K(x,t,\lambda)\,dg(t). \tag{2.111}$$

З (1.41) безпосередньо видно завдяки (2.40), що для $j = \overline{1, r}$

$$y^{[j]}(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{r} c_k K^{\{k-1\}[j]}(x, a, \lambda) + \int_a^x K^{[j]}(x, t, \lambda) dg(t),$$

тому підстановка формули (2.111) в крайові умови (2.62) дасть рівності ($\nu = \overline{1, r}$)

$$U_\nu(y) = \sum_{k=1}^{r} c_k U_\nu\Big(K^{\{k-1\}}(x, a, \lambda)\Big) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} \int_a^b K^{[j]}(b, t, \lambda) dg(t). \tag{2.112}$$

У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (2.3), (2.62), визначник цієї системи відрізняється від нуля

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\Big(U_\nu\Big(K^{\{k-1\}}(x, a, \lambda)\Big)\Big) \neq 0, \quad \nu, k = \overline{1, r}. \tag{2.113}$$

Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (2.112) єдиним чином:

$$c_k = -\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)} \beta_{\nu j} \int_a^b K^{[j]}(b, t, \lambda) dg(t), \quad k = \overline{1, r},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x, a, \lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Підставляючи ці значення c_k у формулу (2.111), отримаємо

$$y(x, \lambda) = \int_a^x K(x, t, \lambda) dg(t) -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{r-1} \int_a^b \frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)} \beta_{\nu j} K^{\{k-1\}}(x, a, \lambda) K^{[j]}(b, t, \lambda) dg(t).$$

Означення 2.12. Вираз

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \Omega(x, t, \lambda) + K(x, t, \lambda), & x \geqslant t, \\ \Omega(x, t, \lambda), & x < t, \end{cases} \tag{2.114}$$

де

$$\Omega(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

будемо називати *функцією Ґріна* крайової задачі (2.109), (2.62) (квазідиференціального оператора $L-\lambda\sigma I$).

З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Ґріна. Як видно з наступної теореми, ця функція Ґріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння і її змішаних квазіпохідних, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [76, с. 46–47]).

Теорема 2.5. *Розв'язок задачі* (2.109), (2.62), *в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t,\lambda)dg(t), \tag{2.115}$$

де функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ подається формулою (2.114) *і має наступні властивості*:

1) *квазіпохідні за першою змінною $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{0,n-1})$ є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій*;

2) *квазіпохідні $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{n,r-1})$ мають обмежену на проміжку $[a,b]$ варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по t*;

3) *$G(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t),(t,b]$ по x задовольняє однорідне рівняння* (2.3);

4) *$G(x,t,\lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови* (2.62);

5) *для $x=t$ функція $G(x,t,\lambda)$ задовольняє умови стрибка*

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda) - G^{[k]}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k=\overline{0,n-1};$$

$$G^{[n+s]}(t+0,t,\lambda) - G^{[n+s]}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\Delta b_{n-i,s+1}(t)K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda)\times$$

$$\times K^{[j]}(b,t,\lambda), \quad s=\overline{0,m-2};$$

$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda)-G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=1-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\Delta b_{n-i,m}(t)K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda)\times$$

$$\times K^{[j]}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Формула (2.115) була доведена вище. Внаслідок того, що функції $K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,r})$ є розв'язками рівняння (2.3) за змінною x, для них має місце твердження 2.1, тобто функції $K^{[s]\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=\overline{0,n-1}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s=\overline{n,r-1}$. Згідно з наслідком [112] функції $K^{[i]*}(x,t,\lambda)$ $(i=\overline{0,r-1})$ є розв'язками спряженого квазідиференціального рівняння (2.11) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 2.2, зокрема функції $K^{[i]*}(x,t,\lambda)$ $(i=\overline{0,r-1})$ будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (2.114) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$G^{[s]}(x,t,\lambda)=P^{[s]}(x,t,\lambda)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}K^{[s]\{k-1\}}(x,a,\lambda)\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $G(x,t,\lambda)$. Для доведення пункту 5) використовуються співвідношення

$$K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(t,\lambda)y_q(x,\lambda), \quad k=\overline{1,r}, \tag{2.116}$$

які випливають з того факту, що всі $K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (2.3); $y_q(x)$, $q=\overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.3). Тоді, внаслідок рівності (2.9), ми маємо

$$K^{[n+s]\{k-1\}}(t+0,a,\lambda)-K^{[n+s]\{k-1\}}(t-0,a,\lambda)=$$
$$=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\Big(y_q^{[n+s]}(t+0,\lambda)-y_q^{[n+s]}(t-0,\lambda)\Big)=$$
$$=\sum_{q=1}^{r}c_{kq}(a,\lambda)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,s+1}(t)y_q^{[i]}(t,\lambda)=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,s+1}(t)K^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda),\quad k=\overline{1,r},\quad s=\overline{0,m-1},$$

звідки, врахувавши пункт 1), властивості функції Коші $K(x,t,\lambda)$, а також збіг перших $n-1$ квазіпохідних у сенсі вихідного рівняння зі звичайними похідними, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta b_{ij}(x)=0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, властивість 5) набуває «класичного» вигляду

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda)-G^{[k]}(t-0,t,\lambda)=0,\quad k=\overline{0,r-2};$$
$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda)-G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda)=1.$$

Зауваження 2. Функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda)=(-1)^r\frac{Q(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\tag{2.117}$$

де

$$Q(x,t,\lambda)=\det(\mathcal{K},\mathcal{P}),\tag{2.118}$$

$$\mathcal{K}=\begin{pmatrix}K(x,a,\lambda) & K^{\{1\}}(x,a,\lambda) & \cdots & K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)\\ U_1(K(x,a,\lambda)) & U_1(K^{\{1\}}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda))\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_r(K(x,a,\lambda)) & U_r(K^{\{1\}}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_r(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda))\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix}P(x,t,\lambda)\\ U_1(P(x,t,\lambda))\\ \cdots\\ U_r(P(x,t,\lambda))\end{pmatrix},$$

а
$$P(x,t,\lambda)=\begin{cases}K(x,t,\lambda), & x\geqslant t,\\ 0, & x<t.\end{cases}\tag{2.119}$$

Для того щоб переконатись в еквівалентності формул (2.114) і (2.117), достатньо розписати визначник (2.118) за елементами першого рядка й останнього стовпця:
$$Q(x,t,\lambda)=(-1)^{r+2}P(x,t,\lambda)\Delta(\lambda)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r+3}U_\nu(P(x,t,\lambda))K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)A_{\nu,k},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Оскільки, внаслідок (2.119),
$$U_\nu(P(x,t,\lambda))=\sum_{j=0}^{r-1}\beta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

від (2.117) ми зразу приходимо до формули (2.114).

2.4.2. Розв'язувальне ядро задачі (2.110), (2.100). Розв'язок задачі (2.110), (2.100), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матричного аналогу скалярної функції Ґріна) і вектора F. Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Ґріна задачі (2.109), (2.62).

Для задачі (2.110), (2.100) має місце формула (див. [124, с. 115])
$$Y(x)=B(x,a)Y(a)+\int_a^x B(x,t)dF(t),\tag{2.120}$$

де $B(x,t)=B(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця системи (2.5); вона подається у вигляді $B(x,t,\lambda)=R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ – інтегральна матриця системи (2.5). Ми можемо записати рівність (2.120) наступним чином:
$$Y(x)=R(x,\lambda)C+\int_a^x B(x,t,\lambda)dF(t),\tag{2.121}$$

де $C = \operatorname{colon}(c_1, c_2, \ldots, c_r)$, $C = R^{-1}(a,\lambda)Y(a)$. Підставивши (2.121) в умови (2.100), отримаємо, внаслідок того, що $|W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)| \neq 0$ (оскільки λ не є власним значенням крайової задачі), вираз для стовпця C

$$C = -\left\{W_a R\left(a,\lambda\right) + W_b R\left(b,\lambda\right)\right\}^{-1} \int\limits_a^b W_b B\left(b,t,\lambda\right) dF\left(t\right).$$

Тому

$$Y(x) = \int\limits_a^x B(x,t,\lambda) dF(t) -$$
$$- R(x,\lambda)\left\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\right\}^{-1} \int\limits_a^b W_b B(b,t,\lambda) dF(t).$$

Оскільки

$$R(x,\lambda)\left\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\right\}^{-1} =$$
$$= \left\{W_a R(a,\lambda) R^{-1}(x,\lambda) + W_b R(b,\lambda) R^{-1}(x,\lambda)\right\}^{-1},$$

ми одержимо формулу

$$Y(x) = \int\limits_a^b M(x,t,\lambda) dF(t), \tag{2.122}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} B(x,t,\lambda) + \Omega_1(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \Omega_1(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases}$$

а

$$\Omega_1(x,t,\lambda) = -\left\{W_a B(a,x,\lambda) + W_b B(b,x,\lambda)\right\}^{-1} W_b B(b,t,\lambda).$$

2.4.3. Зв'язок між функціями Ґріна спряжених крайових задач. Нехай $H(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна спряженої крайової задачі

$$L^*_{mn}(z) = \bar{\lambda}\sigma z + \hat{f} \tag{2.123}$$

з крайовими умовами (2.103) (оператора $L^* - \bar{\lambda}\sigma I$), $\hat{f} = \hat{g}'$, $\hat{g} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Вона будується за допомогою функції Коші $\hat{K}(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння (2.11) і її змішаних квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого рівнянь.

Теорема 2.6. *Розв'язок задачі (2.123), (2.103), у припущенні, що λ не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді*

$$z(x) = \int\limits_a^b H(x,t,\lambda)d\hat{g}(t), \tag{2.124}$$

де функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ подається формулою

$$H(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}(x,t,\lambda) + \hat{K}(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases} \tag{2.125}$$

$$\hat{\Omega}(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\hat{K}^{[k-1]}(x,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

фігурними дужками тут позначаються квазіпохідні в сенсі рівняння (2.11) за першою змінною, а квадратними – в сенсі спряженого до (2.11) рівняння (2.3) за другою змінною, $\hat{A}_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $V_\nu\Big(\hat{K}^{[k-1]}(x,a,\lambda)\Big)$ у визначнику

$$\hat{\Delta}(\lambda) \equiv \det\Big(V_\nu\Big(\hat{K}^{[k-1]}(x,a,\lambda)\Big)\Big)_{\nu,k=1}^{r}.$$

Функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ має наступні властивості:

1) *квазіпохідні за першою змінною $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0,m-1})$ є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*

2) *квазіпохідні* $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{m,r-1})$ *мають обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по* t;

3) $H(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t),(t,b]$ *по* x *задовольняє однорідне рівняння* (2.11);

4) $H(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови* (2.103);

5) *для* $x=t$ *функція* $H(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$H^{\{k\}}(t+0,t,\lambda)-H^{\{k\}}(t-0,t,\lambda)=0, \quad k=\overline{0,m-1};$$

$$H^{\{m+s\}}(t+0,t,\lambda)-H^{\{m+s\}}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t)\hat{K}^{(i)[k-1]}(t,a,\lambda)\times$$

$$\times\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda), \quad s=\overline{0,n-2};$$

$$H^{\{r-1\}}(t+0,t,\lambda)-H^{\{r-1\}}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=1+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\Delta\bar{b}_{n,m-i}(t)\hat{K}^{(i)[k-1]}(t,a,\lambda)\times$$

$$\times\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Для доведення цієї теореми застосовуються міркування, аналогічні використаним при доведенні теореми 2.5. Відомо [114, с. 16, 124, с. 105], що функції $\hat{K}(x,a,\lambda)$, $\hat{K}_t^{[1]}(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $\hat{K}_t^{[r-1]}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.11) і розв'язок рівняння (2.123) можна подати у вигляді

$$z(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}c_k\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)+\int_a^x\hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t). \tag{2.126}$$

Оскільки

$$z^{\{j\}}(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}c_k\hat{K}_{tx}^{[k-1]\{j\}}(x,a,\lambda)+$$

$$+\int_a^x \hat{K}_x^{\{j\}}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad j=\overline{1,r},$$

підстановка (2.126) в крайові умови (2.103) дасть рівності

$$V_\nu(z)=\sum_{k=1}^{r} c_k V_\nu\Big(\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\Big)+$$
$$+\sum_{j=0}^{r-1}\hat{\beta}_{\nu j}\int_a^b \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad \nu=\overline{1,r}. \tag{2.127}$$

У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (2.11), (2.103), визначник системи (2.127) відрізняється від нуля $\hat{\Delta}(\lambda)\neq 0$. Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (2.127) єдиним чином:

$$c_k=-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\int_a^b \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad k=\overline{1,r}.$$

Підставивши ці значення c_k у формулу (2.126), отримаємо

$$z(x,\lambda)=\int_a^x \hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t)-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\int_a^b\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\hat{K}_t^{[k-1]}(x,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t).$$

Позначивши функцію Ґріна $H(x,t,\lambda)$ формулою (2.125), ми прийдемо до формули (2.124).

Внаслідок того, що функції $\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,r})$ є розв'язками рівняння (2.11) за змінною x, для них має місце твердження 2.2, тобто функції $\hat{K}_{xt}^{\{s\}[k-1]}(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=\overline{0,m-1}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s = \overline{m, r-1}$. Згідно з наслідком [112] функції $\hat{K}_x^{\{i\}*}(x,t,\lambda)$ $(i = \overline{0, r-1})$ є розв'язками квазідиференціального рівняння (2.3) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 2.1, зокрема функції $\hat{K}_x^{\{i\}*}(x,t,\lambda)$ $(i = \overline{0, r-1})$ будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (2.125) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$H_x^{\{s\}}(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda) + \hat{K}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases}$$

причому

$$\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \hat{K}_{xt}^{\{s\}[k-1]}(x,a,\lambda)\hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $H(x,t,\lambda)$. Залишилось довести пункт 5). Для цього розглянемо співвідношення

$$\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda) = \sum_{q=1}^{r} c_{kq}(t,\lambda) z_q(x,\lambda), \quad k = \overline{1,r},$$

які випливають з того факту, що всі $\hat{K}_t^{[k-1]}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (2.11); $z_q(x)$, $q = \overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.11). Тоді, внаслідок рівності (2.14) ми маємо

$$\hat{K}_{xt}^{\{m+s\}[k-1]}(t+0,a,\lambda) - \hat{K}_{xt}^{\{m+s\}[k-1]}(t-0,a,\lambda) =$$

$$= \sum_{q=1}^{r} c_{kq}(a,\lambda)\Big(z_q^{\{m+s\}}(t+0,\lambda) - z_q^{\{m+s\}}(t-0,\lambda)\Big) =$$

$$= -\sum_{q=1}^{r} c_{kq}(a,\lambda) \sum_{i=0}^{m-1} \Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t) z_q^{\{i\}}(t,\lambda) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{m-1} \Delta\bar{b}_{s+1,m-i}(t)\hat{K}_{xt}^{\{i\}[k-1]}(t,a,\lambda), \quad k = \overline{1,r}, \quad s = \overline{0,n-1},$$

звідки, врахувавши пункт 1), властивості функції Коші $\hat{K}(x,t,\lambda)$, а також збіг перших $m-1$ квазіпохідних у сенсі спряженого рівняння зі звичайними похідними, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Теорема 2.7. *Для $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням крайових задач* (2.3), (2.62) *та* (2.11), (2.103), *функції Ґріна спряжених крайових задач* (2.109), (2.62) *і* (2.123), (2.103) *пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda) = \overline{H(t,x,\lambda)}.$$

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Ґріна спряжених крайових задач

$$L_{mn}(y) - \lambda\sigma(x)y = -f_1(x), \tag{2.128}$$

$$U_\nu\left(y\right) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{\nu j} y^{[j]}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{2.129}$$

і

$$L^*_{mn}(y) - \bar{\lambda}\sigma(x)z = f_2(x), \tag{2.130}$$

$$V_\nu\left(z\right) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{2.131}$$

відповідно, де $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дійснозначні неперервні на $[a,b]$ функції. Ці задачі внаслідок введення векторів $Y = \operatorname{colon}\left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\right)$ і $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{r-1\}}, \ldots, z^{\{1\}}, z\right)$ зводяться до задач

$$\begin{cases} Y' = C'Y + F_1, \\ W_aY(a) + W_bY(b) = 0 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} Z' = -\left(C^*\right)' Z + F_2, \\ \tilde{W}_aZ(a) + \tilde{W}_bZ(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де

$$F_1(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, f_1(x)), \quad F_2(x) = \operatorname{colon}(f_2(x), 0, \ldots, 0),$$

а W_a, W_b, $\tilde{W}_a$, $\tilde{W}_b$ – матриці порядку $r \times r$.

Оскільки добутки $(Z^*)'Y$ і Z^*Y' коректні, то

$$(Z^*Y)' = (Z^*)'Y + Z^*Y' =$$
$$= -Z^*C'Y + F_2^*Y + Z^*C'Y + Z^*F_1 = Z^*F_1 + F_2^*Y.$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (2.103), можна переконатись у правильності рівності (2.101) для неоднорідних спряжених крайових задач (2.128)–(2.131). Дійсно, в лінійно незалежній системі (2.129) є $2r$ невідомих $y^{[j]}(a)$, $y^{[j]}(b)$ $(j = \overline{1,r})$. Оголосимо r невідомих у системі (2.129) вільними і надамо їм деяких значень. Тоді решта r невідомих визначиться однозначно. Аналогічно, враховуючи лінійну незалежність системи (2.131), можна визначити r невідомих з $z^{\{j\}}(a)$, $z^{\{j\}}(b)$ $(j = \overline{1,r})$ через довільним чином задану решту невідомих. А спряжені до умов (2.129) крайові умови (2.131) побудовано так, що повинна виконуватись рівність (2.101). Довільність вибору вільних невідомих забезпечує правильність співвідношення (2.101) для всіх розв'язків крайових задач (2.128), (2.129) і (2.130), (2.131). Отже,

$$\int\limits_a^b (Z^*(x)F_1(x) + F_2^*(x)Y(x))\,dx = 0$$

або

$$\int\limits_a^b Z^*(t)F_1(t)dt + \int\limits_a^b F_2^*(x)Y(x)dx = 0.$$

Згідно з формулою (2.122)

$$Y(x) = \int\limits_a^b M(x,t,\lambda)F_1(t)dt, \quad Z(t) = \int\limits_a^b N(t,x,\lambda)F_2(x)dx.$$

Врахувавши (2.115) і (2.124), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює

$-G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x) dx \right)^* F_1(t) dt +$$
$$+ \int_a^b F_2^*(x) \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t) dt dx = 0,$$

тобто

$$\int_a^b \int_a^b F_2^*(x) \left\{ N^*(t,x,\lambda) + M(x,t,\lambda) \right\} F_1(t) dx dt =$$
$$= \int_a^b \int_a^b \left\{ -G(x,t,\lambda) + \overline{H(t,x,\lambda)} \right\} f_1(t) f_2(x) dx dt = 0.$$

Оскільки в фігурних дужках справа стоїть неперервна функція змінних x і t, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ – також (довільні) дійснозначні неперервні функції, то згідно з основною лемою варіаційного числення (див., наприклад, [136, с. 295–296])

$$\overline{H(t,x,\lambda)} - G(x,t,\lambda) = 0,$$

що й завершує доведення.

2.4.4. Аналітична природа функції Ґріна у випадку простих полюсів. Оскільки чисельник і знаменник у формулі (2.114) є, очевидно, цілими аналітичними функціями параметра λ, функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ задачі (2.109), (2.62) є мероморфною функцією параметра λ; її полюсами можуть бути лише власні значення крайової задачі (2.3), (2.62).

Нехай λ_0 – простий нуль функції $\Delta(\lambda)$. Тоді λ_0 може бути лише простим полюсом функції $G(x,t,\lambda)$, отже

$$G(x,t,\lambda) = \frac{R(x,t)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x,t,\lambda), \tag{2.132}$$

де $G_1(x,t,\lambda)$ регулярна в околі точки λ_0. Визначимо $R(x,t)$ так само, як це робиться у випадку диференціального оператора в [76, с. 48–49].

Якщо λ_0 взагалі не є особливою точкою функції $G(x,t,\lambda)$, то будемо вважати $R(x,t)=0$.

Згідно з відомою формулою теорії лишків

$$R(x,t)=(-1)^r\frac{Q(x,t,\lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)},$$

де $Q(x,t,\lambda)$ визначається формулою (2.118). Очевидно, що $R(x,t)$ як лінійна комбінація розв'язків (2.3) за (2.116), за першою змінною задовольняє рівняння $L_{mn}(R)-\lambda_0\sigma R=0$. За побудовою $Q(x,t,\lambda_0)$, а отже, і $R(x,t)$ при фіксованому t задовольняє крайові умови (2.62).

Таким чином, $R(x,t)$ – власна функція крайової задачі (2.3), (2.62), відповідна власному значенню λ_0. Але, оскільки λ_0 – простий нуль функції $\Delta(\lambda)$, йому відповідає з точністю до множника, що не залежить від x, лише одна власна функція $y_0(x)$ крайової задачі (2.3), (2.62). Отже,

$$R(x,t)=a(t)y_0(x). \tag{2.133}$$

Врахувавши теорему 2.7 і формулу (2.132), для функції Ґріна $H(x,t,\lambda)$ оператора $L^*-\bar{\lambda}\sigma I$ будемо мати

$$H(x,t,\lambda)=\frac{\overline{R(t,x)}}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0}+\overline{G_1(t,x,\lambda)}.$$

Тому $\overline{R(t,x)}$ за фіксованого t є власною функцією крайової задачі (2.123), (2.103), що відповідає власному значенню $\bar{\lambda}_0$. Позначивши через $z_0(x)$ одну з таких функцій, матимемо $\overline{R(t,x)}=b(t)z_0(x)$ або $R(x,t)=\overline{b(x)z_0(t)}$. Врахувавши (2.133), отримаємо рівність

$$R(x,t)=cy_0(x)\overline{z_0(t)}. \tag{2.134}$$

Залишається визначити сталу c.

Врахувавши (2.134) і помноживши (2.132) на $\sigma(t)y_0(t)$ та зінтегрувавши це співвідношення по t, одержимо рівність

$$(\lambda-\lambda_0)\int\limits_a^b G(x,t,\lambda)\sigma(t)y_0(t)dt = cy_0(x)\int\limits_a^b \sigma(t)y_0(t)\overline{z_0(t)}dt +$$

$$+(\lambda-\lambda_0)\int\limits_a^b G_1(x,t,\lambda)\sigma(t)y_0(t)dt. \qquad (2.135)$$

Інтеграл в останньому доданку є однозначною аналітичною функцією параметра λ в околі точки λ_0. Тоді

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\int\limits_a^b G(x,t,\lambda)\sigma(t)y_0(t)dt = cy_0(x)\int\limits_a^b \sigma(t)y_0(t)\overline{z_0(t)}dt.$$

З іншого боку,

$$(L-\lambda\sigma I)y_0 = (\lambda_0-\lambda)\sigma y_0,$$

звідки

$$(L-\lambda\sigma I)^{-1}\sigma y_0 = \frac{1}{\lambda_0-\lambda}y_0.$$

Оскільки $G(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $L-\lambda\sigma I$, то, врахувавши, що для сумовної функції $f(t)=g'(t)$ вираз $dg(t)$ у формулі (2.115) перетворюється у $f(t)dt$, останню рівність можна переписати у вигляді

$$\int\limits_a^b G(x,t,\lambda)\sigma(t)y_0(t)dt = \frac{1}{\lambda_0-\lambda}y_0(x).$$

Підставивши її в (2.135), отримаємо, що

$$-y_0(x) = cy_0(x)\int\limits_a^b \sigma(t)y_0(t)\overline{z_0(t)}dt;$$

звідси можна визначити c і, підставивши його в (2.134), прийти до рівності

$$R(x,t) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(t)}}{\int\limits_a^b \sigma(\tau) y_0(\tau)\overline{z_0(\tau)}d\tau}.$$

Пронормуємо функції $y_0(x)$ і $z_0(x)$ так, щоб

$$\int\limits_a^b \sigma(\tau) y_0(\tau)\overline{z_0(\tau)}d\tau = 1. \tag{2.136}$$

Тоді (2.132) запишеться у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(t)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,t,\lambda). \tag{2.137}$$

2.5. Розвинення за власними функціями

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [64].

2.5.1. Оцінка функції Ґріна. Будемо вважати без втрати загальності, що $Ly = 0$ лише при $y = 0$, тобто що крайова задача $L_{mn}(y) = 0$, (2.62) має лише тривіальний розв'язок $y \equiv 0$. Дійсно, в протилежному випадку досить замінити $L_{mn}(y)$ виразом $L_{mn}(y) - c\sigma(x)y$, де c – довільне число, відмінне від усіх власних значень крайової задачі (2.3), (2.62). Таке число існує, бо теорема 2.2 свідчить, що ця крайова задача має лише зліченну множину власних значень. Тоді оператор L має функцію Ґріна $G(x,s) = G(x,s,0)$, якщо $G(x,s,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $L - \lambda\sigma I$.

Розвинення за власними функціями будується за схемою, загалом подібною до викладеної в [76, с. 92–98], але наявність квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого до нього квазідиференціальних рівнянь, а також властивості просторів, в яких діють квазідиференціальні оператори, створюють суттєві труднощі, подоланню яких присвячений цей підрозділ.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \dots$, зі спільним центром у початку координат, що мають наступні властивості: 1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає для $k \to \infty$; 2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ власних значень крайової задачі (2.3), (2.62) при відображенні

$$\lambda = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r \tag{2.138}$$

знаходяться для досить великих k на відстані не меншій δ від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Розглянемо також інтеграл

$$I_k(x,s) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,s,\lambda)}{\lambda} d\lambda;$$

застосувавши до нього теорему про лишки, отримаємо

$$I_k(x,s) = G(x,s) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}, \tag{2.139}$$

де $Q_\nu(x,s)$ – лишок функції $G(x,s,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який ми припускаємо простим), а m_k – число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 2.8. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k функція $G(x,s,\lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G(x,s,\lambda)| \leqslant M|\lambda|^{-\frac{r-1}{r}}, \tag{2.140}$$

де M – деяка стала.

Доведення. За відповідного вибору $\arg\rho$ при відображенні (2.138) коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $2\pi/r$, що проходить у двох сусідніх областях $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного r.

1) r – непарне; $r = 2\mu - 1$. Нехай згідно з твердженням 2.5 числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ (різні корені r-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{S}_0$ виконується ланцюг нерівностей (2.25) (c тут дорівнює 0). Тоді згідно з формулами (2.76), (2.77) для $\rho \in \mathcal{S}_0$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ \operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ldots, \operatorname{Re}(\rho\omega_r) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.141}$$

Нехай γ_k' – та частина дуги γ_k, яка знаходиться в області $\mathcal{S}_0$ і на якій $\operatorname{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а γ_k'' – та її частина, яка теж знаходиться в цій області і на якій $\operatorname{Re}(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$. Оцінимо функцію $G(x, s, \lambda)$ на дузі γ_k', скориставшись формулами (2.113), (2.117) – (2.119).

Нехай $\tilde{K}(x, a, \lambda)$ – функція Коші квазідиференціального рівняння (2.3). Тоді функції $K(x, a, \lambda)$, $K^{\{1\}}(x, a, \lambda)$, $\ldots$, $K^{\{r-1\}}(x, a, \lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.3). З іншого боку, згідно з формулою (2.116) їх можна подати як лінійну комбінацію деякої іншої лінійно незалежної системи розв'язків рівняння (2.3). Нехай $y_j = y_j(x, \lambda)$ $(j = \overline{1, r})$ – та лінійно незалежна система розв'язків рівняння (2.3), для якої справджуються асимптотичні формули (2.51). Тоді

$$K^{\{k-1\}}(x, a, \lambda) = \sum_{j=1}^{r} c_{kj}(\lambda) y_j(x, \lambda), \quad k = \overline{1, r}.$$

Оскільки

$$U_\nu\left(\sum_{j=1}^{r} c_{kj} y_j\right) = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} U_\nu(y_j), \quad \nu = \overline{1, r},$$

$$\begin{pmatrix} U_1(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_r(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_r(K^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{r} c_{1j} U_1(y_j) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{r} c_{rj} U_1(y_j) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{r} c_{1j} U_r(y_j) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{r} c_{rj} U_r(y_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_r(y_1) & \cdots & U_r(y_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1r} & \cdots & c_{rr} \end{pmatrix}, \tag{2.142}$$

врахувавши властивості визначників, отримаємо

$$\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda) C_r(\lambda),$$

де

$$C_r(\lambda) = \det\left(c_{ij}(\lambda)\right)_{i,j=1}^{r}, \quad \tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(U_\nu(y_k)\right)_{\nu,k=1}^{r}.$$

Розклавши визначник (2.118) за елементами останнього стовпця, застосувавши до кожного з $r+1$ визначників r-го порядку перетворення, аналогічні (2.142), та врахувавши властивості визначників, можна прийти до рівності

$$\begin{gathered} Q(x,s,\lambda) = (-1)^r P(x,s,\lambda) C_r(\lambda) \tilde{\Delta}(\lambda) + \\ + (-1)^{r+1} U_1(P(x,s,\lambda)) C_r(\lambda) \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_r(x) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_r(y_1) & U_r(y_2) & \cdots & U_r(y_r) \end{vmatrix} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{2r} U_r(P(x,s,\lambda)) C_r(\lambda) \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_r(x) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{r-1}(y_1) & U_{r-1}(y_2) & \cdots & U_{r-1}(y_r) \end{vmatrix}, \end{gathered}$$

де $P(x,s,\lambda)$ подається рівністю (2.119). Звідси випливає формула

$$Q(x,s,\lambda) = \tilde{Q}(x,s,\lambda) C_r(\lambda),$$

де

$$\tilde{Q}(x,s,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_r(x) & P(x,s,\lambda) \\ U_1(y_1(x)) & U_1(y_2(x)) & \cdots & U_1(y_r(x)) & U_1(P(x,s,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_r(y_1(x)) & U_r(y_2(x)) & \cdots & U_r(y_r(x)) & U_r(P(x,s,\lambda)) \end{vmatrix}. \tag{2.143}$$

Тоді формула (2.117) перепишеться у вигляді

$$G(x,s,\lambda) = (-1)^r \frac{\tilde{Q}(x,s,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}. \tag{2.144}$$

Зауважимо, що

$$U_\nu(P(x,s,\lambda)) = U_{\nu b}(K(x,s,\lambda)) =$$
$$= \beta_\nu K^{[k_\nu]}(b,s,\lambda) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \tilde{\beta}_{\nu j} K^{[j]}(b,s,\lambda).$$

Результати пункту 2.1.4, зокрема і формула (2.38), мають місце і тоді, коли $K(x,s,\lambda)$ – функція Коші рівняння (2.3), а не (2.19), а її квазіпохідні в сенсі вихідного рівняння подаються формулами (2.2) замість (2.21) (див. зауваження в кінці пункту 2.1.6). Це пов'язано з тим, що асимптотичні формули (2.51) і (2.29) фундаментальної системи розв'язків обидвох рівнянь (2.3) і (2.19), а також їхніх квазіпохідних, збігаються для великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$. Отже,

$$K^{[j]}(x,s,\lambda) = -\frac{Q_{j0}(x,s)}{r\rho^{r-1-j}} \sum_{k=1}^{r} e^{\rho\omega_k(t(x)-t(s))} \langle \omega_k^{j+1} \rangle_{x,s}$$

для $j = \overline{0, r-1}$, що, врахувавши формули (2.30), (2.36), (2.51) та рівність $\hat{R}_{r-1}(s) = (-1)^{m-1} a_{00}(s)$, можна записати у вигляді

$$K^{[j]}(x,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} y_k^{[j]}(x,\lambda) z_k(s,\lambda),$$

де для $k = \overline{1, r}$

$$z_k(s,\lambda) = \frac{(-1)^m}{r\rho^{r-1}} a_{00}^{-1}(s) \hat{E}^{-1}(s) \big(t'(s)\big)^{1-r} e^{-\rho\omega_k t(s)} \langle \omega_k \rangle_s. \tag{2.145}$$

Розглянемо функцію $G(x,s,\lambda)$ для $x > s$ (у випадку $x < s$ міркування будуть аналогічними); тоді останній елемент першого рядка у визначнику (2.143) є функцією Коші $K(x,s,\lambda)$. Помножимо $(\mu+1)$-й, $(\mu+2)$-й, $\ldots$, r-й стовпці визначника $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$

на $-z_{\mu+1}(s)$, $-z_{\mu+2}(s)$, ..., $-z_r(s)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ будуть

$$\sum_{k=1}^{\mu} y_k(x) z_k(s), \tag{2.146}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} U_{\nu b}(y_k) z_k(s) - \sum_{k=\mu+1}^{r} U_{\nu a}(y_k) z_k(s), \quad \nu = \overline{1,r}. \tag{2.147}$$

Підставивши вирази (2.51) в нормовані форми $U_\nu(y)$, матимемо

$$U_{\nu a}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} \hat{\alpha}_\nu \varphi_\nu (1 + o(1)) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu \langle\hat{\alpha}_\nu\rangle, \tag{2.148}$$

$$U_{\nu b}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h} \hat{\beta}_\nu \varphi_\nu (1 + o(1)) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h} \langle\hat{\beta}_\nu\rangle, \tag{2.149}$$

де

$$\varphi_\nu = \begin{cases} 1, & k_\nu < n, \\ (-1)^{k_\nu - n}, & k_\nu \geqslant n. \end{cases}$$

Звідси

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu \{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h} \langle\hat{\beta}_\nu\rangle\}, \quad \nu, j = \overline{1,r}.$$

Отже, на підставі нерівностей (2.141) мають місце формули

$$U_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu \langle\hat{\alpha}_\nu\rangle, & j = \overline{1, \mu - 1}, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu \{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h} \langle\hat{\beta}_\nu\rangle\}, & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h} \langle\hat{\beta}_\nu\rangle, & j = \overline{\mu + 1, r}. \end{cases} \tag{2.150}$$

Підставивши їх у $\tilde{\Delta}(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{r} \rho^{k_\nu} \varphi_\nu \prod_{j=\mu+1}^{r} e^{\rho\omega_j h} (\langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h} \langle\theta_1\rangle). \tag{2.151}$$

Врахувавши (2.51), (2.145), (2.148) і (2.149), ми можемо переписати (2.146), (2.147) у вигляді

$$\frac{\hat{E}(x)}{r\rho^{r-1}}P_0 = \frac{1}{r\rho^{r-1}}\frac{(-1)^m\hat{E}(x)}{a_{00}(s)\hat{E}(s)}(t'(s))^{1-r}\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(s))}\langle\omega_j\rangle_{x,s},$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}\varphi_\nu}{r\rho^{r-1}}P_\nu = \frac{\rho^{k_\nu}\varphi_\nu}{r\rho^{r-1}}(-1)^m a_{00}^{-1}(s)\hat{E}^{-1}(s)(t'(s))^{1-r}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(h-t(s))}\langle\hat{\beta}_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\rangle_s - \sum_{j=\mu+1}^{r} e^{-\rho\omega_j t(s)}\langle\hat{\alpha}_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\rangle_s\right\},$$
$$\nu=\overline{1,r}.$$

Підставимо тепер (2.143), (2.51), (2.145), (2.150), (2.151), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ в (2.144) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ наступним чином. На $\rho^{k_\nu}\varphi_\nu$ розділимо $(\nu+1)$-й рядок ($\nu=\overline{1,r}$), на $e^{\rho\omega_j h}$ – j-й стовпець ($j=\overline{\mu+1,r}$) і на $\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ поділимо μ-й стовпець. Тоді формула (2.144) набуде вигляду

$$G(x,s,\lambda) = (-1)^r\frac{\hat{E}(x)}{r\rho^{r-1}}\det(A,B), \tag{2.152}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} e^{\rho\omega_1 t(x)}\langle 1\rangle_x & \cdots & e^{\rho\omega_{\mu-1}t(x)}\langle 1\rangle_x & \frac{e^{\rho\omega_\mu t(x)}\langle 1\rangle_x}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \\ \langle\hat{\alpha}_1\omega_1^{k_1}\rangle & \cdots & \langle\hat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1}\rangle & \frac{\omega_\mu^{k_1}\langle\hat{\alpha}_1+e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_1\rangle}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\alpha}_r\omega_1^{k_r}\rangle & \cdots & \langle\hat{\alpha}_r\omega_{\mu-1}^{k_r}\rangle & \frac{\omega_\mu^{k_r}\langle\hat{\alpha}_r+e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_r\rangle}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} e^{\rho\omega_{\mu+1}(t(x)-h)}\langle 1\rangle_x & \cdots & e^{\rho\omega_r(t(x)-h)}\langle 1\rangle_x & P_0 \\ \langle\hat{\beta}_1\omega_{\mu+1}^{k_1}\rangle & \cdots & \langle\hat{\beta}_1\omega_r^{k_1}\rangle & P_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\beta}_r\omega_{\mu+1}^{k_r}\rangle & \cdots & \langle\hat{\beta}_r\omega_r^{k_r}\rangle & P_r \end{pmatrix}.$$

На дугах γ_k' внаслідок регулярності крайових умов знаменник $\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ обмежується знизу одним і тим самим числом.

Справді, дуги γ_k' можна доповнити до кіл B_k. Повторимо тепер міркування з доведення теореми 2.2 (див. стор. 81). Розглянемо функцію

$$f = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1 = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_0)h} - 1$$

(бо $(\rho_k - \rho_0)\omega_\mu h = 2k\pi i$). Введемо нову змінну ζ, поклавши

$$\omega_\mu(\rho - \rho_0)h = \zeta.$$

Тоді

$$f = e^\zeta - 1$$

і кола B_k перейдуть у кола Γ_k' навколо точок $\zeta_k = 2k\pi i$. Розглянемо спочатку область D, обмежену прямими $\operatorname{Im}\zeta = \pm\pi$ і колом Γ_0' (рис. 2 на стор. 81). У цій області функція $f(\zeta)$ не перетворюється в нуль, а для $|\operatorname{Re}\zeta|$ достатньо великих ($|\operatorname{Re}\zeta| > N$) функція $f(\zeta)$ обмежена знизу, оскільки

$$\lim_{\operatorname{Re}\zeta\to+\infty} |f(\zeta)| = \infty, \qquad \lim_{\operatorname{Re}\zeta\to-\infty} |f(\zeta)| = 1.$$

Отже, внаслідок того, що $f(\zeta)$ – періодична функція з періодом $2\pi i$, вона скрізь на колах Γ_k' і зовні цих кіл обмежена знизу додатним числом.

Тоді внаслідок умов (2.141) всі елементи визначника (2.152) на дузі γ_k' обмежені зверху, бо експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' має місце нерівність

$$|G(x, s, \lambda)| \leqslant M|\rho|^{1-r}, \tag{2.153}$$

де M – деяка стала.

Доведемо тепер, що така сама нерівність виконується і на дугах γ_k''. Для цього достатньо у визначнику $\tilde{Q}(x, s, \lambda)$ домножити μ-й, $(\mu + 1)$-й, ..., r-й стовпці на $-z_\mu(s)$, $-z_{\mu+1}(s)$, ..., $-z_r(s)$ відповідно і додати до останнього стовпчика. Повторивши попередні міркування, легко переконатись у правильності нерівності (2.153) і на дугах γ_k''.

Таким чином, (2.153) доведено для тієї частини дуги γ_k, що лежить у секторі $\mathcal{S}_0$. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області $\mathcal{S}_\nu$, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі $\mathcal{S}_1$. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження теореми для випадку непарного r.

2) r парне; $r = 2\mu$. Цей випадок завдяки тому, що умови для y_μ і $y_{\mu+1}$ записуються у вигляді

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\, \varphi_\nu\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\},$$
$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\, \varphi_\nu\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_{\mu+1} h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\},$$

відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз $\langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle + e^{-\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ ($\theta_1 \neq 0$, $\theta_{-1} \neq 0$ внаслідок регулярності), який можна подати у вигляді

$$\theta_1\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'\Big)\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi''\Big)(1 + o(1)),$$

де ξ', ξ'' – корені рівняння $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$.

В цьому випадку μ-й і $(\mu+1)$-й стовпці потрібно поділити відповідно на $e^{\rho\omega_\mu h}\langle 1\rangle - \langle\xi'\rangle$ та $e^{\rho\omega_\mu h}\langle 1\rangle - \langle\xi''\rangle$. Аналогічно до випадку непарного r доводиться, що ці знаменники теж будуть обмежені знизу на дузі γ_k. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними випадку дуги γ'_k, бо на дузі γ_k $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, $\mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0$ внаслідок того, що рівняння $\omega^{2\mu} + 1 = 0$ містить поряд з ω_j корінь $-\omega_j$ $(j = \overline{1, r})$. Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми 2.8 видно, що нерівність (2.140) залишається правильною для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho - \rho_k| < \delta$ при відображенні (2.24).

2.5.2. Розвинення функцій з області визначення оператора L.

Теорема 2.9. *Функція Ґріна $G(x, s)$ квазідиференціального оператора L, породженого регулярними крайовими умовами* (2.62), *розвивається в рівномірно збіжний відносно x і s з $[a, b]$*

ряд

$$G(x,s) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}. \qquad (2.154)$$

Доведення. Користуючись теоремою 2.8 і зауваженням до неї, отримуємо оцінки

$$|I_k(x,s)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R_k^{\frac{r-1}{r}} R_k} 2\pi R_k = \frac{M}{R_k^{\frac{r-1}{r}}},$$

$$\left| \frac{Q_k(x,s)}{\lambda_k} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi\lambda_k} \int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} r\rho^{r-1} G\big(x,s,(-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(\sigma a_{00})\rho^r\big)\, d\rho \right| \leqslant \frac{rM\delta}{|\lambda_k|},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,s) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_k(x,s)}{\lambda_k} = 0, \qquad (2.155)$$

причому рівномірно відносно x і s з $[a,b]$. Внаслідок (2.139) і (2.155), оскільки з асимптотичних формул для власних значень (див. теорему 2.2) випливає, що круги Γ_k можна вибрати так, щоб $2 \leqslant m_{k+1} - m_k \leqslant 4$, буде виконуватись формула (2.154), що й доводить теорему.

Теорема 2.10. *Якщо всі власні значення крайової задачі (2.3), (2.62) з регулярними крайовими умовами (2.62), є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$, то для функції Ґріна квазідиференціального оператора L за виконання умови нормованості*

$$\int\limits_a^b \sigma(x) y_\nu(x) \overline{z_\nu(x)} dx = 1 \qquad (2.156)$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x)\overline{z_\nu(s)}}{\lambda_\nu}. \qquad (2.157)$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,s)$ у теоремі 2.9 – лишок функції $G(x,s,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення крайової задачі (2.3), (2.62) – прості нулі функції $\Delta(\lambda)$, то згідно з формулою (2.137) має місце рівність $-Q_\nu(x,s) = y_\nu(x)\overline{z_\nu(s)}$, де $y_\nu(x)$, $z_\nu(s)$ – власні функції спряжених крайових задач (2.3), (2.62) і (2.11), (2.103), відповідні власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$ і пронормовані так, щоб виконувалось співвідношення (2.156). Теорему доведено.

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої функції $f(x)$.

Теорема 2.11. *Нехай всі власні значення крайової задачі (2.3), (2.62) з регулярними крайовими умовами (2.62) є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$. Тоді будь-яка функція $f(x)$ з області визначення квазідиференціального оператора L розвиваєтьcя у рівномірно збіжний ряд за власними функціями крайової задачі (2.3), (2.62)*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu y_\nu(x), \tag{2.158}$$

де за виконання умови (2.156)

$$d_\nu = (f,\ z_\nu)_{BV} = \int_a^b \sigma(s)f(s)\overline{z_\nu(s)}ds,$$

а $y_\nu(x), z_\nu(s)$ – власні функції спряжених крайових задач (2.3), (2.62) і (2.11), (2.103), відповідні власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $Lf = \varphi'$, $L^* z_\nu = \psi'_\nu$, де $\varphi, \psi_\nu \in$ $\in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Тоді

$$f(x) = \int_a^b G(x,s)d\varphi(s), \quad z_\nu(x) = \int_a^b H(x,s)d\psi_\nu(s), \tag{2.159}$$

де $H(x,s)$ – функція Ґріна квазідиференціального оператора L^*. Підставимо в першу формулу (2.159) замість функції $G(x,s)$ її розвинення (2.157). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, ми можемо його інтегрувати почленно. Отже, має місце формула (2.158), де

$$d_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b \overline{z_\nu(s)} d\varphi(s). \tag{2.160}$$

Оскільки за теоремою 2.7 $G(x,s) = \overline{H(s,x)}$, буде виконуватись і рівність

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b G(x,s) d\varphi(s) = \int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b \overline{H(s,x)} d\varphi(s),$$

звідки за теоремою Фубіні

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b G(x,s) d\varphi(s) = \int\limits_a^b d\varphi(s) \int\limits_a^b \overline{H(s,x) d\psi_\nu(x)}.$$

Тепер, врахувавши (2.159), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_a^b f(x) d\overline{\psi_\nu(x)} = \int\limits_a^b \overline{z_\nu(x)} d\varphi(x). \tag{2.161}$$

З іншого боку, $L^* z_\nu = \bar{\lambda}_\nu \sigma z_\nu$. Тоді

$$\psi_\nu(x) = \int\limits_a^x \bar{\lambda}_\nu \sigma(s) z_\nu(s) ds.$$

Після підстановки останньої рівності в (2.161) отримаємо з (2.160) співвідношення

$$d_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b f(x) \overline{\bar{\lambda}_\nu \sigma(x) z_\nu(x)} dx = \int\limits_a^b \sigma(x) f(x) \overline{z_\nu(x)} dx,$$

що й потрібно було довести.

2.6. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків сингулярного диференціального рівняння

2.6.1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальний вираз

$$M_n(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad (2.162)$$

де $p_1 \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $p_i = b_i'$, $b_i \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{2,n}$. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання. Отже, p_i – міри, тобто узагальнені функції нульового порядку. Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $M_n(y)$ рівняння

$$M_n(y) = \lambda\sigma(x)y, \quad (2.163)$$

де $\sigma \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $\sigma(x) \neq 0$ на $[a,b]$, λ – комплексний параметр, і початкові умови

$$y^{(\nu)}(a) = \tilde{c}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (2.164)$$

Можна розглядати також рівняння

$$\tilde{p}_0(x)y^{(n)} + \tilde{p}_1(x)y^{(n-1)} + \tilde{p}_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + \tilde{p}_n(x)y = \lambda g(x)y,$$

де $\tilde{p}_0, g \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $\tilde{p}_0(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $g(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $\tilde{p}_1 \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $\tilde{p}_i = \tilde{b}_i'$, $\tilde{b}_i \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{2,n}$. Це рівняння діленням на $\tilde{p}_0(x)$ легко зводиться до вигляду (2.163) з коефіцієнтами з вказаних класів.

Диференціальне рівняння (0.13) з коефіцієнтом $p_0 \in \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $p_0(x) \neq 0$ на $[a,b]$, легко зводиться до рівняння вигляду (2.163) шляхом ділення його на $p_0(x)$. Тому цілком достатньо за цих умов розглядати рівняння (2.163) і відповідну йому початкову задачу (2.163), (2.164).

За допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ зведемо рівняння (2.163) до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'(x)Y \quad (2.165)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \lambda\sigma - p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Умови (2.164) тоді набувають вигляду

$$Y(a) = \tilde{C},$$

де $\tilde{C} = \operatorname{colon}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$.

Очевидно, що

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\Delta b_n(x) & \cdots & -\Delta b_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $[\,\Delta C(x)\,]^2 = 0$, то система (2.165) є коректною (див. пункт 1.2.2 і [104]).

Означення 2.13. Диференціальне рівняння називатимемо *коректним*, якщо буде коректною відповідна йому система.

Означення 2.14. Під *розв'язком* диференціального рівняння будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектора $Y(x)$ системи (2.165), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Твердження 2.6 ([114, с. 29, 124, с. 121]). *Існує єдиний розв'язок $y(x)$ задачі Коші для рівняння (2.163) такий, що $y^{(k)} \in AC([a,b];\mathbb{C})$, $k = \overline{0, n-2}$, $y^{(n-1)} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$ і в точках $x_s \in [a,b]$ розривів функцій $b_i(x)$ має місце стрибок, що визначається формулою*

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = -\sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) y^{(i)}(x_s). \tag{2.166}$$

2.6.2. Спряжені квазіпохідні і функція Коші. Система, спряжена до системи (2.165), має вигляд

$$Z' = -\left(C^*(x)\right)' Z, \tag{2.167}$$

де $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{r-1\}}, \dots, z^{\{1\}}, z\right)$. Фігурними дужками тут позначено квазіпохідні в сенсі спряженого до (2.163) рівняння. З (2.167) безпосередньо видно структуру спряженого рівняння і квазіпохідних у сенсі останнього.

Означення 2.15. *Спряженим* до (2.163) називається квазідиференціальне рівняння

$$M_n^*(z) \equiv (-1)^n z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (\bar{p}_i z)^{(n-i)} = \bar{\lambda}\sigma(x) z, \tag{2.168}$$

де $\bar{p}_i(x) = \bar{b}_i'(x) \quad \forall i = \overline{2, n}$.

Означення 2.16. *Квазіпохідними* виразу $M_n^*(z)$ (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (2.168)) називаються функції $z^{\{i\}}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, що визначаються формулами

$$z^{\{0\}} \overset{df}{=} z, \quad z^{\{i\}} = \bar{p}_i z - \left(z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.169}$$

Розглянемо тепер рівняння (2.168) з початковими умовами

$$z^{\{\nu\}}(a) = z_0^{\{\nu\}}, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{2.170}$$

Твердження 2.7 ([115, с. 29, 124, с. 123]). *Існує єдиний розв'язок задачі* (2.168), (2.170) *такий, що* $z \in AC\left([a, b]; \mathbb{C}\right)$, *а квазіпохідні* $z^{\{k\}} \in BV^+\left([a, b]; \mathbb{C}\right), k = \overline{1, n-1}$, *і в точках* $x_s \in [a, b]$ *розривів функцій* $b_i(x)$ *вони мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta z^{\{k\}}(x_s) = \Delta b_{k+1}(x_s) z(x_s), \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{2.171}$$

Означення 2.17. Функція $\tilde{K}(x, t) = \tilde{K}(x, t, \lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (2.163), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a, b]$ задовольняє початкові умови $\tilde{K}^{(i)}(t, t) = 0$ $(i = \overline{0, n-2})$, $\tilde{K}^{(n-1)}(t, t) = 1$.

Означення 2.18. Функція $R(x, t) = R(x, t, \lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (2.168), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a, b]$ задовольняє початкові умови $R_x^{\{i\}}(t, t) = 0$ $(i = \overline{0, n-2})$, $R_x^{\{n-1\}}(t, t) = 1$.

Твердження 2.8 ([114, с. 16]). *Для функцій Коші спряжених диференціального і квазідиференціального рівнянь справджується тотожність*

$$R(x, t) \equiv \overline{\tilde{K}(t, x)}. \tag{2.172}$$

2.6.3. Асимптотика розв'язків рівняння без мір.

Векторне рівняння (2.165) можна подати у вигляді

$$Y' = \Phi' Y + \Psi' Y, \tag{2.173}$$

де

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \lambda\sigma & 0 & \cdots & 0 & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -p_n & \cdots & -p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді система

$$Y' = \Phi' Y \tag{2.174}$$

буде еквівалентною до укороченого рівняння

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} = \lambda\sigma y. \tag{2.175}$$

Покладемо тепер

$$\lambda = -\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n. \tag{2.176}$$

Розіб'ємо комплексну ρ-площину на $2n$ секторів $\mathcal{S}_q$, $q = \overline{0, 2n-1}$, де $\mathcal{S}_q = \{\rho : q\pi/n \leqslant \arg\rho \leqslant (q+1)\pi/n\}$. Через $\mathcal{T}_q$ позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з $\mathcal{S}_q$ шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$. Області $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ називатимемо просто областями $\mathcal{S}$ і $\mathcal{T}$.

Нехай ω_1, ω_2, ..., ω_n – всі різні корені n-го степеня з -1, занумеровані для $\rho \in \mathcal{T}_q$ таким чином (згідно з твердженням 1.1 [76, с. 53–54] це можливо), що

$$\operatorname{Re}((\rho+c)\omega_1) \leqslant \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}((\rho+c)\omega_n). \tag{2.177}$$

Оскільки $\sigma \in W_1^1([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, $\sigma(x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, то виконуються всі умови теореми 1.2 (теореми 1 з [88]) і в кожній області $\mathcal{T}_q$ комплексної ρ-площини рівняння (2.175) має n лінійно незалежних розв'язків y_1, y_2, ..., y_n, регулярних по $\rho \in \mathcal{T}_q$ для достатньо великих $|\rho|$, які мають асимптотику вигляду

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho\omega_k t'(x))^\nu \hat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)}(1+o(1)), \tag{2.178}$$

де $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$,

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[n]{|\sigma(\zeta)|}\,d\zeta, \quad \hat{E}(x) = |\sigma(x)|^{-\frac{n-1}{2n}}\, e^{-\frac{1}{n}\int\limits_a^x p_1(\zeta)d\zeta}. \tag{2.179}$$

2.6.4. Оцінка квазіпохідних функції Коші. Нехай $\tilde{K}(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.175). За допомогою фігурних дужок ми тут позначатимемо квазіпохідні в сенсі спряженого до (2.175) рівняння, їх можна відчитати з відповідної йому спряженої системи $Z' = -(\Phi^*(x))'Z$, де $Z = \operatorname{colon}(z^{\{r-1\}}, z^{\{r-2\}}, \ldots, z)$. Зі структури матриці $\Phi'(x)$ зрозуміло, що

$$z^{\{1\}} = \bar{p}_1 z - z', \quad z^{\{i\}} = -\left(z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Від функції Коші квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння братимуться за другою змінною. Мішані квазіпохідні функції Коші $\tilde{K}^{(i)\{j\}}(x,z)$ $(i,j=\overline{0,n-1})$ можна подати (див. [124, с. 107]) у вигляді

$$\tilde{K}^{(i)\{j\}}(x,z)=\frac{1}{W(z)}\begin{vmatrix} y_1(z) & \dots & y_n(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-j-2)}(z) & \dots & y_n^{(n-j-2)}(z) \\ y_1^{(i)}(x) & \dots & y_n^{(i)}(x) \\ y_1^{(n-j)}(z) & \dots & y_n^{(n-j)}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(z) & \dots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}, \tag{2.180}$$

де

$$W(z)=\det\left(y_q^{(p-1)}(z)\right)_{p,q=1}^{n}, \tag{2.181}$$

а y_1, y_2, ..., y_n – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (2.175), асимптотична поведінка якої для великих значень параметра $|\rho|$ подається формулами (2.178). Підставивши (2.178) в (2.180), (2.181), можна помітити, що з усіх рядків, крім $(n-j)$-го, обидвох визначників виносяться і скорочуються вирази

$$(\rho t'(z))^{\nu}\hat{E}(z) \quad (\nu=\overline{0,n-1}, \quad \nu\neq n-j-1),$$

а з усіх стовпців обидвох визначників виносяться і скорочуються вирази

$$e^{\rho\omega_1 t(z)}, \quad e^{\rho\omega_2 t(z)}, \quad \dots, \quad e^{\rho\omega_n t(z)}.$$

Тепер, розписавши чисельник за елементами $(n-j)$-го рядка, отримаємо для великих значень параметра $|\rho|$

$$\tilde{K}^{(i)\{j\}}(x,z)=\rho^{i+j+1-n}Q_{ij}(x,z)\sum_{k=1}^{n}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}\langle\frac{\gamma_{kj}}{\gamma}\rangle_z^k\langle\omega_k^i\rangle_x^k, \tag{2.182}$$

де

$$Q_{ij}(x,z)=(t'(x))^i(t'(z))^{1+j-n}\hat{E}(x)\hat{E}^{-1}(z), \tag{2.183}$$

$$\gamma=\det\left(\omega_q^{p-1}\right)_{p,q=1}^{n},$$

а γ_{kj} – алгебричні доповнення елементу ω_k^{n-j-1} у визначнику γ.

Нехай $M_{kj} = \dfrac{\gamma_{kj}}{\gamma_{k0}}$, тобто $\gamma_{kj} = M_{kj}\,\gamma_{k0}$, $j = \overline{0, n-1}$. Врахувавши, що для функції Коші $\tilde{K}^{(i)}(z,z) = 0$, $i = \overline{0, n-2}$, $\tilde{K}^{(n-1)}(z,z) = 1$, $Q_{n-1,0}(z,z) = 1$, а $M_{k0} = 1$, розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих γ_{k0}

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \frac{\gamma_{k0}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, n-2}, \\ 1, & i = n-1. \end{cases} \tag{2.184}$$

Система (2.184) має єдиний розв'язок, бо її визначник $\dfrac{\gamma}{\gamma} = 1$; з іншого боку, вона задовольняється для $\dfrac{\gamma_{k0}}{\gamma} = -\dfrac{\omega_k}{n}$, оскільки $\omega_k^n = -1$ і $\omega_1^{i+1} + \omega_2^{i+1} + \ldots + \omega_n^{i+1} = 0$ за лемою 1 підрозділу 2.1. Отже, формула (2.182) набуває вигляду ($i, j = \overline{0, n-1}$)

$$\tilde{K}^{(i)\{j\}}(x,z) = -\frac{Q_{ij}(x,z)}{n\rho^{n-1-i-j}} \sum_{k=1}^{n} M_{kj} e^{\rho\omega_k (t(x)-t(z))} \omega_k^{i+1} \langle 1 \rangle_x \langle 1 \rangle_z. \tag{2.185}$$

2.6.5. Перехід до рівняння з мірами. Ми будемо шукати асимптотику фундаментальної системи розв'язків за допомогою узагальнення методу [172]. Якщо праву частину рівності

$$Y' - \Phi' Y = \Psi' Y$$

розглядати як «неоднорідність», то згідно з формулою для неоднорідного рівняння (1.41)

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,\xi)\,d\Psi(\xi)Y(\xi), \tag{2.186}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця однорідної системи (2.174);

вона має структуру (див. [112, 124, с. 124])

$$B(x,\xi)=\begin{pmatrix} \tilde{K}^{\{n-1\}}(x,\xi) & \cdots & \tilde{K}^{\{1\}}(x,\xi) & \tilde{K}(x,\xi) \\ \tilde{K}^{(1)\{n-1\}}(x,\xi) & \cdots & \tilde{K}^{(1)\{1\}}(x,\xi) & \tilde{K}^{(1)}(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{K}^{(n-1)\{n-1\}}(x,\xi) & \cdots & \tilde{K}^{(n-1)\{1\}}(x,\xi) & \tilde{K}^{(n-1)}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{2.187}$$

де $\tilde{K}(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (2.175). Використавши (2.187) та врахувавши, що

$$d\Psi(\xi)Y(\xi)=\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -\sum\limits_{s=2}^{n} y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi) \end{pmatrix},$$

можна розписати (2.186) покоординатно у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса ($\nu=\overline{0,n-1}$)

$$y^{(\nu)}(x)=\sum_{s=1}^{n}\tilde{c}_s\tilde{K}^{(\nu)\{n-s\}}(x,a)-\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^x\tilde{K}^{(\nu)}(x,\xi)y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi). \tag{2.188}$$

Тут $y(x)$ – розв'язок рівняння (2.163) або, що те саме, врахувавши (2.176), рівняння

$$M_n(y)=-\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n\sigma(x)y. \tag{2.189}$$

Підставивши (2.185) в (2.188) і замінивши індекс k на j, отримаємо

$$y^{(\nu)}(x)=-\sum_{s=1}^{n}\tilde{c}_s\frac{Q_{\nu,n-s}(x,a)}{n\rho^{s-\nu-1}}\sum_{j=1}^{n}M_{j,n-s}e^{\rho\omega_j t(x)}\omega_j^{\nu+1}\langle1\rangle_x^j\langle1\rangle^j+$$
$$+\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^x\frac{Q_{\nu0}(x,\xi)}{n\rho^{n-1-\nu}}\sum_{j=1}^{n}M_{j0}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\times$$
$$\times\langle1\rangle_x^j\langle1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi),\quad \nu=\overline{0,n-1}.$$

Виберемо c_j так, щоб

$$y^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n} (\rho t'(x))^{\nu} \omega_j^{\nu} c_j \hat{E}(x) e^{\rho\omega_j t(x)} \langle 1\rangle_x^j +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \frac{Q_{\nu 0}(x,\xi)}{n\rho^{n-1-\nu}} \sum_{j=1}^{n} e^{\rho\omega_j (t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1} \times$$

$$\times \langle 1\rangle_x^j \langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{2.190}$$

Тоді для c_j справджується система

$$-\sum_{s=1}^{n} \tilde{c}_s \frac{(t'(a))^{1-s}}{n\rho^{s-1}} \hat{E}^{-1}(a) M_{j,n-s} \omega_j \langle 1\rangle^j = c_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.191}$$

Покладемо для деякого фіксованого k, $k = \overline{1, n}$,

$$\hat{c}_j = c_j \text{ для } j = \overline{1, k}, \tag{2.192}$$

$$\hat{c}_j = c_j + \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_a^b (t'(\xi))^{1-n} \frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}}{\hat{E}(\xi)} \omega_j \times$$

$$\times \langle 1\rangle_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi) \text{ для } j = \overline{k+1, n}. \tag{2.193}$$

Внаслідок (2.183), ввівши позначення ($\nu = \overline{0, n-1}$)

$$K_{1\nu}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=1}^{k} \rho^{\nu} Q_{\nu 0}(x,\xi) e^{\rho\omega_j (t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1},$$

$$K_{2\nu}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=k+1}^{n} \rho^{\nu} Q_{\nu 0}(x,\xi) e^{\rho\omega_j (t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1}$$

і підставивши (2.192), (2.193) в (2.190), отримаємо для

$\nu = \overline{0, n-1}$

$$y^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n} (\rho t'(x))^{\nu} \omega_j^{\nu} \langle \hat{c}_j \rangle_x^j \hat{E}(x) e^{\rho \omega_j t(x)} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int\limits_a^x K_{1\nu}(x, \xi, \rho) y^{(n-s)}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi} \, db_s(\xi) -$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int\limits_x^b K_{2\nu}(x, \xi, \rho) \langle 1 \rangle_{x,\xi} \, y^{(n-s)}(\xi) db_s(\xi). \qquad (2.194)$$

2.6.6. Асимптотика розв'язків рівняння з мірами.

Лема 3. *Існує така стала* C, *що для всіх* $\rho \in \mathcal{T}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ *мають місце нерівності*

$$|K_{1\nu}(x, \xi, \rho)| \leqslant C \, |\rho|^{\nu} \, k \left| e^{\rho \omega_k (t(x) - t(\xi))} \right| \text{ для } a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b, \qquad (2.195)$$

$$|K_{2\nu}(x, \xi, \rho)| \leqslant C \, |\rho|^{\nu} (n-k) \left| e^{\rho \omega_k (t(x) - t(\xi))} \right| \text{ для } a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b. \qquad (2.196)$$

Доведення. Виберемо сталу C_1 так, щоб

$$\left| e^{c(\omega_j - \omega_k)(t(x) - t(\xi))} \right| \leqslant C_1 \qquad (2.197)$$

для всіх $j, k = \overline{1, n}$ і всіх x і ξ з інтервалу $[a, b]$; це можливо, бо ліва частина (2.197) є неперервною функцією змінних x і ξ. Якщо $\rho \in \mathcal{T}$, то з нерівностей (2.177) випливає, що для $\alpha \leqslant k$

$$\mathrm{Re}(\rho \omega_\alpha) \leqslant \mathrm{Re}(\rho \omega_\alpha + (\rho + c)(\omega_k - \omega_\alpha));$$

звідки для $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$

$$\left| e^{\rho \omega_\alpha (t(x) - t(\xi))} \right| \leqslant \left| e^{[\rho \omega_\alpha + (\rho + c)(\omega_k - \omega_\alpha)](t(x) - t(\xi))} \right| \leqslant C_1 \left| e^{\rho \omega_k (t(x) - t(\xi))} \right|,$$

бо $t(x)$ – монотонна функція. Пригадаємо, що функція $\sigma(x)$ є абсолютно неперервною на $[a, b]$ і не перетворюється в нуль у жодній точці цього проміжку. Отже, функції $\sigma(x)$ і $\sigma^{-1}(x)$ на відрізку $[a,b]$ є обмеженими. Тоді $Q_{\nu 0}(x,\xi)$ теж є там обмеженими і

$$|K_{1\nu}(x,\xi,\rho)| = \left|\sum_{j=1}^{k} \rho^{\nu} Q_{\nu 0}(x,\xi) e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))} \omega_j^{\nu+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant Ck\,|\rho|^{\nu} \left|e^{\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))}\right|.$$

Аналогічно доводиться нерівність (2.196). Лему доведено.

В наступній теоремі на основі аналізу інтегро-диференціальних рівнянь (2.194) встановлюються асимптотичні формули для розв'язків рівняння (2.163).

Теорема 2.12. *За вищезгаданих припущень на коефіцієнти у всій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини рівняння* (2.163) *має n лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярних відносно $\rho \in \mathcal{T}$ для достатньо великих $|\rho|$, таких, що задовольняють співвідношення*

$$\frac{d^{\nu} y_k}{dx^{\nu}} = (\rho t'(x))^{\nu} e^{\rho\omega_k t(x)} \hat{E}(x) \omega_k^{\nu} (1 + o(1)), \tag{2.198}$$

де $\nu = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{1, n}$,

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[n]{|\sigma(\zeta)|}\, d\zeta, \quad \hat{E}(x) = |\sigma(x)|^{-\frac{n-1}{2n}}\, e^{-\frac{1}{n}\int_a^x p_1(\zeta)d\zeta}. \tag{2.199}$$

Доведення. Як і в теоремі 2.1, припустимо, що рівняння (2.163) має такий розв'язок y_k, що $\hat{c}_{\nu} = 0$ для $\nu \neq k$, $\hat{c}_k = 1$. Таким чином, для $\nu = \overline{0, n-1}$

$$y_k^{(\nu)}(x) = (\rho t'(x))^{\nu} \langle \omega_k^{\nu} \rangle_x \hat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)} +$$
$$+ \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_a^x K_{1\nu}(x,\xi,\rho) y^{(n-s)}(\xi) \langle 1 \rangle_{x,\xi}\, db_s(\xi) -$$
$$- \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^b K_{2\nu}(x,\xi,\rho) \langle 1 \rangle_{x,\xi} y^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi), \tag{2.200}$$

Покладемо для $\nu = \overline{0, n-1}$

$$z_{k\nu}(x) = y_k^{(\nu)}(x)(\rho t'(x))^{-\nu}\hat{E}^{-1}(x)e^{-\rho\omega_k t(x)}, \tag{2.201}$$

і введемо позначення

$$\begin{gathered}
\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho) = \frac{1}{n}K_{1\nu}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\times \\
\times\rho^{2-s-\nu}\frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi\leqslant x, \\
\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho) = -\frac{1}{n}K_{2\nu}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s}\times \\
\times\rho^{2-s-\nu}\frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)}e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi > x; \\
\nu=\overline{0,n-1}, \quad k=\overline{1,n}, \quad s=\overline{2,n};
\end{gathered}$$

тоді для функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$ ми отримаємо систему інтегральних рівнянь ($k=\overline{1,n}$, $\nu=\overline{0,n-1}$)

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \langle\omega_k^\nu\rangle_x + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}z_{k,n-s}(\xi,\rho)db_s(\xi). \tag{2.202}$$

При фіксованому k і $\nu=\overline{0,n-1}$ це є система інтегральних рівнянь стосовно функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$, $\nu=\overline{0,n-1}$. Інтеграл у (2.202) буде існувати як класичний інтеграл Рімана-Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна функція матиме розриви хіба що справа, тоді як $b_s(x)$ є неперервними праворуч. Якщо система (2.202) має розв'язок $z_{k\nu}$, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо:

$$\begin{gathered}
z_{k\nu}(x,\rho) = \langle\omega_k^\nu\rangle_x + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}\,db_s(\xi) + \\
+\frac{1}{\rho^2}\sum_{s_1,s_2=2}^{n}\int_a^b\int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi,\rho)\mathcal{K}_{k,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times
\end{gathered}$$

$$\times z_{k,n-s_2}(\xi_2)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, db_{s_1}(\xi_1)\, db_{s_2}(\xi_2) = \ldots$$

$$\ldots = \langle \omega_k^\nu\rangle_x + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}\, db_s(\xi) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\rho^d}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_d=2}^{n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)\langle\omega_k^{n-s_d}\rangle_{x,\xi}\, db_{s_1}(\xi_1)\ldots db_{s_d}(\xi_d) +$$

$$+\frac{1}{\rho^{d+1}}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=2}^{n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho) z_{k,n-s_{d+1}}(\xi_{d+1})\times$$

$$\times\langle 1\rangle_{x,\xi}\, db_{s_1}(\xi_1)\ldots db_{s_{d+1}}(\xi_{d+1}). \qquad (2.203)$$

Покладемо $B = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |z_{k\nu}(x)|$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Пригадаємо, що функція $\sigma(x)$ є абсолютно неперервною на $[a,b]$ і не перетворюється в нуль у жодній точці цього проміжку. Отже, функції $\sigma(x)$ і $\sigma^{-1}(x)$ на відрізку $[a,b]$ є обмеженими. Тоді з леми 3 випливає, що існують такі сталі L і R, що для $|\rho| > R$ $\forall k,\nu,s$ маємо $|\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}| \leqslant L$. Введемо позначення $v_s = \bigvee\limits_a^b b_s(x)$, $s = \overline{2,n}$; тоді останній доданок у (2.203) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=2}^{n}\prod_{j=1}^{d+1} v_{s_j} =$$

$$= B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{s_j\geqslant 0,\, \sum\limits_{j=2}^{n} s_j = d+1}\frac{(d+1)!}{\prod\limits_{j=2}^{n} s_j!}\prod_{j=2}^{n} v_j^{s_j},$$

що можна записати за формулою полінома у вигляді

$$B\left[\frac{L}{|\rho|}\sum_{s=2}^{n} v_s\right]^{d+1}.$$

Для $|\rho| > R_0$, де $R_0 = \max\{R, L(v_2 + v_3 + \ldots + v_n)\}$, функція $z_{k\nu}(x) = z_{k\nu}(x, \rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \langle\omega_k^\nu\rangle_x + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\,\langle\omega_k^{n-s}\rangle_{x,\xi}\,db_s(\xi) +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{s_1,s_2=2}^{n}\int_a^b\int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\mathcal{K}_{k,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$

$$\times\langle\omega_k^{n-s_2}\rangle_{x,\xi}\,db_{s_1}(\xi_1)\,db_{s_2}(\xi_2) + \ldots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho| \geqslant R_1 > R_0$, $a \leqslant x \leqslant b$ цей ряд збігається рівномірно і є розв'язком системи (2.202). Отже, ця система має один і тільки один розв'язок $z_{k\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu(1+o(1)) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = \omega_k^\nu(1+o(1)).$$

Звідси і з (2.201) випливають співвідношення (2.198), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Залишається довести, що існує розв'язок $y_k(x,\rho)$ рівняння (2.163), що задовольняє (2.200). Для цього достатньо показати, що якими б не були сталі $\hat{c}_\nu$, існує розв'язок y рівняння (2.163), що задовольняє (2.194) для цих значень $\hat{c}_\nu$. Очевидно, досить довести, що визначник лінійного перетворення від сталих $\tilde{c}_j$ до $\hat{c}_j$ (добуток двох перетворень від $\tilde{c}_j$ до c_j та від c_j до $\hat{c}_j$) для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля; в цьому випадку системи (2.191) і (2.192), (2.193) можна розв'язати відносно $\tilde{c}_j$ для довільно заданих $\hat{c}_j$. Розв'язок y рівняння (2.163), рівносильного першому рівнянню системи (2.190), що відповідає цим значенням $\tilde{c}_j$, буде тоді шуканим.

Але якщо визначник перетворення (2.191) – (2.193) дорівнює нулю для як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$ (детермінант хоча б одного з перетворень (2.191) – (2.193) дорівнює нулю), то для цих значень ρ системи (2.191) і (2.192), (2.193) мають нетривіальні розв'язки відносно $\tilde{c}_j$ для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_n = 0$. Відповідна функція y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи, яку можна отримати з (2.194) для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_n = 0$.

Доведемо, що це неможливо. Скориставшись заміною $(\nu = \overline{0, n-1})$

$$z_\nu(x) = y^{(\nu)}(x)(\rho t'(x))^{-\nu} \hat{E}^{-1}(x) e^{-\rho\omega_k t(x)}, \tag{2.204}$$

отримаємо для функцій z_ν систему рівнянь

$$z_\nu(x,\rho) = \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{s+\nu-1}} \int\limits_a^x K_{1\nu}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s} \times$$

$$\times e^{\rho\omega_k(t(\xi)-t(x))} \frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)} z_{n-s}(\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, db_s(\xi) -$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{s+\nu-1}} \int\limits_x^b K_{2\nu}(x,\xi,\rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s} e^{\rho\omega_k(t(\xi)-t(x))} \times$$

$$\times \frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)} z_{n-s}(\xi,\rho)\langle 1\rangle_{x,\xi}\, db_s(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1}.$$

Поклавши $m(\rho) = \max|z_\nu(x,\rho)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\nu = \overline{0, n-1}$, і застосувавши лему до правої частини останньої системи, можна прийти до оцінки

$$|z_\nu(x,\rho)| \leqslant \frac{C_1}{n\,|\rho|}(k+n-k) \sum_{s=2}^{n} \int\limits_a^b |\rho|^{2-s}\, |db_s(\xi)|\, m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \leqslant$ $\leqslant m(\rho)C_2/|\rho|$, де C_1, C_2 – сталі.

Для великих значень $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (2.204) $y \equiv 0$ при $\nu = 0$, і теорему повністю доведено.

Зауваження 1. У випадку, коли $p_i \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, тобто $b_i \in AC([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{2,n}$, результати теореми 2.12 збігаються з відомими (теорема 1.2, [88]).

Зауваження 2. Оскільки асимптотичні формули (2.198) збігаються з асимптотичними формулами (2.178), формули (2.185) мають місце й у тому випадку, коли $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.163), причому M_{kj} і $Q_{ij}(x,z)$ визначаються так само, як і у пункті 2.6.4. Квазіпохідні функції Коші в сенсі спряженого рівняння подаються формулами (2.169).

2.7. Асимптотика власних значень і власних функцій крайової задачі для диференціального рівняння

2.7.1. Сингулярний диференціальний оператор і регулярні крайові умови. Диференціальний вираз $M_n(y)$, визначений формулою (2.162), і крайові умови

$$\mathcal{U}_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad (2.205)$$

породжують диференціальний оператор M з областю визначення

$$D(M) = \Big\{ y : y^{(k)} \in AC\left([a,b];\mathbb{C}\right),\ k = \overline{0, n-2},$$
$$y^{(n-1)} \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right),\ \mathcal{U}_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1,n} \Big\},$$

який діє з простору $BV^+\left([a,b];\mathbb{C}\right)$ у простір мір.

За допомогою операції нормування (див. пункт 2.2.2) крайові умови (2.205) можна подати у вигляді

$$\mathcal{U}_\nu(y) \equiv \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(a) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(b) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\alpha}_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\beta}_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \qquad (2.206)$$

$$n - 1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{s+2} < k_s,$$
$$s = \overline{1, n-2}, \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \quad \nu = \overline{1,n}.$$

Означення 2.19. Для n непарного ($n = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (2.206) назвемо *регулярними* для задачі (2.163), (2.206), якщо числа θ_0 і θ_1, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\alpha}_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \hat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\hat{\alpha}_1 + s\hat{\beta}_1)\omega_\mu^{k_1} & \hat{\beta}_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \hat{\beta}_1\omega_n^{k_1} \\ \hat{\alpha}_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \hat{\alpha}_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\hat{\alpha}_2 + s\hat{\beta}_2)\omega_\mu^{k_2} & \hat{\beta}_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \hat{\beta}_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\alpha}_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \hat{\alpha}_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\hat{\alpha}_n + s\hat{\beta}_n)\omega_\mu^{k_n} & \hat{\beta}_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \hat{\beta}_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{2.207}$$

де

$$\hat{\alpha}_\nu = \alpha_\nu \hat{E}(a)\left(\sqrt[n]{|\sigma(a)|}\right)^{k_\nu}, \quad \hat{\beta}_\nu = \beta_\nu \hat{E}(b)\left(\sqrt[n]{|\sigma(b)|}\right)^{k_\nu}, \tag{2.208}$$

відрізняються від нуля. Для n парного ($n = 2\mu$) нормовані крайові умови (2.206) називатимемо *регулярними* для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю $\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = D$, де визначник D відрізняється від детермінанта з (2.207) тим, що $(\mu + 1)$-й стовпець містить елементи вигляду $\left(\hat{\alpha}_j + \frac{1}{s}\hat{\beta}_j\right)\omega_{\mu+1}^{k_j}$.

2.7.2. Власні значення.

Теорема 2.13. *Власні значення крайової задачі* (2.163), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *утворюють дві нескінченні послідовності* λ'_k, λ''_k, $k = N, N+1, N+2, \ldots$, *де* N *– достатньо велике натуральне число,*

– для непарного n, $n = 2\mu - 1$:

$$\begin{cases} \lambda'_k = \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\mp\frac{2k\pi i}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{n\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k = \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\pm\frac{2k\pi i}{h}\right)^n\left[1 \pm \frac{n\ln_0\xi^{(2)}}{2k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \end{cases} \tag{2.209}$$

де $h = t(b)$, $t(x)$ *визначається формулами* (2.199), *верхній знак відповідає* $n = 4p-1$, *а нижній знак відповідає* $n = 4p+1$; $\ln_0\xi$ *– деяке фіксоване значення натурального логарифма, а* $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *–*

корені рівняння $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, *що відповідає області* $\mathcal{S}_q$ *з* q *відповідно непарним і парним;*

– для парного n, $n = 2\mu$:

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right], \end{cases} \tag{2.210}$$

де ξ' *і* ξ'' *– (різні чи однакові) корені рівняння*

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{2.211}$$

що відповідає області $\mathcal{S}_0$*; причому верхній знак у формулах (2.210) відповідає парному, а нижній – непарному* μ.

У випадку парного r *при* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$ *всі власні значення, починаючи з деякого, є простими чи двократними, а у всіх інших випадках всі власні значення, починаючи з деякого, є простими.*

Доведення здійснюється аналогічно доведенню теореми 2.2 з використанням теореми 2.12. Можна зазначити лиш, що власні значення є нулями визначника

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\mathcal{U}_\nu(y_j)\right)_{\nu,j=1}^n.$$

Внаслідок асимптотичних формул (2.198) крайові умови (2.206) для лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.163) запишуться у вигляді

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\left\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\right\}.$$

Зовсім так само, як у теоремі 2.2, за допомогою формул (2.76), (2.77) можна показати, що в кожному секторі $\mathcal{T}$ за виконання нерівностей (2.177) для n непарного ($n = 2\mu+1$) і парного ($n = 2\mu$)

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle, & j < \mu, \\ (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\}, & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle, & j > \mu, \end{cases} \tag{2.212}$$

$$\mathfrak{U}_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle, & j < \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\}, & j = \mu, \mu+1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle, & j > \mu+1 \end{cases} \tag{2.213}$$

відповідно. Після підстановки останніх формул у $\Delta(\lambda)$, скорочення на спільні множники рядків і стовпців (враховуючи, що для парного n має місце $\omega_{\mu+1} = -\omega_\mu$), ми отримаємо рівняння

$$\langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle = 0$$

і

$$\langle\theta_1\rangle e^{2\rho\omega_\mu h} + \langle\theta_0\rangle e^{\rho\omega_\mu h} + \langle\theta_{-1}\rangle = 0$$

для n непарного і парного відповідно. Внаслідок регулярності крайових умов (2.206), міркуваннями, аналогічними наведеним у теоремі 2.2, з цих рівнянь можна вивести асимптотичні формули для власних значень (2.209), (2.210).

2.7.3. Власні функції. Отримані результати дозволяють побудувати за схемою пункту 2.2.5 асимптотичні формули для власних функцій при великих за модулем простих власних значеннях.

Нехай y_1, y_2, $\ldots$, y_n – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.163), що задовольняють співвідношенням (2.198) в деякій області $\mathcal{T}$. Власна функція y, відповідна власному значенню $\lambda = -\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n$, повинна бути лінійною комбінацією функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

коефіцієнти якої є нетривіальними розв'язками однорідної системи

$$\mathfrak{U}_\nu(y_1)c_1 + \mathfrak{U}_\nu(y_2)c_2 + \ldots + \mathfrak{U}_\nu(y_n)c_n = 0, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Отже, вони пропорційні алгебричним доповненням якого-небудь рядка визначника цієї системи за умови простоти власних значень. Тому

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{U}_2(y_1) & \mathfrak{U}_2(y_2) & \cdots & \mathfrak{U}_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{U}_n(y_1) & \mathfrak{U}_n(y_2) & \cdots & \mathfrak{U}_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{2.214}$$

якщо не всі доповнюючі мінори елементів першого рядка цього визначника дорівнюють нулю. (У протилежному випадку y_1, y_2, ..., y_n потрібно розмістити в тому рядку, не всі мінори елементів якого дорівнюють нулю.)

Нехай n непарне ($n = 2\mu - 1$). Пригадаємо, що у цьому випадку всі власні значення, крім, можливо, скінченного числа, є простими. Підставимо формули (2.198) і (2.212) в (2.214), скоротимо отриманий вираз на несуттєві множники ρ^{k_2}, ρ^{k_3}, ..., ρ^{k_n}, $e^{\rho\omega_{\mu+1}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, ..., $e^{\rho\omega_n h}$ і, врахувавши, що, оскільки $e^{o(1)} = 1 + o(1) = \langle 1\rangle$, має місце, зокрема, співвідношення $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}\langle 1\rangle = \xi\langle 1\rangle$, ми прийдемо до наступної теореми. Заради лаконічності формулювання теореми, ми в ньому не згадуємо, що коефіцієнти диференціального рівняння (2.163) задовольняють умови, наведені у пункті 2.6.1. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ за формулою (2.176) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.209).

Теорема 2.14. *Власні функції крайової задачі* (2.163), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *у випадку непарного* n ($n = 2\mu - 1$) *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$, *відповідні власним значенням* λ_k', λ_k'' (*що визначаються формулами* (2.209)), *вигляду*

$$y_k^{(s)}(x) = \hat{E}(x)\langle 1\rangle_x \det\left(X_{1k}^{(s)}, X_{2k}^{(s)}\right), \tag{2.215}$$

де

$$X_{1k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k^{(s)}t(x)} & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(s)}t(x)} & e^{\omega_\mu\rho_k^{(s)}t(x)} \\ \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_1^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_{\mu-1}^{k_2} & \langle\hat{\alpha}_2 + \xi^{(s)}\hat{\beta}_2\rangle\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\alpha}_n\rangle\omega_1^{k_n} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_n\rangle\omega_{\mu-1}^{k_n} & \langle\hat{\alpha}_n + \xi^{(s)}\hat{\beta}_n\rangle\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} & \dots & e^{\omega_n\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} \\ \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle\hat{\beta}_n\rangle\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \langle\hat{\beta}_n\rangle\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(1)} \mp 2k\pi i), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(2)} \pm 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \ldots$; N – *достатньо велике натуральне число,* $s = 1, 2$, $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.199), *а* $\hat{\alpha}_\nu$, $\hat{\beta}_\nu$ – *формулами* (2.208), *причому верхній знак тут відповідає* $n = 4p - 1$, *а нижній* – $n = 4p + 1$; $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ – *ті самі, що й у теоремі 2.13.*

Повторивши попередні міркування, аналогічну теорему можна отримати й у випадку простих власних значень для парного n ($n = 2\mu$). Для цього потрібно підставити формули (2.198) і (2.213) в (2.214), скоротити отриманий вираз на несуттєві множники $\rho^{k_2}, \rho^{k_3}, \ldots, \rho^{k_n}, e^{\rho\omega_{\mu+2}h}, e^{\rho\omega_{\mu+3}h}, \ldots, e^{\rho\omega_n h}$ і, врахувавши, що $e^{o(1)} = 1 + o(1) = \langle 1 \rangle$, $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}\langle 1 \rangle = \xi\langle 1 \rangle$, можна прийти до наступного висновку. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що ρ_k', ρ_k'' за формулою (2.176) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.210).

Теорема 2.15. *Власні функції крайової задачі* (2.163), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *у випадку парного* n ($n = 2\mu$) *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_{1k}(x)$, $y_{2k}(x)$, *відповідні простим власним значенням* λ_k', λ_k'' (*що визначаються формулами* (2.210)), *вигляду*

$$\begin{aligned} y_{1k}(x) &= \hat{E}(x)\langle 1 \rangle_x \det(X_{1k}', X_{2k}'), \\ y_{2k}(x) &= \hat{E}(x)\langle 1 \rangle_x \det(X_{1k}'', X_{2k}''), \end{aligned} \tag{2.216}$$

де

$$X_{1k}' = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k' t(x)} & \cdots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k' t(x)} & e^{\omega_\mu \rho_k' t(x)} \\ \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_1^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_2\rangle\omega_{\mu-1}^{k_2} & \langle\hat{\alpha}_2 + \xi'\hat{\beta}_2\rangle\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\alpha}_n\rangle\omega_1^{k_n} & \cdots & \langle\hat{\alpha}_n\rangle\omega_{\mu-1}^{k_n} & \langle\hat{\alpha}_n + \xi'\hat{\beta}_n\rangle\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}' = \begin{pmatrix} e^{-\omega_\mu\rho_k' t(x)} & e^{\omega_{\mu+2}\rho_k'(t(x)-h)} & \cdots & e^{\omega_n\rho_k'(t(x)-h)} \\ \langle\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+1}^{k_2} & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \langle\hat{\beta}_2\rangle\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\alpha}_n + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_n\rangle\omega_{\mu+1}^{k_n} & \langle\hat{\beta}_n\rangle\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \langle\hat{\beta}_n\rangle\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \ldots$; N – *достатньо велике натуральне число,* $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.199), *а* $\hat{\alpha}_\nu$, $\hat{\beta}_\nu$ – *формулами* (2.208), *причому в останніх формулах верхній знак треба брати для* $r = 4p$, *а нижній – для* $r = 4p+2$; X''_{1k}, X''_{2k} *відрізняються від* X'_{1k}, X'_{2k} *заміною* ρ'_k *на* ρ''_k *і* ξ' *на* ξ''; ξ' *і* ξ'' *тут ті самі, що і в теоремі 2.13.*

2.8. Функція Ґріна диференціального оператора

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [59].

2.8.1. Спряжена крайова задача. Диференціальне рівняння (2.163) з визначеним формулою (2.162) диференціальним виразом $M_n(y)$ зводиться до коректної системи диференціальних рівнянь першого порядку, що у векторному вигляді подається рівністю (2.165).

Крайові умови (2.205) з використанням того ж, що й у пункті 2.6.1, вектора $Y = \operatorname{colon}\big(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ можуть бути записані у векторному вигляді

$$W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0, \tag{2.217}$$

де $W_a = (\alpha_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$, $W_b = (\beta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$.

Розглянемо вираз Z^*Y і здиференціюємо його, скориставшись формулами (2.165) і (2.167):

$$(Z^*Y)' = (Z^*)'Y + Z^*Y' = -\big((C^*)'Z\big)^*Y + Z^*C'Y = \\ = -Z^*C'Y + Z^*C'Y = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(Z^*)'Y$ і Z^*Y' є коректними на підставі відомого факту про те, що y,

y', $\ldots$, $y^{(n-2)}$, z – абсолютно неперервні функції, а $y^{(n-1)}$, $z^{\{1\}}$, $z^{\{2\}}$, $\ldots$, $z^{\{n-1\}}$ є функціями обмеженої варіації на проміжку $[a, b]$ (див. твердження 2.6, 2.7). Отже, Z^*Y є сталою величиною і тому

$$(Z^*Y)|_a^b = 0 \tag{2.218}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} &\bar{z}^{\{n-1\}}(b)y(b) + \bar{z}^{\{n-2\}}(b)y'(b) + \ldots + \bar{z}(b)y^{(n-1)}(b) - \\ &- \bar{z}^{\{n-1\}}(a)y(a) - \bar{z}^{\{n-2\}}(a)y'(a) - \ldots - \bar{z}(a)y^{(n-1)}(a) = 0. \end{aligned} \tag{2.219}$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $\mathcal{U}_1(y)$, $\mathcal{U}_2(y)$, $\ldots$, $\mathcal{U}_n(y)$ довільними формами $\mathcal{U}_{n+1}(y)$, $\mathcal{U}_{n+2}(y)$, $\ldots$, $\mathcal{U}_{2n}(y)$ до лінійно незалежної системи $2n$ лінійних форм. Тоді систему

$$\mathcal{U}_\nu(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1, 2n},$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $y(a)$, $y'(a)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(b)$, які визначаються через лінійні комбінації форм $\mathcal{U}_1(y)$, $\ldots$, $\mathcal{U}_{2n}(y)$. Підставивши отримані $y^{(q)}(a)$, $y^{(q)}(b)$ $(q = \overline{0, n-1})$ в білінійну форму в лівій частині рівності (2.218), ми отримаємо, що

$$(Z^*Y)|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2n} \mathcal{A}_\nu(\xi)\mathcal{U}_\nu(y),$$

де $\xi = \left(\bar{z}^{\{q\}}(a), \bar{z}^{\{q\}}(b)\right)$, $q = \overline{0, n-1}$. Позначимо $\mathcal{A}_{2n}(\xi) = \mathcal{V}_1(z)$, $\mathcal{A}_{2n-1}(\xi) = \mathcal{V}_2(z)$, $\ldots$, $\mathcal{A}_1(\xi) = \mathcal{V}_{2n}(z)$. Очевидно, що для того щоб виконувалась рівність (2.218), повинні мати місце співвідношення

$$\mathcal{V}_\nu(z) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{2.220}$$

де

$$\mathcal{V}_\nu(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Означення 2.20. Крайові умови (2.220) ми називатимемо *спряженими крайовими умовами* до умов (2.205).

Зауваження. Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (2.217), то крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$Z^*(a)W_a^{-1} + Z^*(b)W_b^{-1} = 0. \tag{2.221}$$

Справді, з рівності (2.217), якщо $|W_a| \neq 0$, маємо

$$Y(a) = -W_a^{-1} W_b Y(b).$$

Підставивши отриманий вираз у (2.218), отримаємо співвідношення

$$Z^*(b)Y(b) + Z^*(a)W_a^{-1} W_b Y(b) = 0,$$

звідки при $|W_b| \neq 0$ випливає (2.221).

Таким чином, хоча крайові умови (2.205) будуються в термінах звичайних похідних, спряжені крайові умови будуються, як і умови (2.103), за допомогою квазіпохідних у сенсі спряженого до (2.163) рівняння (2.168), які визначаються формулами (2.169).

Спряжений квазідиференціальний вираз $M_n^*(z)$ і спряжені крайові умови (2.220) породжують квазідиференціальний оператор M^*, який є спряженим до M. Квазідиференціальний оператор M^* має область визначення

$$D(M^*) = \Big\{ z : z \in AC\,([a, b]; \mathbb{C}),$$
$$z^{\{s\}} \in BV^+\,([a, b]; \mathbb{C}), \;\; s = \overline{1, n-1}, \;\; \mathcal{V}_\nu(z) = 0, \;\; \nu = \overline{1, n} \Big\}$$

і діє з простору $BV^+\,([a, b]; \mathbb{C})$ у простір мір.

2.8.2. Функція Ґріна крайової задачі. Розглянемо тепер неоднорідне диференціальне рівняння

$$M_n(y) = \lambda\sigma y + f, \tag{2.222}$$

де $\sigma(x)$ задовольняє накладені на неї в пункті 2.6.1 умови, а $f(x) = g'(x)$, $g \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Неоднорідне рівняння (2.222) шляхом введення вектора $Y = \operatorname{colon}\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'Y + F', \tag{2.223}$$

де $F(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, -g(x))$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta C(x)\Delta F(x) \equiv 0$ (див. підрозділ 1.2).

Побудуємо функцію Ґріна крайової задачі (2.222), (2.205) за допомогою міркувань, аналогічних використаним у пункті 2.4.1. Нехай $\tilde{K}(x,t,\lambda)$ – функція Коші однорідного рівняння (2.163). З формули про структуру еволюційного оператора (2.187), яка має місце і для фундаментальної матриці системи (2.165) випливає, що $\tilde{K}(x,a,\lambda)$, $\tilde{K}^{\{1\}}(x,a,\lambda)$, ..., $\tilde{K}^{\{r-1\}}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (2.163) (див. [114, 124, с. 124]). Більше того, розв'язок рівняння (2.222) можна подати у вигляді

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) + \int_a^x \tilde{K}(x,t,\lambda)dg(t). \tag{2.224}$$

З (1.41) безпосередньо видно завдяки (2.187), що для $j = \overline{1,n}$

$$y^{(j)}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{K}^{\{k-1\}(j)}(x,a,\lambda) + \int_a^x \tilde{K}^{(j)}(x,t,\lambda)dg(t),$$

тому підстановка формули (2.224) в крайові умови (2.205) дасть рівності ($\nu = \overline{1,n}$)

$$\mathcal{U}_\nu(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{U}_\nu\left(\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} \int_a^b \tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dg(t). \tag{2.225}$$

В припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (2.163), (2.205), визначник цієї системи відрізняється від нуля

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left(\mathfrak{U}_\nu\left(\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)\right) \neq 0, \quad \nu, k = \overline{1,n}. \tag{2.226}$$

Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (2.225) єдиним чином:

$$c_k = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\int\limits_a^b \tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dg(t), \quad k = \overline{1,n},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $\mathfrak{U}_\nu\left(\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Підставляючи ці значення c_k у формулу (2.224), отримаємо

$$y(x,\lambda) = \int\limits_a^x \tilde{K}(x,t,\lambda)dg(t) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_a^b \frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dg(t).$$

Означення 2.21. Вираз

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases}\Omega(x,t,\lambda) + \tilde{K}(x,t,\lambda), & x \geqslant t,\\ \Omega(x,t,\lambda), & x < t,\end{cases} \tag{2.227}$$

де

$$\Omega(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda),$$

будемо називати *функцією Ґріна* крайової задачі (2.222), (2.205) (диференціального оператора $M - \lambda\sigma I$).

З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Ґріна. Як видно з наступної теореми, ця функція Ґріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння, її похідних та квазіпохідних у сенсі спряженого рівняння, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [76, с. 46–47]).

Теорема 2.16. *Розв'язок задачі* (2.222), (2.205), *у припущенні, що* λ *не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді*

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,t,\lambda)dg(t), \tag{2.228}$$

де функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ *подається формулою* (2.227) *і має наступні властивості*:

1) *похідні за першою змінною* $G^{(k)}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0,n-2})$ *є неперервними функціями двох змінних* x, t *і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій*;

2) *похідна* $G^{(n-1)}(x,t,\lambda)$ *має обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервною по* t;

3) $G(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t),(t,b]$ *по* x *задовольняє однорідне рівняння* (2.163);

4) $G(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови* (2.205);

5) *для* $x=t$ *функція* $G(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda) - G^{(k)}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k = \overline{0,n-2};$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda) - G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} \frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}\Delta b_{n-i}(t)\tilde{K}^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda)\tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Формула (2.228) була доведена вище. Внаслідок того, що функції $K^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,n})$ є розв'язками рівняння (2.163) за змінною x, для них має місце твердження 2.6, тобто функції $K^{(s)\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,n})$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=\overline{0,n-2}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s=n-1$. Згідно з наслідком [112] функції $K^{(i)*}(x,t,\lambda)$ $(i=\overline{0,n-1})$ є розв'язками спряженого квазідиференціального рівняння (2.168) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 2.7, зокрема функції $K^{(i)*}(x,t,\lambda)$ $(i=\overline{0,n-1})$ будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (2.227) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$G^{(s)}(x,t,\lambda)=P^{(s)}(x,t,\lambda)-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}K^{(s)\{k-1\}}(x,a,\lambda)\frac{A_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\beta_{\nu j}K^{(j)}(b,t,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $G(x,t,\lambda)$. Для доведення пункту 5) використовуються співвідношення

$$\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)=\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(t,\lambda)y_g(x,\lambda),\quad k=\overline{1,n}, \tag{2.229}$$

які випливають з того факту, що всі $\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (2.163); $y_g(x)$, $g=\overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.163). Тоді, внаслідок рівності (2.166) ми маємо

$$\tilde{K}^{(n-1)\{k-1\}}(t+0,a,\lambda)-\tilde{K}^{(n-1)\{k-1\}}(t-0,a,\lambda)=$$
$$=\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(a,\lambda)\Big(y_g^{(n-1)}(t+0,\lambda)-y_g^{(n-1)}(t-0,\lambda)\Big)=$$
$$=-\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(a,\lambda)\sum_{i=0}^{n-2}\Delta b_{n-i}(t)y_g^{(i)}(t,\lambda)=$$
$$=-\sum_{i=0}^{n-2}\Delta b_{n-i}(t)\tilde{K}^{(i)\{k-1\}}(t,a,\lambda),\quad k=\overline{1,n},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta b_i(x) = 0$, $i = \overline{2, n}$, властивість 5) набуває «класичного» вигляду

$$G^{(k)}(t+0, t, \lambda) - G^{(k)}(t-0, t, \lambda) = 0, \quad k = \overline{0, n-2};$$

$$G^{(n-1)}(t+0, t, \lambda) - G^{(n-1)}(t-0, t, \lambda) = 1.$$

Зауваження 2. Функцію $G(x, t, \lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x, t, \lambda) = (-1)^n \frac{Q(x, t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{2.230}$$

де

$$Q(x, t, \lambda) = \det(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \tag{2.231}$$

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}(x, a, \lambda) & \tilde{K}^{\{1\}}(x, a, \lambda) & \cdots & \tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda) \\ \mathcal{U}_1(\tilde{K}(x, a, \lambda)) & \mathcal{U}_1(\tilde{K}^{\{1\}}(x, a, \lambda)) & \cdots & \mathcal{U}_1(\tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(\tilde{K}(x, a, \lambda)) & \mathcal{U}_n(\tilde{K}^{\{1\}}(x, a, \lambda)) & \cdots & \mathcal{U}_n(\tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda)) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P(x, t, \lambda) \\ \mathcal{U}_1(P(x, t, \lambda)) \\ \cdots \\ \mathcal{U}_n(P(x, t, \lambda)) \end{pmatrix},$$

а

$$P(x, t, \lambda) = \begin{cases} \tilde{K}(x, t, \lambda), & x \geqslant t, \\ 0, & x < t. \end{cases} \tag{2.232}$$

Для того щоб переконатись в еквівалентності формул (2.227) і (2.230), достатньо розписати визначник (2.231) за елементами першого рядка й останнього стовпця:

$$Q(x, t, \lambda) = (-1)^{n+2} P(x, t, \lambda) \Delta(\lambda) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+3} \mathcal{U}_\nu(P(x, t, \lambda)) \tilde{K}^{\{k-1\}}(x, a, \lambda) A_{\nu,k},$$

де $A_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $\mathcal{U}_\nu\left(\tilde{K}^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Оскільки, внаслідок (2.232),

$$\mathcal{U}_\nu(P(x,t,\lambda)) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j}\tilde{K}^{[j]}(b,t,\lambda),$$

від (2.230) ми зразу приходимо до формули (2.227).

2.8.3. Розв'язувальне ядро задачі (2.223), (2.217). Розв'язок задачі (2.223), (2.217), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матричного аналогу скалярної функції Ґріна) і вектора F у вигляді

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda)dF(t), \tag{2.233}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} B(x,t,\lambda) + \Omega_1(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \Omega_1(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases}$$

а

$$\Omega_1(x,t,\lambda) = -\left\{W_aB(a,x,\lambda) + W_bB(b,x,\lambda)\right\}^{-1} W_bB(b,t,\lambda).$$

Доведення повністю повторює всі міркування, наведені у пункті 2.4.2 стосовно крайової задачі для квазідиференціального рівняння (2.110).

Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Ґріна задачі (2.222), (2.205).

2.8.4. Зв'язок між функціями Ґріна спряжених крайових задач. Нехай $H(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна спряженої крайової задачі

$$M_n^*(z) = \bar{\lambda}\sigma z + \hat{f} \tag{2.234}$$

з крайовими умовами (2.220) (оператора $M^* - \bar{\lambda}\sigma I$), $\hat{f} = \hat{g}'$, $\hat{g} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Вона будується за допомогою функції Коші

$\hat{K}(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння (2.168), її квазіпохідних у сенсі рівняння (2.168) та звичайних похідних.

Теорема 2.17. *Розв'язок задачі (2.234), (2.220), у припущенні, що λ не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді*

$$z(x) = \int_a^b H(x,t,\lambda)d\hat{g}(t), \tag{2.235}$$

де функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ подається формулою

$$H(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}(x,t,\lambda) + \hat{K}(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases} \tag{2.236}$$

$$\hat{\Omega}(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \hat{K}^{(k-1)}(x,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

фігурними дужками тут позначаються квазіпохідні в сенсі рівняння (2.168) за першою змінною, а круглими – звичайні похідні в сенсі спряженого до (2.168) рівняння (2.163) за другою змінною, $\hat{A}_{\nu k}$ – алгебричне доповнення елемента $\mathcal{V}_\nu\Big(\hat{K}^{(k-1)}(x,a,\lambda)\Big)$ у визначнику

$$\hat{\Delta}(\lambda) \equiv \det\Big(\mathcal{V}_\nu\Big(K^{(k-1)}(x,a,\lambda)\Big)\Big)_{\nu,k=1}^{n}.$$

Функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ має наступні властивості:

1) функція $H(x,t,\lambda)$ є неперервною функцією двох змінних x, t і абсолютно неперервною за кожною змінною при фіксованій іншій;

2) квазіпохідні $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,n-1})$ мають обмежену на проміжку $[a,b]$ варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по t;

3) $H(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t),(t,b]$ по x задовольняє однорідне рівняння (2.168);

4) $H(x,t,\lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови (2.220);

5) *для* $x = t$ *функція* $H(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$H(t+0,t,\lambda) - H(t-0,t,\lambda) = 0;$$

$$H^{\{s\}}(t+0,t,\lambda) - H^{\{s\}}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\Delta\bar{b}_{s+1}(t)\hat{K}^{(k-1)}(t,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

$$s = \overline{1, n-2};$$

$$H^{\{n-1\}}(t+0,t,\lambda) - H^{\{n-1\}}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= 1 - \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\Delta\bar{b}_{n}(t)\hat{K}^{(k-1)}(t,a,\lambda)\hat{K}^{\{j\}}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Для доведення цієї теореми застосовуються міркування, аналогічні використаним при доведенні попередньої теореми. Відомо [124, с. 125], що функції $\hat{K}(x,a,\lambda)$, $\hat{K}'_t(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $\hat{K}_t^{(n-1)}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.168) і розв'язок рівняння (2.234) можна подати у вигляді

$$z(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{K}_t^{(k-1)}(x,a,\lambda) + \int\limits_a^x \hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t). \qquad (2.237)$$

Оскільки

$$z^{\{j\}}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{K}_{tx}^{(k-1)\{j\}}(x,a,\lambda) +$$

$$+ \int\limits_a^x \hat{K}_x^{\{j\}}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad j = \overline{1,n},$$

підстановка (2.237) в крайові умови (2.220) дасть рівності

$$\mathcal{V}_\nu(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{V}_\nu\Big(\hat{K}_t^{(k-1)}(x,a,\lambda)\Big) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\beta}_{\nu j} \int_a^b \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad \nu=\overline{1,n}. \tag{2.238}$$

У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (2.168), (2.220), визначник системи (2.238) відрізняється від нуля $\hat{\Delta}(\lambda) \neq 0$. Тоді константи c_k можуть бути визначені з системи (2.238) єдиним чином:

$$c_k = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \int_a^b \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t), \quad k=\overline{1,n}.$$

Підставивши ці значення c_k у формулу (2.237), отримаємо

$$z(x,\lambda) = \int_a^x \hat{K}(x,t,\lambda)d\hat{g}(t) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \hat{\beta}_{\nu j} \hat{K}_t^{(k-1)}(x,a,\lambda) \hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda)d\hat{g}(t).$$

Позначивши функцію Ґріна $H(x,t,\lambda)$ формулою (2.236), ми прийдемо до формули (2.235).

Внаслідок того, що функції $\hat{K}_t^{(k-1)}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,n})$ є розв'язками рівняння (2.168) за змінною x, для них має місце твердження 2.7, тобто функції $\hat{K}_{xt}^{\{s\}(k-1)}(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s=0$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s=\overline{1,n-1}$. Згідно з наслідком [112] функції $\hat{K}_x^{\{i\}*}(x,t,\lambda)$ $(i=\overline{0,n-1})$ є розв'язками квазідиференціального рівняння (2.163) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 2.6, зокрема функції $\hat{K}_x^{\{i\}*}(x,t,\lambda)$

($i=\overline{0,n-1}$) будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (2.236) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$H_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)=\begin{cases}\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)+\hat{K}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x\geqslant t,\\ \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda), & x<t,\end{cases}$$

причому

$$\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda)=-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\hat{A}_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}\hat{K}_{xt}^{\{s\}(k-1)}(x,a,\lambda)\hat{K}_x^{\{j\}}(b,t,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $H(x,t,\lambda)$. Залишилось довести пункт 5). Для цього розглянемо співвідношення

$$\hat{K}_t^{(k-1)}(x,t,\lambda)=\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(t,\lambda)z_g(x,\lambda),\quad k=\overline{1,n},$$

які випливають з того факту, що всі $\hat{K}_t^{(k-1)}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (2.168); $z_g(x)$, $g=\overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (2.168). Тоді, внаслідок рівності (2.171) ми маємо

$$\begin{gathered}\hat{K}_{xt}^{\{s\}(k-1)}(t+0,a,\lambda)-\hat{K}_{xt}^{\{s\}(k-1)}(t-0,a,\lambda)=\\ =\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(a,\lambda)\Big(z_g^{\{s\}}(t+0,\lambda)-z_g^{\{s\}}(t-0,\lambda)\Big)=\\ =\sum_{g=1}^{n}c_{kg}(a,\lambda)\Delta\bar{b}_{s+1}(t)z_g(t,\lambda)=\\ =\Delta\bar{b}_{s+1}(t)\hat{K}_t^{(k-1)}(t,a,\lambda),\quad k=\overline{1,n},\ \ s=\overline{1,n-1},\end{gathered}$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Теорема 2.18. *Для $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням крайових задач* (2.163), (2.205) *та* (2.168), (2.220), *функції Ґріна спряжених крайових задач* (2.222), (2.205) *і* (2.234), (2.220) *пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda) = \overline{H(t,x,\lambda)}.$$

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Ґріна спряжених крайових задач

$$M_n(y) - \lambda\sigma(x)y = f_1(x), \tag{2.239}$$

$$\mathcal{U}_\nu\,(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2.240}$$

і

$$M_n^*(y) - \bar{\lambda}\sigma(x)z = -f_2(x), \tag{2.241}$$

$$\mathcal{V}_\nu\,(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\beta}_{\nu j} z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2.242}$$

відповідно, де $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дійснозначні неперервні на $[a,b]$ функції. Ці задачі внаслідок введення векторів $Y = \operatorname{colon}\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ і $Z = \operatorname{colon}\left(z^{\{n-1\}}, \ldots, z^{\{1\}}, z\right)$ зводяться до задач

$$\begin{cases} Y' = C'Y + F_1, \\ W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} Z' = -\left(C^*\right)' Z + F_2, \\ \hat{W}_a Z(a) + \hat{W}_b Z(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де $F_1(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, f_1(x))$, $F_2(x) = \operatorname{colon}(f_2(x), 0, \ldots, 0)$, а W_a, W_b, $\hat{W}_a$, $\hat{W}_b$ – матриці порядку $n \times n$.

Оскільки добутки $(Z^*)'\,Y$ і Z^*Y' коректні, то

$$\begin{gathered}(Z^*Y)' = (Z^*)'\,Y + Z^*Y' = \\ = -Z^*C'Y + F_2^*Y + Z^*C'Y + Z^*F_1 = Z^*F_1 + F_2^*Y.\end{gathered}$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (2.220), можна переконатись у правильності рівності (2.218) для неоднорідних спряжених крайових задач (2.239)–(2.242). Дійсно, в лінійно незалежній системі (2.240) є $2n$ невідомих $y^{(j)}(a)$, $y^{(j)}(b)$ $(j = \overline{1,n})$. Оголосимо n невідомих у системі (2.240) вільними і надамо їм деяких значень. Тоді решта n невідомих визначиться однозначно. Аналогічно, враховуючи лінійну незалежність системи (2.242), можна визначити n невідомих з $z^{\{j\}}(a)$, $z^{\{j\}}(b)$ $(j = \overline{1,n})$ через довільним чином задану решту невідомих. А спряжені до умов (2.240) крайові умови (2.242) побудовано так, що повинна справджуватись рівність (2.218). Довільність вибору вільних невідомих забезпечує виконання співвідношення (2.218) для всіх розв'язків крайових задач (2.239), (2.240) і (2.241), (2.242). Отже,

$$\int_a^b (Z^*(x)F_1(x) + F_2^*(x)Y(x))\,dx = 0$$

або

$$\int_a^b Z^*(t)F_1(t)dt + \int_a^b F_2^*(x)Y(x)dx = 0.$$

Згідно з формулою (2.233)

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda)F_1(t)dt, \quad Z(t) = \int_a^b N(t,x,\lambda)F_2(x)dx.$$

Врахувавши (2.228), (2.235), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює $G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $-H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x) dx \right)^* F_1(t) dt +$$
$$+ \int_a^b F_2^*(x) \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t) dt dx = 0,$$

тобто

$$\int_a^b \int_a^b F_2^*(x) \left\{ N^*(t,x,\lambda) + M(x,t,\lambda) \right\} F_1(t) dx dt =$$
$$= \int_a^b \int_a^b \left\{ G(x,t,\lambda) - \overline{H(t,x,\lambda)} \right\} f_1(t) f_2(x) dx dt = 0.$$

Оскільки в фігурних дужках справа стоїть неперервна функція змінних x і t, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ – також (довільні) дійснозначні неперервні функції, то згідно з основною лемою варіаційного числення (див., наприклад, [136, с. 295–296])

$$\overline{H(t,x,\lambda)} - G(x,t,\lambda) = 0,$$

що й завершує доведення.

2.8.5. Аналітична природа функції Ґріна у випадку простих полюсів. Оскільки чисельник і знаменник у формулі (2.227) є, очевидно, цілими аналітичними функціями параметра λ, функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ задачі (2.222), (2.205) є мероморфною функцією параметра λ; її полюсами можуть бути лише власні значення крайової задачі (2.163), (2.205).

Нехай λ_0 – простий нуль функції $\Delta(\lambda)$. Тоді λ_0 може бути лише простим полюсом функції $G(x,t,\lambda)$. Повністю повторивши міркування з пункту 2.4.4, аналогічно [76, с. 48–49], отримаємо, що функцію Ґріна $G(x,t,\lambda)$ за виконання умови нормованості

$$\int_a^b \sigma(\tau) y_0(\tau) \overline{z_0(\tau)} d\tau = 1 \tag{2.243}$$

можна записати у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(t)}}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x,t,\lambda), \tag{2.244}$$

де $y_0(x)$ – власна функція крайової задачі (2.163), (2.205), відповідна простому нулю λ_0 визначника $\Delta(\lambda)$, $z_0(x)$ – власна функція спряженої крайової задачі (2.168), (2.220), відповідна власному значенню $\overline{\lambda}_0$ цієї задачі, а функція $G_1(x,t,\lambda)$ регулярна в околі точки λ_0.

2.9. Розвинення за власними функціями крайової задачі для диференціального рівняння

2.9.1. Оцінка функції Ґріна. Будемо вважати без втрати загальності, що $My = 0$ лише при $y = 0$, тобто що крайова задача $M_n(y) = 0$, (2.205) має лише тривіальний розв'язок $y \equiv 0$. Дійсно, в протилежному випадку досить замінити $M_n(y)$ виразом $M_n(y) - c\sigma(x)y$, де c – довільне число, відмінне від усіх власних значень крайової задачі (2.163), (2.205). Таке число існує, бо теорема 2.13 свідчить, що ця крайова задача має лише зліченну множину власних значень. Тоді оператор M має функцію Ґріна $G(x,s) = G(x,s,0)$, якщо $G(x,s,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $M - \lambda\sigma I$.

Розвинення за власними функціями будується за тією самою схемою, яка була використана у підрозділі 2.5.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зі спільним центром у початку координат, що мають наступні властивості: 1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає для $k \to \infty$; 2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ власних значень крайової задачі (2.163), (2.205) при відображенні

$$\lambda = -\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n \tag{2.245}$$

знаходяться для досить великих k на відстані не меншій δ від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Розглянемо також інтеграл

$$I_k(x,s) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,s,\lambda)}{\lambda} d\lambda;$$

застосувавши до нього теорему про лишки, отримаємо

$$I_k(x,s) = G(x,s) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}, \tag{2.246}$$

де $Q_\nu(x,s)$ – лишок функції $G(x,s,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який ми припускаємо простим), а m_k – число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 2.19. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k функція $G(x,s,\lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G(x,s,\lambda)| \leqslant M_1 |\lambda|^{-\frac{n-1}{n}}, \tag{2.247}$$

де M_1 – деяка стала.

Доведення. За відповідного вибору $\arg\rho$ при відображенні (2.245) коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $2\pi/n$, що проходить у двох сусідніх областях $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного n.

1) n – непарне; $n = 2\mu - 1$. Нехай згідно з твердженням 1.1 числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (різні корені n-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{S}_0$ виконується ланцюг нерівностей (2.177)

(c тут дорівнює 0). Тоді згідно з формулами (2.76), (2.77) для $\rho \in \mathcal{S}_0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.248}$$

Нехай γ'_k – та частина дуги γ_k, яка знаходиться в області $\mathcal{S}_0$ і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а γ''_k – та її частина, яка теж знаходиться в цій області і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$. Оцінимо функцію $G(x, s, \lambda)$ на дузі γ'_k, скориставшись формулами (2.226), (2.230) – (2.232).

Нехай $\tilde{K}(x, a, \lambda)$ – функція Коші диференціального рівняння (2.163). Тоді функції $\tilde{K}(x, a, \lambda)$, $\tilde{K}^{\{1\}}(x, a, \lambda)$, $\ldots$, $\tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.163). У той самий час, згідно з формулою (2.229) їх можна подати як лінійну комбінацію деякої іншої лінійно незалежної системи розв'язків рівняння (2.163). Нехай $y_j = y_j(x, \lambda)$ $(j = \overline{1, n})$ – та лінійно незалежна система розв'язків рівняння (2.163), для якої справджуються асимптотичні формули (2.198). Тоді

$$\tilde{K}^{\{k-1\}}(x, a, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}(\lambda) y_j(x, \lambda), \quad k = \overline{1, n}.$$

Оскільки

$$\mathcal{U}_\nu\left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \mathcal{U}_\nu(y_j), \quad \nu = \overline{1, n},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(\tilde{K}(x, a, \lambda)) & \cdots & \mathcal{U}_1(\tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(\tilde{K}(x, a, \lambda)) & \cdots & \mathcal{U}_n(\tilde{K}^{\{n-1\}}(x, a, \lambda)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j} \mathcal{U}_1(y_j) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} c_{nj} \mathcal{U}_1(y_j) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j} \mathcal{U}_n(y_j) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} c_{nj} \mathcal{U}_n(y_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(y_1) & \cdots & \mathcal{U}_1(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(y_1) & \cdots & \mathcal{U}_n(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.249}$$

врахувавши властивості визначників, отримаємо

$$\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda) C_n(\lambda),$$

де

$$C_n(\lambda) = \det\left(c_{ij}(\lambda)\right)_{i,j=1}^n, \quad \tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(\mathcal{U}_\nu(y_k)\right)_{\nu,k=1}^n.$$

Розклавши визначник (2.231) за елементами останнього стовпця, застосувавши до кожного з $n+1$ визначників n-го порядку перетворення, аналогічні (2.249), та врахувавши властивості визначників, можна прийти до рівності

$$\begin{gathered} Q(x,s,\lambda) = (-1)^n P(x,s,\lambda) C_n(\lambda) \tilde{\Delta}(\lambda) + \\ + (-1)^{n+1} \mathcal{U}_1(P(x,s,\lambda)) C_n(\lambda) \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \mathcal{U}_2(y_1) & \mathcal{U}_2(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(y_1) & \mathcal{U}_n(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_n(y_n) \end{vmatrix} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{2n} \mathcal{U}_n(P(x,s,\lambda)) C_n(\lambda) \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \mathcal{U}_1(y_1) & \mathcal{U}_1(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_1(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_{n-1}(y_1) & \mathcal{U}_{n-1}(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_{n-1}(y_n) \end{vmatrix}, \end{gathered}$$

де $P(x,s,\lambda)$ подається рівністю (2.232). Звідси випливає формула

$$Q(x,s,\lambda) = \tilde{Q}(x,s,\lambda) C_n(\lambda),$$

де

$$\tilde{Q}(x,s,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & P(x,s,\lambda) \\ \mathcal{U}_1(y_1(x)) & \mathcal{U}_1(y_2(x)) & \cdots & \mathcal{U}_1(y_n(x)) & \mathcal{U}_1(P(x,s,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(y_1(x)) & \mathcal{U}_n(y_2(x)) & \cdots & \mathcal{U}_n(y_n(x)) & \mathcal{U}_n(P(x,s,\lambda)) \end{vmatrix}. \tag{2.250}$$

Тоді формула (2.230) перепишеться у вигляді

$$G(x,s,\lambda)=(-1)^n\frac{\tilde{Q}(x,s,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}. \tag{2.251}$$

Зауважимо, що

$$\mathcal{U}_\nu(P(x,s,\lambda))=\beta_\nu\tilde{K}^{(k_\nu)}(b,s,\lambda)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\tilde{\beta}_{\nu j}\tilde{K}^{(j)}(b,s,\lambda).$$

Результати пункту 2.6.4, зокрема і формула (2.185), залишаються правильними і тоді, коли $\tilde{K}(x,s,\lambda)$ – функція Коші рівняння (2.163), а не (2.175) (див. зауваження в кінці пункту 2.6.6). Це пов'язано з тим, що асимптотичні формули (2.198) і (2.178) фундаментальної системи розв'язків обидвох рівнянь (2.163) і (2.175), а також їхніх квазіпохідних, збігаються для великих $|\rho|$, $\rho\in\mathcal{T}$. Отже, для $j=\overline{0,n-1}$

$$\tilde{K}^{(j)}(x,s,\lambda)=-\frac{Q_{j0}(x,s)}{n\rho^{n-1-j}}\sum_{k=1}^{n}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(s))}\langle\omega_k^{j+1}\rangle_{x,s},$$

що, врахувавши формули (2.183) і (2.198), можна записати у вигляді

$$\tilde{K}^{(j)}(x,s,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}y_k^{(j)}(x,\lambda)z_k(s,\lambda),$$

де для $k=\overline{1,n}$

$$z_k(s,\lambda)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\hat{E}^{-1}(s)\big(t'(s)\big)^{1-n}e^{-\rho\omega_k t(s)}\langle\omega_k\rangle_s. \tag{2.252}$$

Розглянемо функцію $G(x,s,\lambda)$ для $x>s$ (у випадку $x<s$ міркування будуть аналогічними); тоді останній елемент першого рядка у визначнику (2.250) є функцією Коші $\tilde{K}(x,s,\lambda)$. Помножимо $(\mu{+}1)$-й, $(\mu{+}2)$-й, …, n-й стовпці визначника $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$

на $-z_{\mu+1}(s)$, $-z_{\mu+2}(s)$, $\ldots$, $-z_n(s)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ будуть

$$\sum_{k=1}^{\mu} y_k(x)z_k(s), \tag{2.253}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} \mathcal{U}_{\nu b}(y_k)z_k(s) - \sum_{k=\mu+1}^{n} \mathcal{U}_{\nu a}(y_k)z_k(s), \quad \nu=\overline{1,n}. \tag{2.254}$$

Підставивши вирази (2.198) в нормовані форми $\mathcal{U}_\nu(y)$, матимемо

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\left\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\right\}, \quad \nu, j=\overline{1,n}. \tag{2.255}$$

Отже, на підставі нерівностей (2.248) виконуються формули

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle, & j=\overline{1,\mu-1}, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}\left\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\right\}, & j=\mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle, & j=\overline{\mu+1,n}. \end{cases} \tag{2.256}$$

Підставивши їх у $\tilde{\Delta}(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n}\rho^{k_\nu}\prod_{j=\mu+1}^{n} e^{\rho\omega_j h}(\langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle). \tag{2.257}$$

Врахувавши (2.198), (2.252) і (2.255), ми можемо переписати (2.253), (2.254) у вигляді

$$\frac{\hat{E}(x)}{n\rho^{n-1}}P_0 = -\frac{1}{n\rho^{n-1}}\frac{\hat{E}(x)}{\hat{E}(s)}(t'(s))^{1-n}\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(t(x)-t(s))}\langle\omega_j\rangle_{x,s},$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}P_\nu = -\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}\hat{E}^{-1}(s)(t'(s))^{1-n}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(h-t(s))}\langle\hat{\beta}_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\rangle_s - \sum_{j=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_j t(s)}\langle\hat{\alpha}_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\rangle_s\right\},$$

$$\nu=\overline{1,n}.$$

Підставимо тепер (2.250), (2.198), (2.252), (2.256), (2.257), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ в (2.251) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ наступним чином. На ρ^{k_ν} розділимо $(\nu+1)$-й рядок $(\nu=\overline{1,n})$, на $e^{\rho\omega_j h}$ – j-й стовпець $(j=\overline{\mu+1,n})$ і на $\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ поділимо μ-й стовпець. Тоді формула (2.251) набуде вигляду

$$G(x,s,\lambda)=(-1)^n\frac{\hat{E}(x)}{n\rho^{n-1}}\det(A,B), \tag{2.258}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} e^{\rho\omega_1 t(x)}\langle 1\rangle_x & \cdots & e^{\rho\omega_{\mu-1}t(x)}\langle 1\rangle_x & \frac{e^{\rho\omega_\mu t(x)}\langle 1\rangle_x}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \\ \langle\hat{\alpha}_1\omega_1^{k_1}\rangle & \cdots & \langle\hat{\alpha}_1\omega_{\mu-1}^{k_1}\rangle & \frac{\omega_\mu^{k_1}\langle\hat{\alpha}_1+e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_1\rangle}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\alpha}_n\omega_1^{k_n}\rangle & \cdots & \langle\hat{\alpha}_n\omega_{\mu-1}^{k_n}\rangle & \frac{\omega_\mu^{k_n}\langle\hat{\alpha}_n+e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_n\rangle}{\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} e^{\rho\omega_{\mu+1}(t(x)-h)}\langle 1\rangle_x & \cdots & e^{\rho\omega_n(t(x)-h)}\langle 1\rangle_x & P_0 \\ \langle\hat{\beta}_1\omega_{\mu+1}^{k_1}\rangle & \cdots & \langle\hat{\beta}_1\omega_n^{k_1}\rangle & P_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\hat{\beta}_n\omega_{\mu+1}^{k_n}\rangle & \cdots & \langle\hat{\beta}_n\omega_n^{k_n}\rangle & P_n \end{pmatrix}.$$

Можна так само, як у теоремі 2.8 (стор. 119), показати, що внаслідок регулярності крайових умов знаменник $\langle\theta_0\rangle+e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ на дугах γ_k' обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді внаслідок умов (2.248) всі елементи визначника (2.258) на дузі γ_k' обмежені зверху, бо експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' має місце нерівність

$$|G(x,s,\lambda)|\leqslant M_1|\rho|^{1-n}, \tag{2.259}$$

де M_1 – деяка стала.

Доведемо тепер, що така ж нерівність виконується і на дугах γ_k''. Для цього достатньо у визначнику $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ домножити μ-й, $(\mu+1)$-й, ..., n-й стовпці на $-z_\mu(s)$, $-z_{\mu+1}(s)$, ..., $-z_n(s)$ відповідно і додати до останнього стовпчика. Повторивши попередні міркування, легко переконатись у виконанні нерівності (2.259) і на дугах γ_k''.

Таким чином, (2.259) доведено для тієї частини дуги γ_k, що лежить у секторі $\mathcal{S}_0$. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області $\mathcal{S}_\nu$, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі $\mathcal{S}_1$. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження теореми для випадку непарного n.

2) n парне; $n = 2\mu$. Цей випадок завдяки тому, що умови для y_μ і $y_{\mu+1}$ записуються у вигляді

$$\mathcal{U}_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\,\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\},$$
$$\mathcal{U}_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\,\{\langle\hat{\alpha}_\nu\rangle + e^{\rho\omega_{\mu+1} h}\langle\hat{\beta}_\nu\rangle\},$$

відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз $\langle\theta_0\rangle + e^{\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle + e^{-\rho\omega_\mu h}\langle\theta_1\rangle$ ($\theta_1 \neq 0$, $\theta_{-1} \neq 0$ внаслідок регулярності), який можна подати у вигляді

$$\theta_1\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'\Big)\Big(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi''\Big)(1 + o(1)),$$

де ξ', ξ'' – корені рівняння $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$.

В цьому випадку μ-й, $(\mu+1)$-й, стовпці потрібно поділити відповідно на $e^{\rho\omega_\mu h}\langle 1\rangle - \langle\xi'\rangle$ та $e^{\rho\omega_\mu h}\langle 1\rangle - \langle\xi''\rangle$. Аналогічно до випадку непарного n доводиться, що ці знаменники теж будуть обмежені знизу на дузі γ_k. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними випадку дуги γ_k', бо на дузі γ_k $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, $\mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0$ внаслідок того, що рівняння $\omega^{2\mu} + 1 = 0$ містить поряд з ω_j корінь $-\omega_j$ ($j = \overline{1,n}$). Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми 2.19 видно, що нерівність (2.247) залишається правильною для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho - \rho_k| < \delta$ при відображенні (2.245).

2.9.2. Розвинення функцій з області визначення оператора M.

Теорема 2.20. *Функція Ґріна $G(x,s)$ диференціального оператора M, породженого регулярними крайовими умовами*

(2.206), *розвивається в рівномірно збіжний відносно x і s з $[a,b]$ ряд*

$$G(x,s) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}. \qquad (2.260)$$

Доведення. Користуючись теоремою 2.19 і зауваженням, отримуємо оцінки

$$|I_k(x,s)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}} R_k} 2\pi R_k = \frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\left|\frac{Q_k(x,s)}{\lambda_k}\right| = \left|\frac{1}{2\pi\lambda_k} \int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} n\rho^{n-1} G(x,s,-\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n)\, d\rho\right| \leqslant \frac{nM\delta}{|\lambda_k|},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,s) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_k(x,s)}{\lambda_k} = 0, \qquad (2.261)$$

причому рівномірно відносно x і s з $[a,b]$. Внаслідок (2.246) і (2.261), оскільки з асимптотичних формул для власних значень (див. теорему 2.13) випливає, що круги Γ_k можна вибрати так, щоб $2 \leqslant m_{k+1} - m_k \leqslant 4$, буде справджуватись формула (2.260), що й доводить теорему.

Теорема 2.21. *Якщо всі власні значення крайової задачі* (2.163), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206), *є простими нулями функції* $\Delta(\lambda)$, *то для функції Ґріна диференціального оператора* M *за виконання умови нормованості*

$$\int\limits_a^b \sigma(x) y_\nu(x) \overline{z_\nu(x)} dx = 1 \qquad (2.262)$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x)\overline{z_\nu(s)}}{\lambda_\nu}. \qquad (2.263)$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,s)$ у теоремі 2.20 – лишок функції $G(x,s,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення крайової задачі (2.163), (2.206) – прості нулі функції $\Delta(\lambda)$, то згідно з формулою (2.244) має місце рівність $-Q_\nu(x,s) = y_\nu(x)\overline{z_\nu(s)}$, де $y_\nu(x)$, $z_\nu(s)$ – власні функції спряжених крайових задач (2.163), (2.206) і (2.168), (2.220), відповідні власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$ і пронормовані так, щоб виконувалась умова (2.262). Теорему доведено.

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої функції $f(x)$.

Теорема 2.22. *Нехай всі власні значення крайової задачі* (2.163), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *є простими нулями функції* $\Delta(\lambda)$. *Тоді будь-яка функція* $f(x)$ *з області визначення диференціального оператора* M *розвиваєтьcя у рівномірно збіжний ряд за власними функціями крайової задачі* (2.163), (2.206)

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu y_\nu(x), \tag{2.264}$$

де за виконання умови (2.262)

$$d_\nu = (f,\ z_\nu)_{BV} = \int_a^b \sigma(s) f(s) \overline{z_\nu(s)} ds,$$

а $y_\nu(x), z_\nu(s)$ *– власні функції спряжених крайових задач* (2.163), (2.206) *і* (2.168), (2.220), *відповідні власним значенням* λ_ν *і* $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $Mf = \varphi'$, $M^* z_\nu = \psi'_\nu$, де $\varphi, \psi_\nu \in$ $\in BV^+([a,b];\mathbb{C})$. Тоді

$$f(x) = \int_a^b G(x,s) d\varphi(s), \quad z_\nu(x) = \int_a^b H(x,s) d\psi_\nu(s), \tag{2.265}$$

де $H(x,s)$ – функція Ґріна квазідиференціального оператора M^*. Підставимо в першу формулу (2.265) замість функції $G(x,s)$

її розвинення (2.263). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, ми можемо його інтегрувати почленно. Отже, має місце формула (2.264), де

$$d_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b \overline{z_\nu(s)} d\varphi(s). \tag{2.266}$$

Оскільки за теоремою 2.18 $G(x,s) = \overline{H(s,x)}$, буде виконуватись і рівність

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b G(x,s) d\varphi(s) = \int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b \overline{H(s,x)} d\varphi(s),$$

звідки за теоремою Фубіні

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)} \int\limits_a^b G(x,s) d\varphi(s) = \int\limits_a^b d\varphi(s) \int\limits_a^b \overline{H(s,x) d\psi_\nu(x)}.$$

Тепер, врахувавши (2.265), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_a^b f(x) d\overline{\psi_\nu(x)} = \int\limits_a^b \overline{z_\nu(x)} d\varphi(x). \tag{2.267}$$

З іншого боку, $M^* z_\nu = \bar{\lambda}_\nu \sigma z_\nu$. Тоді

$$\psi_\nu(x) = \int\limits_a^x \bar{\lambda}_\nu \sigma(s) z_\nu(s) ds.$$

Після підстановки останньої рівності в (2.267) отримаємо з (2.266) співвідношення

$$d_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \int\limits_a^b f(x) \overline{\bar{\lambda}_\nu \sigma(x) z_\nu(x)} dx = \int\limits_a^b \sigma(x) f(x) \overline{z_\nu(x)} dx,$$

що й потрібно було довести.

2.10. Уточнена асимптотика фундаментальної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [57].

2.10.1. Диференціальне рівняння з одиничними коефіцієнтами біля найстаршої похідної і параметра та нульовим коефіцієнтом біля $(n-1)$-й похідної. Розглянемо диференціальне рівняння (2.163), в якому $p_1(x) \equiv 0$ і $\sigma(x) \equiv 1$:

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_3(x)y^{(n-3)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda y, \qquad (2.268)$$

де $p_i = b_i'$, $b_i \in BV^+([a, b]; \mathbb{C})$, $i = \overline{2, n}$, тобто p_i – міри.

В цьому окремому випадку можна уточнити залишковий член асимптотики фундаментальної системи розв'язків рівняння (2.268), а отже, й асимптотики власних значень і власних функцій крайової задачі (2.268), (2.206).

Введемо заміну $\lambda = -\rho^n$. Тоді всю комплексну ρ-площину можна розбити, так само, як і в пункті 2.6.3 на $2n$ секторів $\mathcal{S}_q$, $q = \overline{0, 2n-1}$, де $\mathcal{S}_q = \{\rho : q\pi/n \leqslant \arg\rho \leqslant (q+1)\pi/n\}$. Через $\mathcal{T}_q$ позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), що утворюється з $\mathcal{S}_q$ шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$. Області $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ називатимемо просто областями $\mathcal{S}$ і $\mathcal{T}$.

Нехай ω_1, ω_2, …, ω_n – всі різні корені n-го степеня з -1, занумеровані для $\rho \in \mathcal{T}_q$ таким чином (згідно з твердженням 1.1 [76, с. 53–54] це можливо), щоб виконувався ланцюг нерівностей (2.177).

Рівняння (2.268) так само, як і в пункті 2.6.1, за допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}\big(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ зводиться до коректної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = \mathcal{B}'(x)Y, \qquad (2.269)$$

де матриця-міра $\mathcal{B}'(x)$ має вигляд

$$\mathcal{B}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\rho^n - p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторне рівняння (2.269) можна подати у вигляді

$$Y' = \Psi_1'(x)Y + \Psi_2'(x)Y,$$

де

$$\Psi_1'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\rho^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -p_n(x) & \cdots & -p_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Системі $Y' = \Psi_1'(x)Y$ відповідає однорідне рівняння

$$y^{(n)} + \rho^n y = 0, \tag{2.270}$$

яке має фундаментальну систему роз'язків $e^{\rho\omega_1 x}, e^{\rho\omega_2 x}, \dots, e^{\rho\omega_n x}$. Рівняння (2.268) можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + \rho^n y = -p_2 y^{(n-2)} - p_3 y^{(n-3)} - \dots - p_n y. \tag{2.271}$$

Якщо праву частину цієї рівності розглядати як «неоднорідність», то за формулою Коші для неоднорідного рівняння

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,\xi)\,d\Psi_2(\xi)Y(\xi), \tag{2.272}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця однорідної системи $Y' = \Psi_1'(x)Y$; вона має структуру (див. [112, 124, с. 124]):

$$B(x,\xi)=\begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}}(x,\xi) & K(x,\xi) \\ K^{\{n-1\}(1)}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}(1)}(x,\xi) & K^{(1)}(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{\{n-1\}(n-1)}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}(n-1)}(x,\xi) & K^{(n-1)}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{2.273}$$

де $K(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (2.270), а фігурними дужками позначено квазіпохідні за другою змінною в сенсі спряженого до (2.270) рівняння. Відомо [124, с. 132], що вони визначаються формулами

$$z^{\{0\}} \overset{def}{=} z, \quad z^{\{i\}} = -\left(z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.274}$$

Позначимо $Y(a) = \operatorname{colon}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n)$. Використавши (2.273) та врахувавши, що

$$d\Psi_2(\xi)Y(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -\sum\limits_{s=2}^{n} y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi) \end{pmatrix},$$

можна розписати (2.272) покоординатно у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса $(\nu = \overline{0, n-1})$

$$y^{(\nu)}(x)=\sum_{s=1}^{n} \tilde{c}_s K^{(\nu)\{n-s\}}(x,a) - \sum_{s=2}^{n} \int_a^x K^{(\nu)}(x,\xi)y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi). \tag{2.275}$$

Тут $y(x)$ – розв'язок рівняння (2.268) або, що те саме, рівняння (2.271).

Легко перевірити, що функція Коші для рівняння (2.270) має вигляд

$$K(x,\xi) = -\frac{\omega_1 e^{\rho\omega_1(x-\xi)} + \omega_2 e^{\rho\omega_2(x-\xi)} + \ldots + \omega_n e^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\rho^{n-1}}. \tag{2.276}$$

Дійсно, вона задовольняє рівняння (2.270) за змінною x; $K^{(\nu)}(\xi,\xi)=0$, $\nu=\overline{0,n-2}$; $K^{(n-1)}(\xi,\xi)=1$, оскільки

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}=0,\quad \nu=\overline{0,n-2},\qquad \sum_{j=1}^{n}\omega_j^{n}=-n.$$

Враховуючи формули (2.274), (2.276), отримуємо для $\nu=\overline{0,n-1}$

$$K^{(\nu)}(x,\xi)=K^{\{\nu\}}(x,\xi)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}\rho^{\nu}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}.$$

Тоді систему (2.275) можна подати у вигляді

$$y^{(\nu)}(x)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_s\omega_j^{\nu+n-s+1}\rho^{\nu+n-s}e^{\rho\omega_j(x-a)}+$$
$$+\frac{1}{n\rho^{n-\nu-1}}\sum_{s=2}^{n}\int_a^x\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi).$$

Сталі $\tilde{c}_j$, $j=\overline{1,n}$, можна вибрати так, щоб виконувалась система рівностей ($\nu=\overline{0,n-1}$)

$$y^{(\nu)}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j(\rho\omega_j)^{\nu}e^{\rho\omega_j x}+$$
$$+\frac{1}{n\rho^{n-\nu-1}}\sum_{s=2}^{n}\int_a^x\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}y^{(n-s)}(\xi)db_s(\xi).\tag{2.277}$$

Дійсно, з рівності

$$\left(-\frac{\tilde{c}_1}{n}\omega_1^n-\ldots-\frac{\tilde{c}_n}{n\rho^{n-1}}\omega_1\right)e^{-\rho\omega_1 a}e^{\rho\omega_1 x}+\ldots$$
$$\ldots+\left(-\frac{\tilde{c}_1}{n}\omega_n^n-\ldots-\frac{\tilde{c}_n}{n\rho^{n-1}}\omega_n\right)e^{-\rho\omega_n a}e^{\rho\omega_n x}=$$
$$=c_1e^{\rho\omega_1 x}+\ldots+c_ne^{\rho\omega_n x}$$

отримуємо систему

$$\begin{cases} -e^{-\rho\omega_1 a}(\tilde{c}_1\omega_1^n\rho^{n-1}+\ldots+\tilde{c}_n\omega_1)=c_1 n\rho^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -e^{-\rho\omega_n a}(\tilde{c}_1\omega_n^n\rho^{n-1}+\ldots+\tilde{c}_n\omega_n)=c_n n\rho^{n-1}, \end{cases}$$

визначник якої

$$\begin{vmatrix} -e^{-\rho\omega_1 a}\omega_1^n\rho^{n-1} & \cdots & -e^{\rho\omega_1 a}\omega_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -e^{-\rho\omega_n a}\omega_n^n\rho^{n-1} & \cdots & -e^{\rho\omega_n a}\omega_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}e^{-\rho\omega_j a}\omega_j \begin{vmatrix} \omega_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

для $|\rho|>0$ відмінний від нуля як визначник Вандермонда.

Покладаючи для деякого фіксованого k, $k=\overline{1,n}$,

$$c_j' = \begin{cases} c_j, & j=\overline{1,k}, \\ c_j+\sum\limits_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \frac{\omega_j e^{-\rho\omega_j\xi}}{n\rho^{n-1}}y^{(n-s)}(\xi)\,db_s(\xi), & j=\overline{k+1,n}, \end{cases} \tag{2.278}$$

систему (2.277) запишемо у вигляді

$$y^{(\nu)}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j'\omega_j^{\nu}\rho^{\nu}e^{\rho\omega_j x}+$$
$$+\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^x\frac{\partial^{\nu}K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^{\nu}}y^{(n-s)}(\xi)\,db_s(\xi)-$$
$$-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_x^b\frac{\partial^{\nu}K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^{\nu}}y^{(n-s)}(\xi)\,db_s(\xi),\quad \nu=\overline{0,n-1}, \tag{2.279}$$

де

$$K_1(x,\xi,\rho)=\sum_{j=1}^{k}\omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)},\quad K_2(x,\xi,\rho)=\sum_{j=k+1}^{n}\omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)}.$$

2.10.2. Асимптотика розв'язків диференціального рівняння з мірами. Користуючись властивістю коренів n-го степеня з -1, легко встановити наступну лему.

Лема 4. *Існує така стала C, що для всіх $\rho \in \mathcal{T}$ і $\nu = \overline{0, n-1}$ виконуються нерівності*

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x,\xi,\rho)\right| \leqslant C\,|\rho|^\nu\, k \left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|,\ a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b,$$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_2(x,\xi,\rho)\right| \leqslant C\,|\rho|^\nu\,(n-k)\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|,\ a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b.$$

Доведення здійснюється за схемою [76, с. 58]. Справді, оскільки неперервна функція є обмеженою, ми можемо вибрати сталу C так, щоб

$$\left|e^{c(\omega_j-\omega_k)(x-\xi)}\right| \leqslant C \quad \forall j,k = \overline{1,n}, \quad x,\xi \in [a,b].$$

Якщо $\rho \in \mathcal{T}$, то з нерівностей (2.177) випливає, що для $\alpha \leqslant k$ має місце $\operatorname{Re}(\rho\omega_\alpha) \leqslant \operatorname{Re}(\rho\omega_\alpha + (\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha))$. Тому при $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x,\xi,\rho)\right| = \left|\sum_{\alpha=1}^{k} \rho^\nu \omega_j^{\nu+1} e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{k} |\rho|^\nu \left|e^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha)](x-\xi)}\right|,$$

звідки випливає перша нерівність леми. Друга нерівність доводиться аналогічно.

У наступній теоремі на основі аналізу інтегро-диференціальних рівнянь (2.279) встановлюються асимптотичні формули для розв'язків рівняння (2.271).

Теорема 2.23. *Якщо $p_i = b_i'$, $b_i \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{2,n}$, то в усій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини рівняння (2.271) має n лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярних відносно $\rho \in \mathcal{T}$ при достатньо великих $|\rho|$, таких, що задовольняють для $k = \overline{1,n}$ співвідношення*

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left[\omega_k^\nu + O\!\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \quad \nu = \overline{0,n-1}. \tag{2.280}$$

Доведення. Припустимо, що рівняння (2.271) має розв'язок y_k такий, що $c'_\nu = 0$ при $\nu \neq k$, $c'_k = e^{-\rho\omega_k a}$. Отже,

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} y_k^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi) -$$
$$- \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_x^b \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} y_k^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{2.281}$$

Покладемо

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)} z_{k\nu} \tag{2.282}$$

і позначимо

$$\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-s+2} \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}, & \xi \leqslant x, \\ -\frac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-s+2} \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}, & \xi > x, \end{cases}$$
$$k = \overline{1,n},\ \nu = \overline{0,n-1},\ s = \overline{2,n}.$$

Тоді для функцій $z_{k\nu} = z_{k\nu}(x,\rho)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu + \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho) z_{k,n-s}(\xi,\rho)\, db_s(\xi). \tag{2.283}$$

При фіксованому k і $\nu = \overline{0, n-1}$ це є система інтегральних рівнянь стосовно функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$, $\nu = \overline{0,n-1}$. Інтеграл у (2.283) буде існувати як класичний інтеграл Рімана-Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна функція матиме розриви хіба що справа, тоді як $b_s(x)$ є неперервними праворуч. Якщо система (2.283) має розв'язок, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо

$$z_{k\nu}(x) = \omega_k^\nu + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\omega_k^{n-s}db_s(\xi) +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{s_1,s_2=2}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\mathcal{K}_{k,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$

$$\times z_{k,n-s_2}(\xi_2)db_{s_1}(\xi_1)db_{s_2}(\xi_2) = \ldots$$

$$\ldots = \omega_k^\nu + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\omega_k^{n-s}db_s(\xi) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\rho^m}\sum_{s_1,\ldots,s_m=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_{m-1},s_m}(\xi_{m-1},\xi_m,\rho)\omega_k^{n-s_m}db_{s_1}(\xi_1)\ldots db_{s_m}(\xi_m) +$$

$$+\frac{1}{\rho^{m+1}}\sum_{s_1,\ldots,s_{m+1}=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_m,s_{m+1}}(\xi_m,\xi_{m+1},\rho)\times$$

$$\times z_{k,n-s_{m+1}}(\xi_{m+1})db_{s_1}(\xi_1)\ldots db_{s_{m+1}}(\xi_{m+1}). \tag{2.284}$$

Покладемо $B = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|z_{kj}(x)|$, $j=\overline{0,n-1}$. З леми 4 випливає, що існують такі сталі C і R, що при $|\rho|>R$ маємо $|\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)|\leqslant C$. Введемо позначення $v_j = \bigvee\limits_a^b b_j(x)$, $j=\overline{2,n}$. Тоді останній доданок з рівності (2.284) за модулем не перевищує

$$B\frac{C^{m+1}}{|\rho|^{m+1}}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{m+1}=2}^{n}\prod_{j=1}^{m+1}v_{s_j} =$$

$$= B\frac{C^{m+1}}{|\rho|^{m+1}}\sum_{s_j\geqslant 0,\ \sum\limits_{j=2}^{n}s_j=m+1}\frac{(m+1)!}{\prod\limits_{j=2}^{n}s_j!}\prod_{j=2}^{n}v_j^{s_j},$$

що можна записати за формулою полінома у вигляді

$$B\left[\frac{C}{|\rho|}\sum_{j=2}^{n} v_j\right]^{m+1}.$$

При $|\rho| > R_0$, де

$$R_0 = \max\left\{R,\ C\sum_{j=2}^{n} v_j\right\},$$

функція $z_{k\nu}(x) = z_{k\nu}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^{\nu} + \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\omega_k^{n-s}\,db_s(\xi) +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{s_1,s_2=2}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\mathcal{K}_{k,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$

$$\times\omega_k^{n-s_2}\,db_{s_1}(\xi_1)\,db_{s_2}(\xi_2) + \ldots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho| \geqslant R_1 > R_0$, $a \leqslant x \leqslant b$ цей ряд збігається рівномірно і є розв'язком системи (2.283). Отже, система (2.283) має один і тільки один розв'язок $z_{k\nu} = z_{k\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^{\nu} + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

Звідси і з рівності (2.282) випливають співвідношення (2.280), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність функцій y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Залишається довести, що існує розв'язок $y_k(x,\rho)$ рівняння (2.271), що задовольняє (2.281). Для цього достатньо показати, що якими б не були сталі c'_ν, існує розв'язок y рівняння (2.271), що задовольняє (2.279) при цих значеннях c'_ν.

Рівності (2.278) – це лінійне перетворення від c_j до c'_j. Очевидно, достатньо довести, що визначник перетворення (2.278) при достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля. У цьому випадку рівняння (2.278) можна розв'язати відносно c_j при довільно заданих c'_j.

Якщо визначник перетворення (2.278) дорівнює нулю при як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, то для цих значень ρ рівняння (2.278) мають нетривіальні розв'язки відносно c_j при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$. Відповідна функція y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи

$$y^{(\nu)} = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int\limits_a^x \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} y^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi) - \\ - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int\limits_x^b \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} y^{(n-s)}(\xi)\, db_s(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

яку можна отримати з (2.279) при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$. Доведемо, що це неможливо. Поклавши

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_\nu, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{2.285}$$

отримаємо для функцій z_ν систему рівнянь

$$z_\nu(x,\rho) = \\ = \frac{1}{n\rho} \sum_{s=2}^{n} \int\limits_a^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-s+2} \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} z_{n-s}(\xi,\rho)\, db_s(\xi) - \\ - \frac{1}{n\rho} \sum_{s=2}^{n} \int\limits_x^b e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-s+2} \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} z_{n-s}(\xi,\rho)\, db_s(\xi).$$

Нехай $m(\rho) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |z_\nu(x,\rho)|$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Застосувавши лему 4 до правої частини останньої системи, отримаємо оцінку

$$|z_\nu(x,\rho)| \leqslant \frac{1}{n|\rho|}\left[Ck\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b |\rho|^{-s+2}\,|db_s(\xi)| + \right.$$
$$\left. + C(n-k)\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b |\rho|^{-s+2}\,|db_s(\xi)|\right] m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то

$$m(\rho) \leqslant m(\rho)\frac{C}{|\rho|}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b |db_s(\xi)|\,|\rho|^{-s+2} \leqslant m(\rho)\frac{C_1}{|\rho|},$$

де C_1 – деяка стала. При великих $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$, отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (2.285) отримуємо, що $y \equiv 0$ при $\nu = 0$. Теорему доведено.

2.10.3. Асимптотика розв'язків диференціального рівняння з гладкими коефіцієнтами біля найстарших похідних і параметра. Розглянемо тепер диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda\sigma(x)y, \quad (2.286)$$

де $\sigma^{(n-1)} \in BV^+([a,b];\mathbb{R})$, $\sigma(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $p_1^{(n-2)} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $p_j = b_j'$, $b_j \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$, тобто p_j – міри.

Можна розглядати також рівняння

$$\tilde{p}_0(x)y^{(n)} + \tilde{p}_1(x)y^{(n-1)} + \tilde{p}_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + \tilde{p}_n(x)y = \lambda g(x)y,$$

де $\tilde{p}_0^{(n-1)}, g^{(n-1)} \in BV^+([a,b];\mathbb{R})$, $\tilde{p}_0(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $g(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $\tilde{p}_1^{(n-2)} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $\tilde{p}_j = \tilde{b}_j'$, $\tilde{b}_j \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$. Це рівняння діленням на $\tilde{p}_0(x)$ легко зводиться до вигляду (2.286) з коефіцієнтами з вказаних класів.

У цьому окремому випадку теж можна уточнити залишковий член асимптотики фундаментальної системи розв'язків рівняння (2.286), а отже, й асимптотики власних значень та власних функцій крайової задачі (2.286), (2.206).

Позначимо $\tilde{\sigma}(x) = |\sigma(x)|$, тоді $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(\sigma)\tilde{\sigma}(x)$.

Розглянемо заміну ([76, с. 87], [96, 152])

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[n]{\tilde{\sigma}(\xi)}d\xi. \tag{2.287}$$

Ми можемо записати

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}t'(x),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}(t'(x))^2 + \frac{dy}{dt}t''(x),$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}(t'(x))^3 + \frac{d^2y}{dt^2}t'(x)t''(x) + \frac{dy}{dt}t'''(x),$$
$$\dots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny}{dt^n}(t'(x))^n + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t'(x))^{n-2}t''(x) + \dots$$
$$\dots + \frac{dy}{dt}t^{(n)}(x).$$

Останню формулу можна легко встановити за допомогою математичної індукції.

Побудуємо тепер похідні функції $t(x)$:

$$t'(x) = \sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)},$$
$$t''(x) = \frac{\tilde{\sigma}'(x)}{n\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1}},$$
$$t'''(x) = \frac{\tilde{\sigma}''(x)\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1} - (\tilde{\sigma}'(x))^{\frac{n-1}{n}}\frac{\tilde{\sigma}'(x)}{\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}}}{n\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{2n-2}} =$$
$$= \frac{\tilde{\sigma}''(x)}{n\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1}} + \dots$$

Неважко переконатись, що

$$t^{(n)}(x) = \frac{\tilde{\sigma}^{(n-1)}(x)}{n\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1}} + \ldots,$$

де замість трьох крапок мають стояти доданки з меншою кількістю похідних функції $\tilde{\sigma}(x)$.

Підставляючи в (2.286) знайдені вирази, ми отримуємо рівність (в узагальненому сенсі)

$$\frac{d^n y(x(t))}{dt^n}\tilde{\sigma}(x) + \left[\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-2}\frac{\tilde{\sigma}'(x)}{n\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1}} + \right.$$
$$\left. + p_1(x)\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{n-1}\right]\frac{d^{n-1}y(x(t))}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y(x(t)) =$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma)\lambda\tilde{\sigma}(x)y(x(t)).$$

Поділивши останню рівність на $\tilde{\sigma}(x)$, будемо мати

$$\hat{y}^{(n)}(t) + \gamma_1(t)\hat{y}^{(n-1)}(t) + \gamma_2(t)\hat{y}^{(n-2)}(t) + \ldots + \gamma_n(t)\hat{y}(t) = = \operatorname{sgn}(\sigma)\lambda\hat{y}(t), \tag{2.288}$$

де $\hat{y}(t) = y(x(t))$,

$$\gamma_1(t) = \frac{n-1}{2}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{dx}\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x(t))}\right)^{-1}(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-1} + + p_1(x(t))\left(\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x(t))}\right)^{-1}, \tag{2.289}$$

$\gamma_1^{(n-2)} \in BV^+([0,h];\mathbb{C})$, $h = t(b)$, $\gamma_j(t)$ $(j = \overline{2,n})$ є мірами.

У цьому випадку заміна

$$\hat{y}(t) = e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^t \gamma_1(\xi)d\xi}\tilde{y}(t) = \hat{e}(t)\tilde{y}(t) \tag{2.290}$$

зводить рівняння (2.288) до вигляду

$$\tilde{y}^{(n)}(t) + \hat{p}_2(t)\tilde{y}^{(n-2)}(t) + \hat{p}_3(t)\tilde{y}^{(n-3)}(t) + \ldots + \hat{p}_n(t)\tilde{y}(t) = = \operatorname{sgn}(\sigma)\lambda\tilde{y}(t). \tag{2.291}$$

Справді,

$$\hat{y}' = -\frac{1}{n}\gamma_1(t)\hat{e}\tilde{y} + \hat{e}\tilde{y}',$$

$$\hat{y}'' = -\frac{1}{n}\gamma_1'(t)\hat{e}\tilde{y} + \frac{1}{n^2}\gamma_1^2(t)\hat{e}\tilde{y} - \frac{2}{n}\gamma_1(t)\hat{e}\tilde{y}' + \hat{e}\tilde{y}''.$$

За формулою Лейбніца

$$\hat{y}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \hat{e}^{(n-i)}\tilde{y}^{(i)}, \tag{2.292}$$

де $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ – біноміальні коефіцієнти. Звідси видно, що

$$\hat{y}^{(n)} = \hat{e}\tilde{y}^{(n)} + C_n^1\hat{e}'\tilde{y}^{(n-1)} + \ldots = \hat{e}\tilde{y}^{(n)} - \gamma_1(t)\hat{e}\tilde{y}^{(n-1)} + \ldots \tag{2.293}$$

Після підстановки заміни (2.290) в рівняння (2.288), з врахуванням (2.293), отримуємо

$$\hat{e}\tilde{y}^{(n)} + \gamma_1(t)\hat{e}\tilde{y}^{(n-1)} - \gamma_1(t)\hat{e}\tilde{y}^{(n-1)} + \ldots = \operatorname{sgn}(\sigma)\lambda\hat{e}\tilde{y}, \tag{2.294}$$

що свідчить про зникнення члена з $(n-1)$-ю похідною. Крім того, з (2.292) видно, що доданок з найстаршою похідною $\gamma_1(t)$ в рівняння (2.294) має вигляд $-\frac{1}{n}\gamma_1^{(n-1)}(t)\hat{e}\tilde{y}$. Зрозуміло, що $\gamma_1^{(n-1)}(t)$ – міра, яка буде додаватись до міри $\gamma_n(t)$. Поділивши обидві частини рівняння (2.294) на $\hat{e} \neq 0$, ми отримаємо рівняння (2.291), причому $\hat{p}_j = \hat{b}_j'$, $b_j \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,n}$.

Введемо заміну $\lambda = -\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n$. Тоді всю комплексну ρ-площину можна розбити, так само, як і в пунктах 2.6.3, 2.10.1 на області $\mathcal{S}$ і $\mathcal{T}$.

Згідно з теоремою 2.23 рівняння (2.291) у всій області комплексної ρ-площини має n лінійно незалежних розв'язків $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$, …, $\tilde{y}_n(t)$, регулярних відносно $\rho \in \mathcal{T}$ для достатньо великих $|\rho|$, і таких, що для $t \in [0,h]$ задовольняють співвідношення

$$\tilde{y}_k^{(\nu)}(t,\rho) = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k t}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \quad \nu = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Повернемось тепер до функції $y(x)$ і рівняння (2.286). Отже, рівняння (2.286) має n лінійно незалежних розв'язків, для яких виконуються асимптотичні формули при великих $|\rho|$

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \hat{e}\frac{d^\nu \tilde{y}_k}{dx^\nu} = \hat{e}(t(x))\frac{d^\nu \tilde{y}_k}{dt^\nu}(t'(x))^\nu =$$
$$= e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^{t(x)}\gamma_1(\xi)d\xi}(\rho\omega_k(t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big).$$

Використовуючи формули (2.289) та (2.287), отримуємо

$$\int\limits_0^{t(x)}\frac{n-1}{2}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{dx}\,(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-1}(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-\frac{1}{n}}\,dt =$$
$$= \frac{n-1}{2}\int\limits_0^{t(x)}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{dt}\frac{dt}{dx}\,(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-1}(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-\frac{1}{n}}\,dt =$$
$$= \frac{n-1}{2}\int\limits_0^{t(x)}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{dt}\,\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x(t))}\,(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-1}(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-\frac{1}{n}}\,dt =$$
$$= \frac{n-1}{2}\int\limits_0^{t(x)}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{\tilde{\sigma}(x(t))} = \frac{n-1}{2}\ln\tilde{\sigma}(x(t))\Big|_0^{t(x)} =$$
$$= \frac{n-1}{2}(\ln\tilde{\sigma}x - \ln\tilde{\sigma}(a)).$$

Для знаходження інтеграла

$$\int\limits_0^{t(x)} p_1(x(t))\,(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-\frac{1}{n}}\,dt$$

застосуємо заміну $x = x(t)$, тоді

$$dx = x'(t)dt = \frac{dt}{t'(x)} = \frac{dt}{\sqrt[n]{\tilde{\sigma}(x)}}.$$

Врахувавши, що $x = a$ при $t = 0$, отримаємо

$$\int\limits_0^{t(x)} p_1(x(t))\,(\tilde\sigma(x(t)))^{-\frac{1}{n}}\,dt = \int\limits_a^x p_1(x)dx.$$

Отже,

$$e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^{t(x)}\gamma_1(t)dt} = \left(\frac{\tilde\sigma(x)}{\tilde\sigma(a)}\right)^{-\frac{n-1}{2n}} e^{-\frac{1}{n}\int\limits_a^x p_1(x)dx}.$$

Тоді

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \left(\frac{\tilde\sigma(x)}{\tilde\sigma(a)}\right)^{-\frac{n-1}{2n}} e^{-\frac{1}{n}\int\limits_a^x p_1(\xi)d\xi} (\rho\omega_k t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big).$$

Оскільки $(\tilde\sigma(a))^{\frac{n-1}{2n}}$ є сталою величиною, ми можемо сформулювати доведену теорему.

Теорема 2.24. *За вищезгаданих припущень на коефіцієнти у всій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини рівняння (2.286) має n лінійно незалежних розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярних відносно $\rho \in \mathcal{T}$ для достатньо великих $|\rho|$, таких, що задовольняють співвідношення*

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = (\rho\omega_k t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\hat E(x)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \tag{2.295}$$

де $\nu = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{1, n}$,

$$t(x) = \int\limits_a^x \sqrt[n]{|\sigma(\zeta)|}d\zeta, \quad \hat E(x) = |\sigma(x)|^{-\frac{n-1}{2n}} e^{-\frac{1}{n}\int\limits_a^x p_1(\zeta)d\zeta}.$$

Зауваження. У випадку, коли $\sigma \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$, $p_j \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, викладені в цьому пункті заміни (2.287) і (2.290) та асимптотичні формули (2.295) були відомі вже давно (див. теорему 1.1 і зауваження 2–4 до неї). Виявляється, що погіршення коефіцієнтів до певної межі не змінює формули (2.295), а теорему 1.1 і зауваження 2–4 до неї можна отримати як наслідки з теореми 2.24.

2.11. Уточнена асимптотика фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [60].

2.11.1. Зведення до диференціального рівняння в окремому випадку. Розглянемо тепер квазідиференціальне рівняння

$$L_{mn}(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \Big(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)} = \lambda \sigma(x) y \quad (2.296)$$

в припущенні, що $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{00}^{(r-1)}, \sigma^{(r-1)} \in BV^{+}([a,b];\mathbb{R})$, $r = n+m$, $a_{00}(x) \neq 0$, $\sigma(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $a_{10}^{(r-2)}, a_{01}^{(r-2)} \in$ $\in BV^{+}([a,b];\mathbb{C})$, $a_{i0}, a_{0j} \in L_2([a,b];\mathbb{C})$ $(i = \overline{2,n},\ j = \overline{2,m})$, $a_{ij} =$ $= b'_{ij}$, $b_{ij} \in BV^{+}([a,b];\mathbb{C})$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$.

У цьому окремому випадку теж можна уточнити залишковий член асимптотики фундаментальної системи розв'язків рівняння (2.296), яке відрізняється від квазідиференціального рівняння (2.3) більш жорсткими вимогами, накладеними на коефіцієнти $a_{00}(x)$, $a_{10}(x)$, $a_{01}(x)$, $\sigma(x)$. Внаслідок цього вдається отримати точнішу асимптотику власних значень і власних функцій крайової задачі (2.296), (2.66), ніж у теоремах 2.2–2.4.

За допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}\big(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[r-1]}\big)$ з квазіпохідними, визначеними рівностями (2.2), рівняння (2.296) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку (2.5), де матриця-міра $C'(x)$ подається формулою (2.7). Векторне рівняння (2.5), як і в пункті 2.1.3, подається у вигляді (2.16), після чого розглядається система (2.18) та рівняння (2.19):

$$(-1)^m \left[\Big(a_{00} y^{(n)}\Big)^{(m)} + \Big(a_{10} y^{(n-1)}\Big)^{(m)} - \right.$$
$$\left. - \Big(a_{01} y^{(n)}\Big)^{(m-1)} - \Big(a_{01} a_{00}^{-1} a_{10} y^{(n-1)}\Big)^{(m-1)} \right] = \lambda \sigma y.$$

За вказаних припущень на коефіцієнти $a_{00}(x)$, $\sigma(x)$, $a_{10}(x)$, $a_{01}(x)$ можна виконати в рівнянні (2.19) m-кратне диференціювання і отримати рівність

$$\sum_{j=0}^{m+1} f_j(x) y^{(r-j)} = \lambda\sigma(x) y, \tag{2.297}$$

де $f_0(x) = (-1)^m a_{00}(x)$, $f_0^{(r-1)} \in BV^+([a,b];\mathbb{R})$, $f_1(x) = (-1)^m(a_{10}(x) - a_{01}(x) + m a'_{00}(x))$, $f_1^{(r-2)} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, а $f_j(x)$ ($j = \overline{2, m+1}$) є принаймні мірами. Поділивши рівняння (2.297) на $(-1)^m a_{00}(x)$, ми отримаємо

$$\begin{aligned} y^{(r)} + \tilde{f}_1(x) y^{(r-1)} + \tilde{f}_2(x) y^{(r-2)} + \ldots + \tilde{f}_{m+1}(x) y^{(n-1)} &= \\ = (-1)^m \lambda \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma) \tilde{\sigma}(x) y, \end{aligned} \tag{2.298}$$

де

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{a_{10}(x) - a_{01}(x) + m a'_{00}(x)}{a_{00}(x)}, \qquad \tilde{\sigma}(x) = \left|\frac{\sigma(x)}{a_{00}(x)}\right|.$$

Розглянемо заміну ([76, с. 87], [96, 152])

$$t(x) = \int_a^x \sqrt[r]{\tilde{\sigma}(\xi)}\, d\xi. \tag{2.299}$$

Ми можемо записати

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} t'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}(t'(x))^2 + \frac{dy}{dt} t''(x),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}(t'(x))^3 + \frac{d^2y}{dt^2} t'(x) t''(x) + \frac{dy}{dt} t'''(x),$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^ry}{dx^r} = \frac{d^ry}{dt^r}(t'(x))^r + \frac{r(r-1)}{2}\frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}}(t'(x))^{r-2} t''(x) + \ldots + \frac{dy}{dt} t^{(r)}(x).$$

Останню формулу можна легко встановити за допомогою математичної індукції.

Побудуємо тепер похідні функції $t(x)$:

$$t'(x) = \sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)},$$

$$t''(x) = \frac{\tilde{\sigma}'(x)}{r\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{r-1}},$$

$$t'''(x) = \frac{\tilde{\sigma}''(x)\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{r-1} - (\tilde{\sigma}'(x))^{\frac{r-1}{r}}\frac{\tilde{\sigma}'(x)}{\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}}}{r\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{2r-2}} = \frac{\tilde{\sigma}''(x)}{r\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{r-1}} + \ldots$$

Неважко переконатись, що

$$t^{(r)}(x) = \frac{\tilde{\sigma}^{(r-1)}(x)}{r\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x)}\right)^{r-1}} + \ldots,$$

де замість трьох крапок мають стояти доданки з меншою кількістю похідних $\tilde{\sigma}(x)$.

Підставивши в (2.298) знайдені вирази і поділивши останню рівність на $\tilde{\sigma}(x)$, ми отримаємо рівність (в узагальненому сенсі)

$$\hat{y}^{(r)}(t) + \hat{\gamma}_1(t)\hat{y}^{(r-1)}(t) + \hat{\gamma}_2(t)\hat{y}^{(r-2)}(t) + \ldots + \hat{\gamma}_{r-1}(t)\hat{y}'(t) = \\ = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\lambda\hat{y}(t), \tag{2.300}$$

де $\hat{y}(t) = y(x(t))$,

$$\hat{\gamma}_1(t) = \frac{r-1}{2}\frac{d\tilde{\sigma}(x(t))}{dx}\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x(t))}\right)^{-1}(\tilde{\sigma}(x(t)))^{-1} + \\ + \tilde{f}_1(x(t))\left(\sqrt[r]{\tilde{\sigma}(x(t))}\right)^{-1}, \tag{2.301}$$

$\hat{\gamma}_1^{(r-2)} \in BV^+([0,h];\mathbb{C})$, $h = t(b)$, $\hat{\gamma}_j(t)$ $(j = \overline{2,r})$ є принаймні мірами.

В цьому випадку заміна

$$\hat{y}(t) = e^{-\frac{1}{r}\int\limits_0^t \hat{\gamma}_1(\xi)d\xi}\tilde{y}(t) \tag{2.302}$$

зводить рівняння (2.300) до вигляду

$$\tilde{y}^{(n)}(t) + p_2(t)\tilde{y}^{(r-2)}(t) + p_3(t)\tilde{y}^{(r-3)}(t) + \ldots + p_r(t)\tilde{y}(t) = \\ = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\lambda\tilde{y}(t), \tag{2.303}$$

де $p_j = b_j'$, $b_j \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$, $j = \overline{2,r}$.

Доведення цього повністю повторює міркування, наведені в пункті 2.10.3.

Введемо заміну $\lambda = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r$. Тоді всю комплексну ρ-площину можна розбити, так само, як і в пункті 2.1.3, на області $\mathcal{S}$ і $\mathcal{T}$.

Згідно з теоремою 2.23 рівняння (2.303) у всій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини має r лінійно незалежних розв'язків $\tilde{y}_1(t)$, $\tilde{y}_2(t)$, $\ldots$, $\tilde{y}_r(t)$, регулярних відносно $\rho \in \mathcal{T}$ для достатньо великих $|\rho|$ і таких, що для $t \in [0,h]$ задовольняють співвідношення

$$\tilde{y}_k^{(\nu)}(t,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k t}\omega_k^\nu\Big[1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big], \quad \nu = \overline{0,r-1}, \quad k = \overline{1,r}.$$

Повернемось тепер до функції $y(x)$ і рівняння (2.297). Отже, рівняння (2.297) має r лінійно незалежних розв'язків, для яких справджуються асимптотичні формули при великих $|\rho|$

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^{t(x)}\gamma_1(\xi)d\xi}(\rho\omega_k(t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big).$$

Використавши формули (2.301), (2.299) та повторивши викладки пункту 2.10.3, прийдемо до висновку, що рівняння (2.297) має r лінійно незалежних розв'язків, для яких при великих $|\rho|$ справджуються асимптотичні формули ($\nu = \overline{0,r-1}$, $k = \overline{1,r}$)

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)}\hat{E}(x)\omega_k^\nu\Big[1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big], \tag{2.304}$$

де $\hat{E}(x)$ подається формулою (2.28).

Рівнянню (2.19) відповідають квазіпохідні (2.21). Тому з (2.304) зрозумілою є асимптотична поведінка для великих $|\rho|$,

$\rho \in \mathcal{T}$, квазіпохідних, відповідних розв'язкам y_1, y_2, $\ldots$, y_r, $(\nu = \overline{0, r-1},\ k = \overline{1, r})$

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \hat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)} \hat{E}(x)\omega_k^\nu \Big[1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big], \qquad (2.305)$$

де $\hat{R}_\nu(x)$ подаються формулою (2.30).

2.11.2. Оцінка квазіпохідних функції Коші. Нехай $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.19). Квадратні дужки у формулах нижче позначають квазіпохідні в сенсі рівняння (2.19) за першою змінною. За допомогою фігурних дужок ми позначатимемо квазіпохідні в сенсі спряженого до (2.19) рівняння, вони подаються формулами (2.32). Від функції Коші квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння братимуться за другою змінною. Мішані квазіпохідні функції Коші $K^{[i]\{j\}}(x,z)$ $(i,j = \overline{0, r-1})$ можна подати (див. [124, с. 107]) у вигляді

$$K^{[i]\{j\}}(x,z) = \frac{1}{W(z)} \begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{[r-j-2]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j-2]}(z) \\ y_1^{[i]}(x) & \cdots & y_r^{[i]}(x) \\ y_1^{[r-j]}(z) & \cdots & y_r^{[r-j]}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{[r-1]}(z) & \cdots & y_r^{[r-1]}(z) \end{vmatrix}, \qquad (2.306)$$

де

$$W(z) = \begin{vmatrix} y_1(z) & \cdots & y_r(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{[r-1]}(z) & \cdots & y_r^{[r-1]}(z) \end{vmatrix}, \qquad (2.307)$$

а y_1, y_2, $\ldots$, y_r – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (2.19), асимптотична поведінка якої для великих значень параметра $|\rho|$ подається формулами (2.305). Підставивши (2.305) в (2.306), (2.307), скоротивши на

$$\hat{R}_\nu(z)(\rho t'(z))^\nu \hat{E}(z) \quad (\nu = \overline{0, r-1}, \quad \nu \neq r-j-1),$$

$$e^{\rho\omega_1 t(z)}, \ e^{\rho\omega_2 t(z)}, \ \ldots, \ e^{\rho\omega_r t(z)}$$

і розписавши чисельник за елементами $(r-j)$-го рядка, отримаємо для великих значень параметра $|\rho|$

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=\rho^{i+j+1-r}Q_{ij}(x,z)\sum_{k=1}^{r}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}[\frac{\gamma_{kj}}{\gamma}]_z[\omega_k^i]_x, \tag{2.308}$$

де

$$Q_{ij}(x,z)=\hat{R}_i(x)\hat{R}^{-1}_{r-j-1}(z)(t'(x))^i(t'(z))^{1+j-r}\hat{E}(x)\hat{E}^{-1}(z); \tag{2.309}$$

$$\gamma=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \omega_1^{r-1} & \omega_2^{r-1} & \cdots & \omega_r^{r-1}\end{vmatrix},$$

а γ_{kj} – алгебричні доповнення елементу ω_k^{r-j-1} у визначнику γ, $\gamma\neq 0$ як визначник Вандермонда. Тут і нижче $[\alpha]_x=$ $=\alpha\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)$ при $|\rho|\to\infty$.

Нехай $M_{kj}=\dfrac{\gamma_{kj}}{\gamma_{k0}}$, тобто $\gamma_{kj}=M_{kj}\gamma_{k0}$, $j=\overline{0,r-1}$. Врахувавши, що для функції Коші $K^{[i]}(z,z)=0$, $i=\overline{0,r-2}$, $K^{[r-1]}(z,z)=1$, а $Q_{r-1,0}(z,z)=1$, $M_{k0}=1$, розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих γ_{k0}

$$\sum_{k=1}^{r}\omega_k^i\frac{\gamma_{k0}}{\gamma}=\begin{cases}0, & i=\overline{0,r-2},\\ 1, & i=r-1.\end{cases} \tag{2.310}$$

Система (2.310) має єдиний розв'язок, бо її визначник $\dfrac{\gamma}{\gamma}=1$; з іншого боку, вона задовольняється для $\dfrac{\gamma_{k0}}{\gamma}=-\dfrac{\omega_k}{r}$, оскільки $\omega_k^r=-1$ і $\omega_1^{i+1}+\omega_2^{i+1}+\ldots+\omega_r^{i+1}=0$ за лемою 1. Отже, формула (2.308) набуває вигляду $(i,j=\overline{0,r-1})$

$$K^{[i]\{j\}}(x,z)=-\frac{Q_{ij}(x,z)}{r\rho^{r-1-i-j}}\sum_{k=1}^{r}M_{kj}e^{\rho\omega_k(t(x)-t(z))}\omega_k^{i+1}[1]_x^k[1]_z^k. \tag{2.311}$$

2.11.3. Перехід до рівняння з мірами. Ми будемо шукати асимптотику фундаментальної системи розв'язків за допомогою узагальнення методу, запропонованого в [172], і повторимо з певними змінами і скороченнями міркування, наведені в пунктах 2.1.5–2.1.6. Якщо праву частину рівності

$$Y' - \Phi' Y = \Psi' Y$$

розглядати як «неоднорідність», то згідно з формулою для неоднорідного рівняння (1.41)

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,\xi)d\Psi(\xi)Y(\xi), \tag{2.312}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця однорідної системи (2.18); вона має структуру (2.40), де $K(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (2.19), квадратні дужки позначають квазіпохідні (2.21) в сенсі рівняння (2.19), а фігурні – квазіпохідні (2.32) в сенсі рівняння, спряженого до (2.19). Підставивши (2.6), (2.17), (2.20) і (2.40) в (2.312), отримаємо систему інтегро-квазідиференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса

$$\begin{aligned} y^{[\nu]}(x) &= \sum_{s=1}^{r} \tilde{c}_s K^{[\nu]\{r-s\}}(x,a) - \\ &- \sum_{s=2}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m\}}(x,\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) y^{(n-s)}(\xi) db_{sp}(\xi) - \\ &- \sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{p=2}^{m} \int_a^x K^{[\nu]\{m-p\}}(x,\xi) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) y^{[n]}(\xi) d\xi, \quad \nu = \overline{0, r-1}. \end{aligned} \tag{2.313}$$

Тут $y(x)$ – розв'язок рівняння (2.296) або, що те саме, врахувавши (2.24), рівняння

$$L_{mn}(y) = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r\sigma(x)y. \tag{2.314}$$

Підставивши (2.311) в (2.313) і замінивши індекс k на j, отримаємо

$$y^{[\nu]}(x) = -\sum_{s=1}^{r}\tilde{c}_s\frac{Q_{\nu,r-s}(x,a)}{r\rho^{s-\nu-1}}\sum_{j=1}^{r}M_{j,r-s}e^{\rho\omega_j t(x)}\omega_j^{\nu+1}[1]_x^j[1]^j+ \\ +\Omega_\nu(x), \quad \nu=\overline{0,r-1},$$

де

$$\Omega_\nu(x) = \sum_{s=2}^{n}\int_a^x\frac{Q_{\nu m}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m}}\sum_{j=1}^{r}M_{jm}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\times \\ \times[1]_x^j[1]_\xi^j a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)d\xi- \\ -\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^x\frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r}M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\times \\ \times[1]_x^j[1]_\xi^j y^{(n-s)}(\xi)db_{sp}(\xi)+ \\ +\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^x\frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r}M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}\times \\ \times[1]_x^j[1]_\xi^j a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)y^{(n-s)}(\xi)d\xi- \\ -\sum_{p=2}^{m}\int_a^x\frac{Q_{\nu,m-p}(x,\xi)}{r\rho^{r-1-\nu-m+p}}\sum_{j=1}^{r}M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1}[1]_x^j[1]_\xi^j\times \\ \times a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)y^{[n]}(\xi)d\xi.$$

Виберемо c_j так, щоб для $0\leqslant\nu\leqslant r-1$

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{j=1}^{r}\hat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu\omega_j^\nu c_j\hat{E}(x)e^{\rho\omega_j t(x)}[1]_x^j+\Omega_\nu(x). \tag{2.315}$$

Тоді для c_j справджується система ($j=\overline{1,r}$)

$$-\sum_{s=1}^{r}\tilde{c}_s\hat{R}_{s-1}^{-1}(a)\frac{(t'(a))^{1-s}}{r\rho^{s-1}}\hat{E}^{-1}(a)M_{j,r-s}\omega_j[1]^j=c_j. \tag{2.316}$$

Покладемо для деякого фіксованого k, $k=\overline{1,r}$,

$$\hat{c}_j=c_j \quad \text{для} \;\; j=\overline{1,k}, \tag{2.317}$$

$$\hat{c}_j=c_j-\sum_{s=2}^{n}\frac{M_{jm}}{r\rho^{n-1}}\int\limits_a^b\frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j\,[1]_\xi^j\,a_{s0}(\xi)}{\hat{E}(\xi)\,a_{00}^2(\xi)\,(t'(\xi))^{n-1}}\,y^{(n-s)}(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^p\,M_{j,m-p}}{r\rho^{n+p-1}}\left[\int\limits_a^b\frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j\,[1]_\xi^j\,y^{(n-s)}(\xi)}{\hat{E}(\xi)\,a_{00}(\xi)\,(t'(\xi))^{n+p-1}}\,db_{sp}(\xi)\;-\right.$$

$$\left.-\int\limits_a^b\frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\omega_j\,[1]_\xi^j}{\hat{E}(\xi)\,a_{00}^2(\xi)\,(t'(\xi))^{n+p-1}}\,a_{0p}(\xi)\,a_{s0}(\xi)\,y^{(n-s)}(\xi)d\xi\right]+$$

$$+\sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^p}{r\rho^{n+p-1}}M_{j,m-p}\int\limits_a^b\frac{e^{-\rho\omega_j t(\xi)}\,a_{0p}(\xi)\,\omega_j}{\hat{E}(\xi)\,a_{00}^2(\xi)\,(t'(\xi))^{n+p-1}}\,[1]_\xi^j\,y^{[n]}(\xi)d\xi$$

$$\text{для } j=\overline{k+1,r}. \tag{2.318}$$

Внаслідок того, що для $p\geqslant 1$

$$Q_{\nu,m-p}(x,\xi)=\hat{R}_\nu(x)(-1)^{p-1}a_{00}^{-1}(\xi)(t'(x))^{\nu}(t'(\xi))^{1-n-p}\times$$
$$\times\hat{E}(x)\hat{E}^{-1}(\xi),\quad \nu=\overline{0,r-1},$$

ввівши позначення

$$K_{1\nu p}(x,\xi,\rho)=\sum_{j=1}^{k}\rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1},$$

$$K_{2\nu p}(x,\xi,\rho)=\sum_{j=k+1}^{r}\rho^\nu Q_{\nu,m-p}(x,\xi)M_{j,m-p}e^{\rho\omega_j(t(x)-t(\xi))}\omega_j^{\nu+1},$$
$$\nu=\overline{0,r-1},\quad p=\overline{0,m},$$

і підставивши (2.317), (2.318) в (2.315), отримаємо

$$
\begin{aligned}
y^{[\nu]}(x) = \hat{R}_\nu(x) \sum_{j=1}^{r} (\rho\omega_j t'(x))^\nu [\hat{c}_j]_x^j \hat{E}(x) e^{\rho\omega_j t(x)} + \\
+ H_{1\nu}(a, x, \rho) + H_{2\nu}(b, x, \rho), \qquad \nu = \overline{0, r-1},
\end{aligned}
\tag{2.319}
$$

де для $q = 1, 2$, $\nu = \overline{0, r-1}$

$$
\begin{aligned}
&H_{q\nu}(u, x, \rho) = \\
&= \sum_{s=2}^{n} \frac{\rho^{1-n}}{r} \int_u^x K_{q\nu 0}(x, \xi, \rho) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) [1]_{x,\xi} d\xi - \\
&- \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{\rho^{1-n-p}}{r} \Bigg[\int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) y^{(n-s)}(\xi) [1]_{x,\xi} db_{sp}(\xi) - \\
&- \int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) a_{s0}(\xi) y^{(n-s)}(\xi) [1]_{x,\xi} d\xi \Bigg] - \\
&- \sum_{p=2}^{m} \frac{\rho^{1-n-p}}{r} \int_u^x K_{q\nu p}(x, \xi, \rho) a_{0p}(\xi) a_{00}^{-1}(\xi) y^{[n]}(\xi) [1]_{x,\xi} d\xi.
\end{aligned}
$$

2.11.4. Асимптотика розв'язків рівняння з мірами. В наступній теоремі на основі аналізу інтегро-квазідиференціальних рівнянь (2.319) встановлюються асимптотичні формули для розв'язків рівняння (2.296).

Теорема 2.25. *За вищезгаданих умов на коефіцієнти квазідиференціального рівняння* (2.296), *воно у всій області* $\mathcal{T}$ *комплексної* ρ*-площини має* r *лінійно незалежних розв'язків* y_1, y_2, $\ldots$, y_r, *регулярних (тобто однозначних аналітичних) відносно* $\rho \in \mathcal{T}$ *для досить великого* $|\rho|$ *і таких, що для великих* $|\rho|$ *задовольняють співвідношення*

$$
y_k^{[\nu]}(x, \rho) = \hat{R}_\nu(x) (\rho\omega_k t'(x))^\nu e^{\rho\omega_k t(x)} \hat{E}(x) \Big[1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big], \tag{2.320}
$$

де $\nu = \overline{0, r-1}$, $k = \overline{1, r}$, *а* $\hat{R}_\nu(x)$, $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.27), (2.28) *і* (2.30).

Доведення. Припустимо, що рівняння (2.296) має такий розв'язок y_k, що $\hat{c}_\nu = 0$ для $\nu \neq k$, $\hat{c}_k = 1$. Таким чином,

$$y_k^{[\nu]}(x) = \hat{R}_\nu(x)(\rho t'(x))^\nu [\omega_k^\nu]_x \hat{E}(x) e^{\rho\omega_k t(x)} + \\ + H_{1\nu}(a, x, \rho) + H_{2\nu}(b, x, \rho), \qquad \nu = \overline{0, r-1}. \tag{2.321}$$

Покладемо для $\nu = \overline{0, r-1}$

$$z_{k\nu}(x) = y_k^{[\nu]}(x) \hat{R}_\nu^{-1}(x)(\rho t'(x))^{-\nu} \hat{E}^{-1}(x) e^{-\rho\omega_k t(x)} \tag{2.322}$$

і введемо позначення

$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x, \xi, \rho) = \frac{1}{r} \hat{R}_\nu^{-1}(x) K_{1\nu p}(x, \xi, \rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s} \times \\ \times \rho^{2-p-s-\nu} \frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)} e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi \leqslant x, \tag{2.323}$$

$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x, \xi, \rho) = -\frac{1}{r} \hat{R}_\nu^{-1}(x) K_{2\nu p}(x, \xi, \rho)(t'(x))^{-\nu}(t'(\xi))^{n-s} \times \\ \times \rho^{2-p-s-\nu} \frac{\hat{E}(\xi)}{\hat{E}(x)} e^{-\rho\omega_k(t(x)-t(\xi))} \text{ для } \xi > x; \tag{2.324}$$

$$\nu = \overline{0, r-1}, \quad k = \overline{1, r}, \quad p = \overline{0, m}, \quad s = \overline{0, n};$$

тоді для функцій $z_{k\nu}(x, \rho)$ ми отримаємо систему інтегральних рівнянь ($k = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, r-1}$)

$$z_{k\nu}(x, \rho) = [\omega_k^\nu]_x + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x, \xi, \rho) \frac{a_{s0}(\xi)}{a_{00}(\xi)} [1]_{x,\xi} z_{k,n-s}(\xi, \rho) d\xi - \\ - \frac{1}{\rho} \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x, \xi, \rho) [1]_{x,\xi} z_{k,n-s}(\xi, \rho) db_{sp}(\xi) + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x, \xi, \rho) \frac{a_{0p}(\xi)}{a_{00}(\xi)} a_{s0}(\xi) [1]_{x,\xi} z_{k,n-s}(\xi, \rho) d\xi -$$

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)[1]_{x,\xi}z_{kn}(\xi,\rho)d\xi. \qquad (2.325)$$

Другий інтеграл в (2.325) буде існувати як інтеграл Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна функція може мати розриви хіба що справа, тоді як $b_{sp}(x)$ є неперервними праворуч. Задамо функції $\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ і $g_{sp}(x)$ ($k=\overline{1,r}$, $p=\overline{0,2m}$, $\nu=\overline{0,r-1}$, $s=\overline{0,n}$) наступним чином:

$$\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}-\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{0,n},\ p=\overline{1,m};\\ \mathcal{K}_{k,p-m,\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{1,n},\ p=\overline{m+1,2m};\\ \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho), & s=\overline{1,n},\ p=0;\\ 0, \quad s=0,\ p=0,m+1,m+2,\dots,2m; \end{cases} \qquad (2.326)$$

$$g_{sp}(x)=\begin{cases} b_{sp}(x), & s=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m};\\ \int\limits_a^x a_{0p}(t)a_{00}^{-1}(t)dt, & s=0,\ p=\overline{0,m};\\ \int\limits_a^x a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt, & s=\overline{1,n},\ p=0;\\ \int\limits_a^x a_{0,p-m}(t)a_{00}^{-1}(t)a_{s0}(t)dt, & s=\overline{0,n},\ p=\overline{m+1,2m}. \end{cases} \qquad (2.327)$$

Інтеграл Лебега зі змінною верхньою межею від сумовної функції є абсолютно неперервною функцією на проміжку $[a,b]$, а отже, має обмежену варіацію на цьому проміжку. Внаслідок цього всі $g_{sp}(x)$ теж мають обмежену варіацію на $[a,b]$. Тоді (2.325) можна зобразити в компактнішому вигляді

$$z_{k\nu}(x,\rho)=[\omega_k^{\nu}]_x+$$
$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b \hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}z_{k,n-s}(\xi,\rho)dg_{sp}(\xi). \qquad (2.328)$$

Для фіксованого k і $\nu=\overline{0,r-1}$ (2.328) є системою інтегральних рівнянь відносно функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$ ($\nu=\overline{0,r-1}$). Якщо вона має розв'язок $z_{k\nu}$, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо:

$$z_{k\nu}(x,\rho) = [\omega_k^\nu]_x + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b \hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[\omega_k^{n-s}]_{x,\xi}dg_{sp}(\xi) +$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2=0}^{n}\int_a^b\int_a^b \hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi,\rho)\hat{Q}_{kp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$

$$\times z_{k,n-s_2}(\xi_2)[1]_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)dg_{s_2p_2}(\xi_2) = \ldots$$

$$\ldots = [\omega_k^\nu]_x + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b \hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[\omega_k^{n-s}]_{x,\xi}dg_{sp}(\xi) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\rho^d}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_d=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_d=0}^{n}\int_a^b\ldots\int_a^b \hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\hat{Q}_{k,p_d,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)[\omega_k^{n-s_d}]_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots dg_{s_dp_d}(\xi_d) +$$

$$+\frac{1}{\rho^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_{d+1}=0}^{2m}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{d+1}=0}^{n}\int_a^b\ldots\int_a^b \hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times\ldots$$

$$\ldots\times\hat{Q}_{k,p_{d+1},n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho)z_{k,n-s_{d+1}}(\xi_{d+1})\times$$

$$\times[1]_{x,\xi}dg_{s_1p_1}(\xi_1)\ldots dg_{s_{d+1},p_{d+1}}(\xi_{d+1}). \qquad (2.329)$$

Покладемо $B = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|z_{k\nu}(x)|$, $\nu = \overline{0,r-1}$. Пригадаємо, що функції $a_{00}(x)$ і $\sigma(x)$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$ і не перетворюються в нуль у жодній точці цього проміжку. Отже, функції $a_{00}(x)$, $\sigma(x)$, $a_{00}^{-1}(x)$ і $\sigma^{-1}(x)$ на відрізку $[a,b]$ є обмеженими. Тоді з леми 2 пункту 2.1.6 випливає, що існують такі сталі L і R, що для $|\rho| > R$ $\forall k,p,\nu,s$ маємо $\left|\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}\right| \leqslant L$. Введемо позначення $v_{sp} = \bigvee\limits_a^b g_{sp}(x)$, $s = \overline{0,n}$, $p = \overline{0,2m}$; тоді останній доданок у (2.329) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\dots p_{d+1}=0}^{2m}\ \sum_{s_1,s_2,\dots,s_{d+1}=0}^{n}\prod_{j=1}^{d+1}v_{s_jp_j}=B\left[\frac{L}{|\rho|}\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=0}^{2m}v_{sp}\right]^{d+1}.$$

Для $|\rho|>R_0$, де

$$R_0=\max\left\{R,\ L\sum_{s=0}^{n}\sum_{p=0}^{2m}v_{sp}\right\},$$

функція $z_{k\nu}(x)=z_{k\nu}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu}(x,\rho)=[\omega_k^{\nu}]_x+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[\omega_k^{n-s}]_{x,\xi}dg_{sp}(\xi)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=0}^{2m}\ \sum_{s_1,s_2=0}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\hat{Q}_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\hat{Q}_{kp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$
$$\times[\omega_k^{n-s_2}]_{x,\xi}\,dg_{s_1p_1}(\xi_1)\,dg_{s_2p_2}(\xi_2)+\dots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho|\geqslant R_1>R_0$, $a\leqslant x\leqslant b$ цей ряд збігається рівномірно і є розв'язком системи (2.325). Отже, ця система має один і тільки один розв'язок $z_{k\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$z_{k\nu}(x,\rho)=\omega_k^{\nu}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

Звідси і з (2.322) випливають співвідношення (2.320), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність функцій y_1, y_2, …, y_r. Залишається довести, що існує розв'язок $y_k(x,\rho)$ рівняння (2.296), що задовольняє (2.321). Для цього достатньо показати, що якими б не були сталі $\hat{c}_\nu$, існує розв'язок y рівняння (2.296), що задовольняє (2.319) для цих значень $\hat{c}_\nu$. Очевидно, досить довести, що визначник лінійного перетворення від сталих $\tilde{c}_j$

до $\hat{c}_j$ (добуток двох перетворень від $\tilde{c}_j$ до c_j та від c_j до $\hat{c}_j$) для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля; в цьому випадку системи (2.316) і (2.317), (2.318) можна розв'язати відносно $\tilde{c}_j$ для довільно заданих $\hat{c}_j$. Розв'язок y рівняння (2.296), рівносильного першому рівнянню системи (2.315), що відповідає цим значенням $\tilde{c}_j$, буде тоді шуканим.

Але якщо визначник перетворення (2.316) – (2.318) дорівнює нулю для як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$ (детермінант хоча б одного з перетворень (2.316) – (2.318) дорівнює нулю), то для цих значень ρ системи (2.316) і (2.317), (2.318) мають нетривіальні розв'язки відносно $\tilde{c}_j$ для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_r = 0$. Відповідна функція y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи, яку можна отримати з (2.319) для $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \ldots = \hat{c}_r = 0$.

Доведемо, що це неможливо. Скориставшись заміною

$$z_\nu(x) = y^{[\nu]}(x)\hat{R}_\nu^{-1}(x)(\rho t'(x))^{-\nu}\hat{E}^{-1}(x)e^{-\rho\omega_k t(x)}, \tag{2.330}$$

де $\nu = \overline{0, r-1}$, і врахувавши (2.323), (2.324), отримаємо для функцій z_ν систему рівнянь

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)[1]_{x,\xi}z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi -$$
$$- \frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi}z_{n-s}(\xi,\rho)db_{sp}(\xi) +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)a_{s0}(\xi)[1]_{x,\xi}z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi -$$
$$- \frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho)a_{0p}(\xi)a_{00}^{-1}(\xi)[1]_{x,\xi}z_n(\xi,\rho)d\xi.$$

За допомогою (2.326) і (2.327) останню рівність можна записати в компактнішій формі

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b \hat{Q}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)[1]_{x,\xi} z_{n-s}(\xi,\rho)dg_{sp}(\xi).$$

Поклавши $m(\rho) = \max|z_\nu(x,\rho)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\nu = \overline{0,r-1}$, і застосувавши лему до правої частини останньої системи, можна прийти до оцінки

$$|z_\nu(x,\rho)| \leqslant \frac{C_1}{|\rho|}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b |\rho|^{2-p-s}\,|dg_{sp}(\xi)|\,m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \leqslant m(\rho)C_2/|\rho|$, де C_1, C_2 – сталі.

Для великих значень $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (2.330) $y \equiv 0$ при $\nu = 0$, і теорему повністю доведено.

Наслідок. *Якщо* $a_{00}(x) \equiv 1$, $\sigma(x) \equiv 1$, $a_{10}(x) \equiv 0$, $a_{01}(x) \equiv 0$ *в рівнянні* (2.296), *а решта коефіцієнтів – такі самі, як і в пункті 2.11.1, тобто* $a_{i0}, a_{0j} \in L_2([a,b];\mathbb{C})$ $(i = \overline{2,n},\ j = \overline{2,m})$, $a_{ij} = b'_{ij}$, $b_{ij} \in BV^+([a,b];\mathbb{C})$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$, *то рівняння* (2.296) *у всій області* $\mathcal{T}$ *комплексної* ρ*-площини має* r *лінійно незалежних розв'язків* $y_1, y_2, \ldots, y_r$, *регулярних (тобто однозначних аналітичних) відносно* $\rho \in \mathcal{T}$ *для досить великого* $|\rho|$ *і таких, що для великих* $|\rho|$ *задовольняють співвідношення*

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \tilde{R}_\nu(\rho\omega_k)^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{2.331}$$

де $\nu = \overline{0,r-1}$, $k = \overline{1,r}$, *а*

$$\tilde{R}_\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \overline{0,n-1},\\ (-1)^{\nu-n}, & \nu = \overline{n,r-1}.\end{cases}$$

Зауваження. Оскільки асимптотичні формули (2.331) збігаються з асимптотичними формулами (2.305), формули (2.311) мають місце й у тому випадку, коли $K(x,z)$ – функція Коші рівняння (2.296), причому M_{kj} і $Q_{ij}(x,z)$ визначаються так само, як і у пункті 2.11.2. Квазіпохідні функції Коші в сенсі вихідного і спряженого рівнянь подаються, відповідно, формулами (2.2) і (2.12).

2.12. Уточнена асимптотика власних значень і власних функцій крайових задач та розвинення за власними функціями

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботах [60], [57], [62].

2.12.1. Асимптотика власних значень крайової задачі для квазідиференціального рівняння. Для квазідиференціального рівняння (2.296) з накладеними у пункті 2.11.1 умовами на коефіцієнти поставимо нормовані, як у пункті 2.2.2, крайові умови (2.66) з квазіпохідними, що визначаються формулами (2.2). Крайові умови (2.66) будемо вважати регулярними для крайової задачі (2.296), (2.66), якщо виконується означення 2.1.

Теорема 2.26. *Власні значення задачі на власні значення* (2.296), (2.66) *з накладеними у пункті 2.11.1 умовами на коефіцієнти і регулярними крайовими умовами* (2.66) *утворюють дві нескінченні послідовності* λ_k', λ_k'' $(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, *де* $N \in \mathbb{N}$. *Для непарного* r, $r = 2\mu - 1$,

$$\begin{cases} \lambda_k' = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\mp\frac{2k\pi i}{h}\right)^r\left[1 \mp \frac{r\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda_k'' = (-1)^m \operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\pm\frac{2k\pi i}{h}\right)^r\left[1 \pm \frac{r\ln_0\xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \end{cases} \tag{2.332}$$

де $h = t(b)$, $t(x)$ *визначається формулою* (2.27), *верхній знак відповідає* $r = 4p-1$, *а нижній —* $r = 4p+1$; $\ln_0\xi$ *— деяке фіксоване значення натурального логарифма, а* $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *— корені рівняння* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, *що відповідає області* $\mathcal{S}_q$ *з* q *відповідно непарним і парним.*

Для парного r, $r = 2\mu$ і $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda_k' = (-1)^{m+\mu}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0\xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda_k'' = (-1)^{m+\mu}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0\xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \end{cases} \tag{2.333}$$

де ξ' і ξ'' — корені рівняння

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{2.334}$$

що відповідає області $\mathcal{S}_0$; причому верхній знак у формулах (2.333) відповідає парному, а нижній — непарному μ.

Нарешті, для парного r, $r = 2\mu$ і $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_k' = (-1)^{m+\mu}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0\xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \\ \lambda_k'' = (-1)^{m+\mu}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^r\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0\xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \end{cases} \tag{2.335}$$

де ξ — (двократний) корінь рівняння (2.334), що відповідає області $\mathcal{S}_0$, а вибір верхнього чи нижнього знака у формулах (2.335) слід здійснювати за тим самим правилом, що й у формулах (2.333).

У перших випадках всі власні значення, починаючи з деякого, є простими, а в останньому (формули (2.335)), — починаючи з деякого, простими чи двократними.

Доведення здійснюється аналогічно доведенню теореми 2.2 з використанням теореми 2.12.

Розглянемо спочатку випадок непарного r. Нехай $r = 2\mu - 1$, а ρ визначається за формулою (2.24). Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2r$ секторів $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ (так само, як це робиться в пункті 2.1.3). Нехай числа ω_j (різні корені r-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{T}$ виконується ланцюг нерівностей (2.25).

Покладемо

$$\tilde{\rho}_j = (\rho + c)\omega_j, \quad j = \overline{1, r}.$$

Так само, як і в теоремі 2.2, можна показати, що мають місце формули (2.76), (2.77). Отже, для $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$, $e^{\tilde{\rho}_j}$ експоненціально прямує до нуля, якщо $j < \mu$, і до безмежності, якщо $j > \mu$.

Згідно з теоремою 2.25 для рівняння (2.296) є r лінійно незалежних розв'язків, які для великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, подаються разом зі своїми квазіпохідними формулами (2.320). Складемо з їх допомогою визначник $\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j))$, $\nu, j = \overline{1, r}$. Відомо, що власні значення є нулями $\Delta(\lambda)$.

Підставивши вирази (2.320) в нормовані форми $U_\nu(y)$ ((2.67), (2.68)), отримаємо

$$U_{\nu a}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu[\hat{\alpha}_\nu], \quad U_{\nu b}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu],$$

де

$$\varphi_\nu = \begin{cases} 1, \ k_\nu < n, \\ (-1)^{k_\nu - n}, \ k_\nu \geqslant n. \end{cases}$$

Звідси

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu\{[\hat{\alpha}_\nu] + e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu]\}.$$

У випадку $j < \mu$ функція $e^{\rho\omega_j h} = e^{-c\omega_j h}e^{\tilde{\rho}_j h}$ експоненціально спадає при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$; отже,

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu[\hat{\alpha}_\nu] \text{ для } j < \mu. \tag{2.336}$$

Аналогічно,

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu] \text{ для } j > \mu. \tag{2.337}$$

Нарешті,

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\,\varphi_\nu\{[\hat{\alpha}_\nu] + e^{\rho\omega_\mu h}[\hat{\beta}_\nu]\}. \tag{2.338}$$

Підставимо всі ці вирази в рівняння

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(y_j)\right) = 0$$

і скоротимо на спільні множники $\rho^{k_1}\varphi_1$, $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\ldots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$ рядків і $e^{\rho\omega_{\mu+1}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r h}$ останніх стовпців визначника $\Delta(\lambda)$. Тоді це рівняння запишеться у вигляді

$$\Delta_0 = \det(A, B) = 0, \tag{2.339}$$

де

$$A=\begin{pmatrix}[\hat\alpha_1]\omega_1^{k_1} & \cdots & [\hat\alpha_1]\omega_{\mu-1}^{k_1} & [\hat\alpha_1+e^{\rho\omega_\mu h}\hat\beta_1]\omega_\mu^{k_1}\\ [\hat\alpha_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\hat\alpha_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\hat\alpha_2+e^{\rho\omega_\mu h}\hat\beta_2]\omega_\mu^{k_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ [\hat\alpha_r]\omega_1^{k_r} & \cdots & [\hat\alpha_r]\omega_{\mu-1}^{k_r} & [\hat\alpha_r+e^{\rho\omega_\mu h}\hat\beta_r]\omega_\mu^{k_r}\end{pmatrix}, \tag{2.340}$$

$$B=\begin{pmatrix}[\hat\beta_1]\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & [\hat\beta_1]\omega_r^{k_1}\\ [\hat\beta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & [\hat\beta_2]\omega_r^{k_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ [\hat\beta_r]\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & [\hat\beta_r]\omega_r^{k_r}\end{pmatrix}.$$

Згідно з визначенням чисел θ_0 і θ_1 у формулі (2.71) з (2.339) випливає, що

$$\Delta_0=[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu h}[\theta_1].$$

Якщо ρ – корінь рівняння (2.339), то

$$e^{\rho\omega_\mu h}=-\frac{[\theta_0]}{[\theta_1]},$$

тобто

$$e^{\rho\omega_\mu h}=-\frac{\theta_0\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)}{\theta_1\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)}=-\frac{\theta_0}{\theta_1}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big\}=\xi\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big\}, \tag{2.341}$$

бо внаслідок регулярності крайових умов $\theta_0\neq 0$, $\theta_1\neq 0$. Тому

$$\rho=\tfrac{1}{\omega_\mu h}\Big\{\ln_0\xi+2k\pi i+O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big)\Big\},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{2.342}$$

Доведемо тепер, що дійсно існують нулі функції Δ, які подаються формулою (2.342).

Покладемо

$$\rho_k=\frac{1}{\omega_\mu h}\{2k\pi i+\ln_0\xi\};$$

тоді співвідношення (2.342) перепишеться у вигляді

$$\rho=\rho_k+O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big),\quad k=1,2,\ldots$$

Так само, як у теоремі 2.2, встановлюється, що числа ρ_k розташовані паралельно бісектрисі області $\mathcal{T}$, причому у випадку $r = 4q - 1$ для області $\mathcal{T}$ з парним індексом слід брати $k > 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом потрібно брати $k < 0$; у випадку $r = 4q + 1$ навпаки: для області $\mathcal{T}$ з парним індексом необхідно брати $k < 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом $k > 0$.

Опишемо тепер навколо кожної точки ρ_k коло Γ_k одного й того самого радіуса p/h, де $p < \pi$, $h = t(b)$ – скінченне число, $h > 0$. Внаслідок щойно сказаного, при k достатньо великому ці кола будуть повністю міститись в області $\mathcal{T}$. Оскільки $\xi = e^{\rho_k \omega_\mu h}$, рівняння (2.341) можна переписати у вигляді

$$e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1 - O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \tag{2.343}$$

В теоремі 2.2 (на стор. 81) доведено, що зовні кіл Γ_k функція

$$f = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1 = e^{\omega_\mu(\rho-\rho_0)h} - 1$$

обмежена знизу додатним числом. Звідси можна зробити висновок, що при достатньо великих $|\rho|$ функція Δ не має нулів зовні кіл Γ_k (бо рівняння (2.339) еквівалентне рівнянню (2.343)).

Нехай m – мінімум функції $|e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1|$ на Γ_k; оскільки на колі Γ_k

$$\rho - \rho_k = \frac{p}{h} e^{i\theta},$$

то m не залежить від k. На цьому самому колі $|O\left(\frac{1}{\rho}\right)| < m$ для достатньо великих $|\rho|$. Внаслідок відомої теореми Руше (див., наприклад, [82, с. 246]), звідси випливає, що рівняння (2.343) має всередині Γ_k стільки коренів, скільки їх там має рівняння $e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)h} - 1 = 0$, тобто рівно один корінь, який позначимо через ρ_k'.

Внаслідок (2.342)

$$\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu h} \left\{ 2k\pi i + \ln_0 \xi + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\}$$

або

$$\rho'_k = \frac{2k\pi i}{\omega_\mu h}\left\{1 + \frac{\ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\}.$$

Якщо тепер застосувати останню формулу до кожної з областей $\mathcal{T}$ і врахувати сформульовані вище міркування стосовно вибору знаку k, то після піднесення до r-го степеня ми отримаємо формули (2.332). Простота цих власних значень для достатньо великого $|k|$ пов'язана з тим, що згідно з теоремою Руше вони є простими нулями визначника $\Delta(\lambda)$.

Нехай тепер r парне ($r = 2\mu$), доведення теореми в цьому випадку здійснюється за тією самою схемою. Розглянемо знову фіксовану область $\mathcal{T}$, для якої справджуються нерівності (2.25). Міркуючи так само, як і у випадку непарного r, можна показати, що

$$\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_1) < 0,\ \operatorname{Re}(\tilde{\rho}_2) < 0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde{\rho}_{\mu-1}) < 0, \tag{2.344}$$

$$\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_{\mu+2}) > 0,\ \operatorname{Re}(\tilde{\rho}_{\mu+3}) > 0,\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\tilde{\rho}_r) > 0, \tag{2.345}$$

причому ліві частини (2.344) і (2.345) прямують відповідно до $-\infty$ і $+\infty$, коли $\rho \to \infty$, залишаючись у заданій області $\mathcal{T}$.

Звідси, як і у випадку непарного r, можна зробити висновок, що

$$\begin{cases} U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu[\hat{\alpha}_\nu] & \text{для } j \leqslant \mu - 1, \\ U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, \varphi_\nu e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu] & \text{для } j \geqslant \mu + 2, \end{cases} \tag{2.346}$$

і, крім того, врахувавши, що рівняння парного степеня $\omega^r + 1 = 0$ разом з коренем ω_j містить також корінь $-\omega_j$,

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\, \varphi_\nu[\hat{\alpha}_\nu + e^{\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_\nu], \tag{2.347}$$

$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\, \varphi_\nu[\hat{\alpha}_\nu + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_\nu] \tag{2.348}$$

в позначеннях попереднього пункту, причому зрозуміло, що $\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_\mu) \leqslant 0$, а $\operatorname{Re}(\tilde{\rho}_{\mu+1}) \geqslant 0$.

Підставивши в рівняння $\Delta = 0$ вирази (2.346), (2.347), (2.348) для $U_\nu(y_j)$ і здійснивши скорочення, отримаємо рівняння вигляду

$$\Delta_0 = 0,$$

де

$$\Delta_0 = \det(A, B_1),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} [\hat{\alpha}_1 + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_1]\omega_{\mu+1}^{k_1} & [\hat{\beta}_1]\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & [\hat{\beta}_1]\omega_r^{k_1} \\ [\hat{\alpha}_2 + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & [\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & [\hat{\beta}_2]\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\hat{\alpha}_r + e^{-\rho\omega_\mu h}\hat{\beta}_r]\omega_{\mu+1}^{k_r} & [\hat{\beta}_r]\omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & [\hat{\beta}_r]\omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

а матриця A визначається формулою (2.340).

За означенням чисел θ_0, θ_1, θ_{-1} (див. формулу (2.72))

$$\Delta_0 = [\theta_0] + [\theta_1]e^{\rho\omega_\mu h} + [\theta_{-1}]e^{-\rho\omega_\mu h},$$

отже,

$$\begin{aligned} e^{\rho\omega_\mu h}\Delta_0 &= [\theta_1]e^{2\rho\omega_\mu h} + [\theta_0]e^{\rho\omega_\mu h} + [\theta_{-1}] = \\ &= \left(\theta_1 e^{2\rho\omega_\mu h} + \theta_0 e^{\rho\omega_\mu h} + \theta_{-1}\right)\left(1 + O\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.349}$$

бо внаслідок співвідношення $\mathrm{Re}(\tilde{\rho}_\mu) \leqslant 0$

$$\left|e^{\rho\omega_\mu h}\right| = \left|e^{\tilde{\rho}\omega_\mu h}\right| \cdot \left|e^{-c\omega_\mu h}\right| \leqslant \left|e^{-c\omega_\mu h}\right|,$$

тобто функція $e^{\rho\omega_\mu h}$ обмежена в області $\mathcal{T}$.

Якщо ξ' і ξ'' – корені квадратного рівняння (2.334), то рівність (2.349) можна записати у вигляді

$$e^{\rho\omega_\mu h}\Delta_0 = \theta_1\left(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'\right)\left(e^{\rho\omega_\mu h} - \xi''\right)\left(1 + O\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\right).$$

Рівняння

$$e^{\rho\omega_\mu h} - \xi' = 0, \quad e^{\rho\omega_\mu h} - \xi'' = 0$$

мають відповідно корені

$$\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i), \qquad \rho_k'' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' + 2k\pi i),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Нас цікавлять лише ті з них, які лежать всередині області $\mathcal{T}$. Для визначеності будемо припускати, що сектором, що розглядається, є область $\mathcal{S}_0$.

Аналогічно теоремі 2.2, можна встановити, що при $r = 4q+2$ для достатньо великих $k > 0$ всі числа ρ'_k, ρ''_k знаходяться всередині області $\mathcal{T}_0$ на прямих, паралельних дійсній осі, на додатній відстані від межі (рис. 4 на стор. 84), а при $r = 4q$ для достатньо великих за абсолютною величиною чисел $k < 0$ всі числа ρ'_k, ρ''_k знаходяться всередині області $\mathcal{T}_0$ на прямих, паралельних межі секторів $\mathcal{T}_0$ і $\mathcal{T}_1$, якщо тільки певним чином вибрати вершину $\rho = -c$ області $\mathcal{T}_0$ (рис. 6 на стор. 86).

Отже, ми отримаємо послідовності

$$\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.350}$$

що належать області $\mathcal{T}_0$ при умові, що у випадку $r = 4q$ береться верхній знак, а у випадку $r = 4q+2$ – нижній. Використовуючи ρ'_k, ρ''_k і беручи до уваги (2.349), можна перетворити рівняння $\Delta_0 = 0$ до вигляду

$$\Big(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1\Big)\Big(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1\Big) + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = 0. \tag{2.351}$$

Навколо кожної з точок ρ'_k, ρ''_k $(k = 1, 2, \dots)$ опишемо коло відповідно Γ'_k і Γ''_k одного і того самого радіуса p. При достатньо малому p ці кола будуть повністю міститись в області $\mathcal{T}_0$ і не перетинатимуться.

Застосовуючи, як і у випадку непарного r теорему Руше, отримаємо, що для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, рівняння $\Delta_0 = 0$ може мати нулі лише всередині Γ'_k і Γ''_k, причому стільки, скільки їх там має рівняння

$$\Big(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1\Big)\Big(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1\Big) = 0. \tag{2.352}$$

Нехай тепер $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$; тоді $\xi' \neq \xi''$, отже, числа ρ'_k і ρ''_k, а тому й круги Γ'_k і Γ''_k, відрізняються одне від одного.

В кожному з цих кругів рівняння (2.352), а отже, і рівняння $\Delta_0 = 0$, має рівно один корінь; позначимо ці корені через $\tilde{\rho}'_k$ і $\tilde{\rho}''_k$ відповідно. У крузі Γ'_k множник $e^{\omega_\mu h(\rho-\rho''_k)} - 1$ є обмеженим знизу; внаслідок (2.351) звідси випливає, що у крузі Γ'_k рівняння $\Delta = 0$ є еквівалентним рівнянню

$$e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)} - 1 = O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big).$$

Тому

$$\tilde{\rho}'_k = \rho'_k + O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big);$$

і аналогічно

$$\tilde{\rho}''_k = \rho''_k + O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big).$$

Звідси отримуємо

$$\tilde{\rho}'_k = \mp\frac{2k\pi i}{\omega_\mu h}\left[1 \mp \frac{\ln_0 \xi'}{2k\pi i} + \left(\frac{1}{k^2}\right)\right];$$

аналогічна формула має місце для $\tilde{\rho}''_k$. Після піднесення до r-го степеня, отримаємо формули (2.333).

Слід зазначити, що, як випливає з властивості 2 пункту 2.2.2, розгляд області $\mathcal{T}_q$ з парним індексом q дає ті самі послідовності власних значень. У випадку області $\mathcal{T}_q$ з непарним індексом q теж не буде нових послідовностей. Дійсно, якщо для $r = 4q + 2$ замість області $\mathcal{T}_0$ розглядати область $\mathcal{T}_{2r-1}$, то ξ' і ξ'' перейдуть у $\frac{1}{\xi'}$ і $\frac{1}{\xi''}$, а їх логарифми – у $-\ln_0 \xi'$ і $-\ln_0 \xi''$ з точністю до доданка вигляду $2k\pi i$. Крім того, ω_μ замінюється на $-\omega_\mu$. Тепер точки $\frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i)$ належатимуть області $\mathcal{T}_{2r-1}$ лише при $k < 0$, а це означає, що для $r = 4q + 2$ у формулах (2.350) слід взяти знак мінус. Тому ρ'_k і ρ''_k, а також $\tilde{\rho}'_k$ і $\tilde{\rho}''_k$ залишаються без змін. Подібна ситуація буде і для $r = 4q$, коли від області $\mathcal{T}_0$ ми перейдемо до області $\mathcal{T}_1$. Таким чином, для великих $|\rho|$ числа (2.333) є єдиними власними значеннями задачі (2.296), (2.66).

Нехай тепер $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$. Тоді $\xi' = \xi''$; отже, $\hat{\rho}'_k = \hat{\rho}''_k$ і круги Γ'_k, Γ''_k збігаються. Тому рівняння $\Delta_0 = 0$ має в кожному такому крузі рівно два корені, які в окремих випадках можуть перетворитись в один подвійний корінь.

Нехай $\tilde{\rho}_k$ – один з цих коренів. Рівняння (2.351) набуває у цьому випадку вигляду

$$\left(e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)}-1\right)^2+O\left(\frac{1}{\rho}\right)=0.$$

Звідси

$$e^{\omega_\mu h(\rho-\rho'_k)}-1+O\left(\frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\right)=0,$$

а отже,

$$\tilde{\rho}_k=\rho'_k+O\left(\frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\right).$$

Піднесення останнього співвідношення до r-го степеня дає нам формули (2.335). Теорему доведено.

2.12.2. Асимптотика власних функцій крайової задачі для квазідиференціального рівняння. Отримані результати дозволяють побудувати за схемою пункту 2.2.5 асимптотичні формули для власних функцій при великих за модулем простих власних значеннях.

Нехай $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.296) з накладеними у пункті 2.11.1 умовами на коефіцієнти, що задовольняють співвідношення (2.320) в деякій області $\mathcal{T}$. Власна функція y, відповідна власному значенню $\lambda = (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}(a_{00}\sigma)\rho^r$, повинна бути лінійною комбінацією функцій $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r$:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ry_r,$$

коефіцієнти якої є нетривіальними розв'язками однорідної системи

$$U_\nu(y_1)c_1+U_\nu(y_2)c_2+\ldots+U_\nu(y_r)c_r=0,\quad \nu=\overline{1,r}.$$

Отже, вони пропорційні алгебричним доповненням якого-небудь рядка визначника цієї системи за умови простоти власних значень. Тому

$$y=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_r\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U_r(y_1) & U_r(y_2) & \cdots & U_r(y_r)\end{vmatrix}, \tag{2.353}$$

якщо не всі доповнюючі мінори елементів першого рядка цього визначника дорівнюють нулю. (В протилежному випадку y_1, y_2, $\ldots$, y_r слід розмістити в тому рядку, не всі мінори елементів якого дорівнюють нулю.)

Нехай r непарне ($r = 2\mu - 1$). Пригадаємо, що у цьому випадку всі власні значення, крім, можливо, скінченного числа, є простими. Підставимо формули (2.320), (2.336), (2.337) і (2.338) в (2.353), скоротимо отриманий вираз на несуттєві множники $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\rho^{k_3}\varphi_3$, $\ldots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$, $e^{\rho\omega_{\mu+1}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r h}$ і, врахувавши, що, оскільки $e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1]$, справджується, зокрема, співвідношення $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}[1] = \xi[1]$, ми прийдемо до наступної теореми. Заради лаконічності формулювання теореми, ми в ньому не вказуємо, що коефіцієнти квазідиференціального рівняння (2.296) задовольняють умови, наведені у пункті 2.11.1. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ за формулою (2.24) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.332).

Теорема 2.27. *Власні функції крайової задачі* (2.296), (2.66) *з регулярними крайовими умовами* (2.66) *у випадку непарного r ($r = 2\mu - 1$) утворюють дві нескінченні послідовності $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$, відповідні власним значенням λ_k', λ_k'' (що визначаються формулами* (2.332)*), вигляду*

$$y_k^{(s)}(x) = \hat{E}(x)[1]_x \det\left(X_{1k}^{(s)}, X_{2k}^{(s)}\right), \tag{2.354}$$

де

$$X_{1k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \rho_k^{(s)} t(x)} & \cdots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(s)} t(x)} & e^{\omega_\mu \rho_k^{(s)} t(x)} \\ [\hat{\alpha}_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\hat{\alpha}_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\hat{\alpha}_2 + \xi^{(s)}\hat{\beta}_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\hat{\alpha}_r]\omega_1^{k_r} & \cdots & [\hat{\alpha}_r]\omega_{\mu-1}^{k_r} & [\hat{\alpha}_r + \xi^{(s)}\hat{\beta}_r]\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} & \cdots & e^{\omega_r \rho_k^{(s)}(t(x)-h)} \\ [\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & [\hat{\beta}_2]\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [\hat{\beta}_r]\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & [\hat{\beta}_r]\omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(1)} \mp 2k\pi i), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(2)} \pm 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \ldots$; N – *достатньо велике натуральне число,* $s = 1, 2$, $h = t(b)$, *а* $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.27), (2.28), *причому верхній знак у формулах для* $\rho_k^{(s)}$ *треба вибирати при* $r = 4p-1$, *а нижній – при* $r = 4p+1$; $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *– тут ті самі, що і в теоремі 2.26.*

Повторивши попередні міркування, аналогічну теорему можна отримати й у випадку простих власних значень для парного r $(r = 2\mu)$. Для цього потрібно підставити формули (2.320), (2.346), (2.347) і (2.348) у (2.353), скоротити отриманий вираз на несуттєві множники $\rho^{k_2}\varphi_2$, $\rho^{k_3}\varphi_3$, $\ldots$, $\rho^{k_r}\varphi_r$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+3}h}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r h}$ і, врахувавши, що $e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1]$, $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}[1] = \xi[1]$, можна прийти до наступного висновку. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що ρ_k', ρ_k'' за формулою (2.24) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.333).

Теорема 2.28. *Власні функції крайової задачі* (2.296), (2.66) *з регулярними крайовими умовами* (2.66) *у випадку парного* r $(r = 2\mu)$ *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_{1k}(x)$, $y_{2k}(x)$, *відповідні простим власним значенням* λ_k', λ_k'' *(що визначаються формулами* (2.333)*), вигляду*

$$\begin{aligned} y_{1k}(x) &= \hat{E}(x)[1]_x \det(X_{1k}', X_{2k}'), \\ y_{2k}(x) &= \hat{E}(x)[1]_x \det(X_{1k}'', X_{2k}''), \end{aligned} \tag{2.355}$$

де

$$X_{1k}' = \begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k' t(x)} & \ldots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k' t(x)} & e^{\omega_\mu \rho_k' t(x)} \\ [\hat{\alpha}_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\hat{\alpha}_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\hat{\alpha}_2 + \xi'\hat{\beta}_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\hat{\alpha}_r]\omega_1^{k_r} & \cdots & [\hat{\alpha}_r]\omega_{\mu-1}^{k_r} & [\hat{\alpha}_r + \xi'\hat{\beta}_r]\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}' = \begin{pmatrix} e^{-\omega_\mu \rho_k' t(x)} & e^{\omega_{\mu+2}\rho_k'(t(x)-h)} & \ldots & e^{\omega_r \rho_k'(t(x)-h)} \\ [\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & [\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & [\hat{\beta}_2]\omega_r^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\hat{\alpha}_r + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_r]\omega_{\mu+1}^{k_r} & [\hat{\beta}_r]\omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & [\hat{\beta}_r]\omega_r^{k_r} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho_k'' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i), \qquad (2.356)$$

$k = N, N+1, \ldots$; N – достатньо велике натуральне число, $h = t(b)$, а $t(x)$ і $\hat{E}(x)$ визначаються формулами (2.27), (2.28), причому у формулах (2.356) верхній знак потрібно брати для $r = 4p$, а нижній – для $r = 4p+2$; X_{1k}'', X_{2k}'' відрізняються від X_{1k}', X_{2k}' заміною ρ_k' на ρ_k'' і ξ' на ξ''; ξ' і ξ'' тут ті самі, що і в теоремі 2.26.

2.12.3. Розвинення за власними функціями крайової задачі для квазідиференціального рівняння. Для крайової задачі (2.296), (2.66) має місце теорема 2.11. Але при припущеннях пункту 2.11.1 внаслідок теорем 2.25–2.28 можна отримати і більш сильний результат.

Теорема 2.29. *Нехай на коефіцієнти квазідиференціального рівняння (2.296) накладено вказані у пункті 2.11.1 умови. Тоді у випадку регулярних крайових умов (2.66), якщо для парного r, крім того, справджується нерівність $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$, власні функції крайової задачі (2.296), (2.66) утворюють базис Рісса в $L_2([a,b];\mathbb{C})$.*

Доведення. Нехай

$$f \in L_2([a,b];\mathbb{C}), \quad d_k = (f,\, z_k)_{BV} = \int_a^b \sigma(x) f(x) \overline{z_k(x)} dx,$$

де $z_k(x)$ – власні функції спряженої задачі (2.11), (2.103), що відповідають простим власним значенням. Зрозуміло, що для $f(x) \equiv 0$ всі $d_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність власних функцій $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачі (2.296), (2.66) буде ω-лінійно незалежною внаслідок (2.158), бо $f(x) \equiv 0$ задовольняє умови теореми 2.11.

Поряд з задачею (2.296), (2.66) з визначеними в умові теореми коефіцієнтами розглянемо також крайову задачу (2.296), (2.66) з достатню кількість разів диференційовними коефіцієнтами. За цих умов квазідиференціальне рівняння можна диференціюванням звести до звичайного диференціального рівняння (1.1) r-го порядку, а крайові умови (2.66) сформулювати в термінах звичайних похідних у вигляді (1.15). Хоча, на перший погляд, регулярність крайових умов для крайових задач (2.296), (2.66) та (1.1), (1.15) вводиться різними означеннями, задачі (2.296), (2.66) з регулярними для неї крайовими умовами (2.66) відповідають трохи інші крайові умови (1.15) задачі (1.1), (1.15), регулярні в сенсі цієї задачі. Нехай $g_k(x)$ – власні функції крайової задачі (1.1), (1.15) з гладкими коефіцієнтами.

Теорема 1.7 свідчить, що для крайової задачі (1.1), (1.15) з сумовними коефіцієнтами $p_j(x)$ при $p_0 \in W_1^r([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{r-1}([a,b];\mathbb{C})$ і регулярними крайовими умовами (1.15), якщо для парного r, крім того, виконується додаткова умова $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$, то власні функції $g_k(x)$ крайової задачі (1.1), (1.15) утворюють базис Рісса в просторі $L_2([a,b];\mathbb{C})$, [44, 73]. Цей результат одночасно і незалежно одним від одного було отримано Г. М. Кесельманом і В. П. Михайловим.

Оскільки власні функції $g_k(x)$ та $y_k(x)$ подаються з точністю до $O\left(\frac{1}{k}\right)$ тими самими асимптотичними формулами для великих k, вони є квадратично близькими внаслідок збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

За теоремою Барі (див. теорему 1.6, [12], [30, с. 382]) послідовність власних функцій $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка є ω-лінійно незалежною і квадратично близькою до базису Рісса $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, сама утворює базис Рісса в $L_2([a,b];\mathbb{C})$. Теорему доведено.

Наслідок. Будь-яку функцію з $L_2([a,b];\mathbb{C})$ можна розвинути в ряд (2.158) за власними функціями крайової задачі (2.296), (2.66) при виконанні умов теореми 2.29.

2.12.4. Асимптотика власних значень крайової задачі для диференціального рівняння. Для звичайного диференціального рівняння (2.286) з накладеними у пункті 2.10.3 умовами на коефіцієнти поставимо нормовані, як у пункті 2.2.2, крайові умови (2.206). Крайові умови (2.206) будемо вважати регулярними для крайової задачі (2.286), (2.206), якщо виконується означення 2.19.

Теорема 2.30. *Власні значення задачі на власні значення* (2.286), (2.206) *з накладеними у пункті 2.10.3 умовами на коефіцієнти і регулярними крайовими умовами* (2.206) *утворюють дві нескінченні послідовності* λ'_k, λ''_k $(k = N, N+1, N+2, \dots)$, *де* $N \in \mathbb{N}$. *Для непарного* n, $n = 2\mu - 1$,

$$\begin{cases} \lambda'_k = \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\mp\frac{2k\pi i}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{n\ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda''_k = \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\pm\frac{2k\pi i}{h}\right)^n\left[1 \pm \frac{n\ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \end{cases} \tag{2.357}$$

де $h = t(b)$, $t(x)$ *визначається формулами* (2.199), *верхній знак відповідає* $n = 4p - 1$, *а нижній —* $n = 4p + 1$; $\ln_0 \xi$ *— деяке фіксоване значення натурального логарифма, а* $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ *— корені рівняння* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, *що відповідає області* $\mathcal{S}_q$ *з* q *відповідно непарним і парним.*

Для парного n, $n = 2\mu$ *і* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \end{cases} \tag{2.358}$$

де ξ' *і* ξ'' *— корені рівняння*

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{2.359}$$

що відповідає області $\mathcal{S}_0$; *причому верхній знак у формулах* (2.358) *відповідає парному, а нижній — непарному* μ.

Нарешті, для парного n, $n = 2\mu$ *і* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\begin{cases} \lambda'_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \\ \lambda''_k = (-1)^\mu \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\frac{2k\pi}{h}\right)^n\left[1 \mp \frac{\mu\ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \end{cases} \tag{2.360}$$

де ξ *— (двократний) корінь рівняння* (2.359), *що відповідає області* $\mathcal{S}_0$, *а вибір верхнього чи нижнього знака у формулах* (2.360) *слід здійснювати за тим самим правилом, що й у формулах* (2.358).

У перших випадках всі власні значення, починаючи з деякого, є простими, а в останньому (*формули* (2.360)), — *починаючи з деякого, простими чи двократними.*

Доведення здійснюється аналогічно доведенню теорем 2.2, 2.13 і 2.26 з використанням теореми 2.24. Можна зазначити лиш, що власні значення є нулями визначника

$$\Delta(\lambda) = \det\left(\mathcal{U}_\nu(y_j)\right)_{\nu,j=1}^{n}.$$

Внаслідок асимптотичних формул (2.295) крайові умови (2.206) для лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.286) запишуться у вигляді

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\left\{[\hat{\alpha}_\nu] + e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu]\right\}.$$

Зовсім так само, як у теоремі 2.2, за допомогою формул (2.76), (2.77) можна показати, що в кожному секторі $\mathcal{T}$ за виконання нерівностей (2.177) для n непарного ($n = 2\mu + 1$) і парного ($n = 2\mu$)

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\hat{\alpha}_\nu], & j < \mu, \\ (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\hat{\alpha}_\nu] + e^{\rho\omega_\mu h}[\hat{\beta}_\nu]\}, & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu], & j > \mu, \end{cases} \tag{2.361}$$

$$\mathcal{U}_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\hat{\alpha}_\nu], & j < \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\hat{\alpha}_\nu] + e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu]\}, & j = \mu, \mu+1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j h}[\hat{\beta}_\nu], & j > \mu + 1 \end{cases} \tag{2.362}$$

відповідно. Після підстановки останніх формул у $\Delta(\lambda)$, скорочення на спільні множники рядків і стовпців (враховуючи, що для парного n має місце $\omega_{\mu+1} = -\omega_\mu$), ми отримаємо рівняння

$$[\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu h}[\theta_1] = 0$$

і

$$[\theta_1]e^{2\rho\omega_\mu h} + [\theta_0]e^{\rho\omega_\mu h} + [\theta_{-1}] = 0$$

для n непарного і парного відповідно. Внаслідок регулярності крайових умов (2.206), міркуваннями, аналогічними наведеним у теоремі 2.26, з цих рівнянь можна вивести асимптотичні формули для власних значень (2.357), (2.358) і (2.360).

2.12.5. Асимптотика власних функцій крайової задачі для диференціального рівняння. Отримані результати дозволяють побудувати за схемою пункту 2.12.2 асимптотичні формули для власних функцій при великих за модулем простих власних значеннях.

Нехай y_1, y_2, ..., y_n – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.286), що задовольняють співвідношенням (2.295) в деякій області $\mathcal{T}$. Власна функція y, відповідна власному значенню $\lambda = -\operatorname{sgn}(\sigma)\rho^n$, повинна бути лінійною комбінацією функцій y_1, y_2, ..., y_n:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

коефіцієнти якої є нетривіальними розв'язками однорідної системи

$$\mathcal{U}_\nu(y_1)c_1 + \mathcal{U}_\nu(y_2)c_2 + \ldots + \mathcal{U}_\nu(y_n)c_n = 0, \quad \nu = \overline{1,n}.$$

Отже, вони пропорційні алгебричним доповненням якого-небудь рядка визначника цієї системи за умови простоти власних значень. Тому

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \mathcal{U}_2(y_1) & \mathcal{U}_2(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{U}_n(y_1) & \mathcal{U}_n(y_2) & \cdots & \mathcal{U}_n(y_n) \end{vmatrix}, \qquad (2.363)$$

якщо не всі доповнюючі мінори елементів першого рядка цього визначника дорівнюють нулю. (В протилежному випадку y_1, y_2, ..., y_n потрібно розмістити в тому рядку, не всі мінори елементів якого дорівнюють нулю.)

Нехай n непарне ($n = 2\mu - 1$). Пригадаємо, що у цьому випадку всі власні значення, крім, можливо, скінченного числа, є простими. Підставимо формули (2.295) і (2.361) в (2.363), скоротимо отриманий вираз на несуттєві множники ρ^{k_2}, ρ^{k_3}, ..., ρ^{k_n},

$e^{\rho\omega_{\mu+1}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, ..., $e^{\rho\omega_n h}$ і, врахувавши, що, оскільки $e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1]$, має місце, зокрема, співвідношення $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}[1] = \xi[1]$, ми прийдемо до наступної теореми. Заради лаконічності формулювання теореми, ми в ньому не згадуємо, що коефіцієнти диференціального рівняння (2.286) задовольняють умови, наведені у пункті 2.10.3. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що $\rho_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)}$ за формулою (2.176) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.357).

Теорема 2.31. *Власні функції крайової задачі* (2.140), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *у випадку непарного* n $(n = 2\mu - 1)$ *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_k^{(1)}(x)$, $y_k^{(2)}(x)$, *відповідні власним значенням* λ_k', λ_k'' (*що визначаються формулами* (2.357)), *вигляду*

$$y_k^{(s)}(x) = \hat{E}(x)[1]_x \det\left(X_{1k}^{(s)}, X_{2k}^{(s)}\right), \tag{2.364}$$

де

$$X_{1k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \rho_k^{(s)} t(x)} & \dots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(s)} t(x)} & e^{\omega_\mu \rho_k^{(s)} t(x)} \\ [\hat{\alpha}_2]\omega_1^{k_2} & \dots & [\hat{\alpha}_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\hat{\alpha}_2 + \xi^{(s)}\hat{\beta}_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat{\alpha}_n]\omega_1^{k_n} & \dots & [\hat{\alpha}_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\hat{\alpha}_n + \xi^{(s)}\hat{\beta}_n]\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(s)} = \begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(s)}(t(x)-h)} & \dots & e^{\omega_n \rho_k^{(s)}(t(x)-h)} \\ [\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & [\hat{\beta}_2]\omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ [\hat{\beta}_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & \dots & [\hat{\beta}_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(1)} \mp 2k\pi i), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi^{(2)} \pm 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \dots;$ N – *достатньо велике натуральне число,* $s = 1, 2,$ $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.199), *а* $\hat{\alpha}_\nu$, $\hat{\beta}_\nu$ – *формулами* (2.208), *причому верхній знак тут відповідає* $n = 4p - 1$, *а нижній* – $n = 4p + 1$; $\xi^{(1)}$ *і* $\xi^{(2)}$ – *ті самі, що й у теоремі 2.30.*

Повторивши попередні міркування, аналогічну теорему можна отримати й у випадку простих власних значень для парного n $(n = 2\mu)$. Для цього потрібно підставити формули (2.295) і (2.362) в (2.363), скоротити отриманий вираз на несуттєві множники ρ^{k_2}, $\rho^{k_3}, \ldots, \rho^{k_n}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}h}$, $e^{\rho\omega_{\mu+3}h}, \ldots, e^{\rho\omega_n h}$ і, врахувавши, що $e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1]$, $e^{\rho\omega_\mu h} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}[1] = \xi[1]$, можна прийти до наступного висновку. Оскільки мова йде про власні функції, тут зразу враховано, що ρ_k', ρ_k'' за формулою (2.176) відповідають власним значенням λ_k', λ_k'' з формули (2.358).

Теорема 2.32. *Власні функції крайової задачі* (2.286), (2.206) *з регулярними крайовими умовами* (2.206) *у випадку парного* n $(n = 2\mu)$ *утворюють дві нескінченні послідовності* $y_{1k}(x)$, $y_{2k}(x)$, *відповідні простим власним значенням* λ_k', λ_k'' (*що визначаються формулами* (2.358)), *вигляду*

$$\begin{aligned} y_{1k}(x) &= \hat{E}(x)[1]_x \det\left(X_{1k}', X_{2k}'\right), \\ y_{2k}(x) &= \hat{E}(x)[1]_x \det\left(X_{1k}'', X_{2k}''\right), \end{aligned} \tag{2.365}$$

де

$$X_{1k}' = \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \rho_k' t(x)} & \ldots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k' t(x)} & e^{\omega_\mu \rho_k' t(x)} \\ [\hat{\alpha}_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\hat{\alpha}_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\hat{\alpha}_2 + \xi'\hat{\beta}_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\hat{\alpha}_n]\omega_1^{k_n} & \cdots & [\hat{\alpha}_n]\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\hat{\alpha}_n + \xi'\hat{\beta}_n]\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}' = \begin{pmatrix} e^{-\omega_\mu \rho_k' t(x)} & e^{\omega_{\mu+2}\rho_k'(t(x)-h)} & \ldots & e^{\omega_n \rho_k'(t(x)-h)} \\ [\hat{\alpha}_2 + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & [\hat{\beta}_2]\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & [\hat{\beta}_2]\omega_n^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\hat{\alpha}_n + \frac{1}{\xi'}\hat{\beta}_n]\omega_{\mu+1}^{k_n} & [\hat{\beta}_n]\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & [\hat{\beta}_n]\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i), \quad \rho_k'' = \frac{1}{\omega_\mu h}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i),$$

$k = N, N+1, \ldots;$ N – *достатньо велике натуральне число*, $t(x)$ *і* $\hat{E}(x)$ *визначаються формулами* (2.199), *а* $\hat{\alpha}_\nu$, $\hat{\beta}_\nu$ – *формулами* (2.208), *причому в останніх формулах верхній знак треба брати для* $r = 4p$, *а нижній – для* $r = 4p + 2$; X_{1k}'', X_{2k}'' *відрізняються* *від* X'_{1k}, X'_{2k} *заміною* ρ'_k *на* ρ''_k *і* ξ' *на* ξ''; ξ' *і* ξ'' *тут ті самі, що і в теоремі 2.30.*

2.12.6. Розвинення за власними функціями крайової задачі для диференціального рівняння. Для крайової задачі (2.286), (2.206) має місце теорема 2.22. Але при припущеннях пункту 2.10.3 теореми 2.24, 2.30–2.32 дають можливість встановити більш сильний результат.

Теорема 2.33. *Нехай на коефіцієнти диференціального рівняння* (2.286) *накладено вказані у пункті 2.10.3 умови. Тоді у випадку регулярних крайових умов* (2.206), *якщо для парного* n, *крім того, справджується нерівність* $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$, *власні функції крайової задачі* (2.286), (2.206) *утворюють базис Рісса в* $L_2([a,b];\mathbb{C})$.

Доведення. Нехай

$$f \in L_2([a,b];\mathbb{C}), \quad d_k = (f,\, z_k)_{BV} = \int\limits_a^b \sigma(x) f(x)\overline{z_k(x)}dx,$$

де $z_k(x)$ – власні функції спряженої задачі (2.168), (2.220), що відповідають простим власним значенням. Зрозуміло, що для $f(x) \equiv 0$ всі $d_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність власних функцій $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачі (2.286), (2.206) буде ω-лінійно незалежною внаслідок (2.264), бо $f(x) \equiv 0$ задовольняє умови теореми 2.22.

Поряд з задачею (2.286), (2.206) з визначеними в умові теореми коефіцієнтами розглянемо також крайову задачу (2.286), (2.206) з сумовними коефіцієнтами $p_j(x)$ при $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$ і $\sigma \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$. Поділивши рівняння (2.286) на $\sigma(x)$, отримаємо рівняння (1.1). Нехай $g_k(x)$ – власні функції крайової задачі (1.1), (2.206) з сумовними коефіцієнтами $p_j(x)$ при $p_0 \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$.

Теорема 1.7 свідчить, що для крайової задачі (1.1), (2.206) з сумовними коефіцієнтами $p_j(x)$, $j = \overline{2,n}$, при $p_0 \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$ і регулярними крайовими умовами (2.206), якщо для парного n, крім того, виконується додаткова умова

$\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$, то власні функції $g_k(x)$ крайової задачі (1.1), (2.206) утворюють базис Рісса в просторі $L_2([a,b];\mathbb{C})$, [44, 73].

Оскільки власні функції $g_k(x)$ та $y_k(x)$ подаються з точністю до $O\left(\frac{1}{k}\right)$ тими самими асимптотичними формулами для великих k, вони є квадратично близькими внаслідок збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

За теоремою Барі (див. теорему 1.6, [12], [30, с. 382]) послідовність власних функцій $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка є ω-лінійно незалежною і квадратично близькою до базису Рісса $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, сама утворює базис Рісса в $L_2([a,b];\mathbb{C})$. Теорему доведено.

Наслідок. Будь-яку функцію з $L_2([a,b];\mathbb{C})$ можна розвинути в ряд (2.264) за власними функціями крайової задачі (2.286), (2.206) при виконанні умов теореми 2.33.

Зауваження. В окремому випадку, якщо в рівнянні (2.286) $\sigma \in W_1^n([a,b];\mathbb{R})$, $p_1 \in W_1^{n-1}([a,b];\mathbb{C})$, $p_i \in L_1([a,b];\mathbb{C})$, тобто $b_i \in AC([a,b];\mathbb{C})$, $i = \overline{2,n}$, результати теорем 2.22, 2.30–2.33 збігаються з відомими (див. пункти 1.1.4–1.1.7). Якщо покласти, крім того, $p_1(x) \equiv 0$, $\sigma(x) \equiv 1$, то теореми 2.30, 2.22 і 2.33 перейдуть у теореми 1.4, 1.5 і 1.7.

2.13. Застосування до розв'язування прикладних задач

2.13.1. Метод Фур'є. Для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними часто використовують метод Фур'є (метод відокремлення змінних).

Нехай, наприклад, потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad (2.366)$$

що задовольняє початкові умови

$$u\big|_{t=0} = f(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.367}$$

і крайові умови

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} \left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} \left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.368}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.366), що задовольняє крайові умови (2.368), у вигляді

$$u = y(x)(A\cos pt + B\sin pt). \tag{2.369}$$

Підставивши його в (2.366) і (2.368), отримаємо, що функція $y(x)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = -p^2 y \tag{2.370}$$

і крайові умови

$$U_j(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} y^{(\nu)}(a) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} y^{(\nu)}(b) = 0. \tag{2.371}$$

Якщо, отже, $y \neq 0$, то y є власною функцією крайової задачі (2.370), (2.371), відповідною власному значенню $-p^2$.

Нехай

$$-p_1^2,\ -p_2^2,\ -p_3^2,\ \ldots$$

– всі власні значення цієї задачі, а

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots$$

– відповідні власні функції; при цьому кожне власне значення повторюється стільки разів, скільки йому відповідає лінійно незалежних власних функцій. Тоді безмежний ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)(A_n\cos p_n t + B_n \sin p_n t)$$

принаймні формально задовольняє рівняння (2.366) і крайові умови (2.368). Залишається задовольнити початкові умови. Підстановка в першу початкову умову дає

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x);$$

ця остання рівність є розвиненням заданої функції $f(x)$ в ряд за власними функціями крайової задачі.

Результати цього розділу обґрунтовують метод Фур'є. Зокрема, теореми 2.11, 2.22, 2.29 і 2.33 дають умови розвинення функції $f(x)$ в ряд за власними функціями крайової задачі.

Фізичні задачі частіше призводять саме до квазідиференціальних, а не просто диференціальних рівнянь. Прикладу такої задачі присвячено наступний пункт.

2.13.2. Задача про коливання стрижня. В роботах [9, 10, 11] вивчається проблема малих коливань та стійкості рівноваги пружних стрижнів і пластинок під дією реальних фізичних сил. Дослідження цих процесів базується на вивченні поведінки власних значень крайових задач для звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь парних порядків. Використовуючи результати робіт [44, 73, 76], автори Байдак Д. А. і Зорій Л. М. були змушені накладати на коефіцієнти цих рівнянь обмеження типу диференційовності певну кількість разів, які в реальних процесах виконуються далеко не завжди. Результати цього розділу дозволяють пом'якшити вимоги на коефіцієнти відповідних рівнянь, а отже, можна було б отримати твердження робіт [9, 10, 11] і у випадку значно гірших функцій у коефіцієнтах.

Наприклад, розглянемо пружний консольний стрижень довжиною l з абсолютно неперервними жорсткістю $EI(\xi)$ та масою $m(\xi)$ на одиницю довжини $(0 \leqslant \xi \leqslant l)$ при дії слідкуючої сили P. Дослідження малих коливань такого стрижня зводиться до крайової задачі

$$\big(f(x)y''\big)'' + py'' + \lambda^2 g(x)y = 0, \qquad (2.372)$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad f(1)y''(1)=0,\quad \big(f(x)y''(x)\big)'\Big|_{x=1}=0, \tag{2.373}$$

де

$$p=\frac{l^2P}{EI_0},\quad \lambda^2=\frac{m_0l^4}{EI_0}\omega^2,\quad I_0=I(0),\quad m_0=m(0),$$
$$f(x)=\frac{I(lx)}{I_0},\quad g(x)=\frac{m(lx)}{m_0},\quad x=\frac{\xi}{l};$$

ω – характеристичний показник; функції $f(x)$ і $g(x)$ будуть абсолютно неперервними на проміжку $[0,1]$. Тут квазіпохідні вводяться формулами $y^{[1]}=y'$, $y^{[2]}=f(x)y''$, $y^{[3]}=-\left(f(x)y''\right)'$, а крайові умови набувають вигляду $y(0)=0$, $y^{[1]}(0)=0$, $y^{[2]}(1)=0$, $y^{[3]}(1)=0$ (крайові умови типу Штурма), і, отже, вони є регулярними (див. пункт 2.2.3). Тоді для крайової задачі (2.372), (2.373) мають місце теореми цього розділу, і ці результати можна застосувати до дослідження малих коливань стрижня.

2.13.3. Побудова розв'язку диференціального рівняння другого порядку з δ-функцією. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння другого порядку з мірою

$$y''+a(x)y+\rho^2y=0 \tag{2.374}$$

на проміжку $[0,1]$, де ρ – комплексний параметр, $a(x)=b'(x)$,

$$b(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,x_1),\\ -a, & x\in[x_1,1],\end{cases}\qquad 0<x_1<1,$$

тобто $a(x)=-a\cdot\delta(x-x_1)$.

Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на чотири сектори $\mathcal{S}_q$, $q=0,1,2,3$, де $\mathcal{S}_q=\{\rho : q\pi/2\leqslant\arg\rho\leqslant(q+1)\pi/2\}$. Через $\mathcal{T}_q$ позначатимемо сектор, що утворюється з $\mathcal{S}_q$ шляхом зсуву $\rho\to\rho+c$.

Легко безпосередньо переконатись у тому, що функція Коші рівняння $y''+\rho^2y=0$ має вигляд

$$K(x,s)=\frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}.$$

Тоді згідно з (2.187) фундаментальні матриці $\tilde{B}_0(x,s)$ і $\tilde{B}_1(x,s)$ рівняння (2.374) на проміжках $[0,x_1)$ і $[x_1,1]$ матимуть структуру

$$\tilde{B}_0(x,s)=\tilde{B}_1(x,s)=\begin{pmatrix}\cos\rho(x-s) & \frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}\\ -\rho\sin\rho(x-s) & \cos\rho(x-s)\end{pmatrix}. \tag{2.375}$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (2.374) методом «склеювання» розв'язків (див. [40, с. 173, 124, § 27]). Фундаментальна матриця $B(x,0)$ на всьому проміжку $[0,1]$ зображається у вигляді

$$B(x,0)=B_0(x,0)\theta_0+B_1(x,0)\theta_1, \tag{2.376}$$

де

$$\theta_0=\begin{cases}1, & x\in[0,x_1),\\ 0, & x\notin[0,x_1),\end{cases}\qquad \theta_1=\begin{cases}1, & x\in[x_1,1],\\ 0, & x\notin[x_1,1],\end{cases}$$

$B_0(x,0)=\tilde{B}_0(x,0)$, а $B_1(x,0)=\tilde{B}_1(x,x_1)B_0(x_1,0)$. Остання формула є формулою гармонійності (1.42) і реалізує принцип «склеювання» розв'язків. Внаслідок властивості (1.43)

$$B_1(x,0)=\tilde{B}_1(x,x_1)(E+\Delta C(x_1))B_0(x_1-0,0). \tag{2.377}$$

Диференціальне рівняння (2.374) зводиться до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix}'=C'(x)\begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix},\qquad C'(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a(x)-\rho^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\Delta C(x_1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}. \tag{2.378}$$

Загальний розв'язок рівняння (2.374) (і його похідну) можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix}=B(x,0)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}. \tag{2.379}$$

Таким чином, підставивши (2.375) і (2.378) у формулу (2.377) і врахувавши (2.376), можна одержати, внаслідок (2.379),

$$
\begin{gathered}
y(x)=\left(c_1\cos\rho x+c_2\frac{\sin\rho x}{\rho}\right)\theta_0+(c_1\left(\cos\rho(x-x_1)\cos\rho x_1+\right.\\
\left.+\frac{\sin\rho(x-x_1)}{\rho}(a\cos\rho x_1-\rho\sin\rho x_1)\right)+\\
+c_2\left(\frac{\cos\rho(x-x_1)\sin\rho x_1}{\rho}+\right.\\
\left.\left.+\frac{\sin\rho(x-x_1)}{\rho}\left(\frac{a\sin\rho x_1}{\rho}+\cos\rho x_1\right)\right)\right)\theta_1,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
y'(x)=(-c_1\rho\sin\rho x+c_2\cos\rho x)\,\theta_0+(c_1\left(-\rho\sin\rho(x-x_1)\cos\rho x_1+\right.\\
\left.+\cos\rho(x-x_1)(a\cos\rho x_1-\rho\sin\rho x_1)\right)+\\
+c_2\left(-\sin\rho(x-x_1)\sin\rho x_1+\right.\\
\left.\left.+\cos\rho(x-x_1)\left(\frac{a\sin\rho x_1}{\rho}+\cos\rho x_1\right)\right)\right)\theta_1,
\end{gathered}
$$

причому розв'язок є абсолютно неперервним на $[0,1]$.

Покладемо (без втрати загальності) $c_1=2$, $c_2=0$. Тоді останні формули можна записати у вигляді

$$
\begin{gathered}
y(x)=2\theta_0\cos\rho x+\left(2\cos\rho x+\frac{2a}{\rho}\sin\rho(x-x_1)\cos\rho x_1\right)\theta_1=\\
=\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\theta_0+\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}-\right.\\
\left.-\frac{ai}{2\rho}\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x+2i\rho x_1}+e^{i\rho x-2i\rho x_1}-e^{-i\rho x}\right)\right)\theta_1,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
y'(x)=-2\theta_0\sin\rho x+2\,(-\rho\sin\rho x+a\cos\rho(x-x_1)\cos\rho x_1)\theta_1=\\
=i\rho\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)\theta_0+\left(i\rho\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)+\right.\\
\left.+\frac{a}{2}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x+2i\rho x_1}+e^{i\rho x-2i\rho x_1}+e^{-i\rho x}\right)\right)\theta_1.
\end{gathered}
$$

Для $\mathrm{Im}\rho>0$ останні вирази перетворимо наступним чином:

$$
y(x)=e^{-i\rho x}\left(1+e^{2i\rho x}\right)\theta_0+e^{-i\rho x}\left(1+e^{2i\rho x}+\right.
$$

$$+\frac{ai}{2\rho}\Big(1-e^{2i\rho x}+e^{2i\rho x_1}-e^{2i\rho(x-x_1)}\Big)\Big)\theta_1,$$

$$y'(x)=-i\rho e^{-i\rho x}\left(1-e^{2i\rho x}\right)\theta_0-i\rho e^{-i\rho x}\left(1-e^{2i\rho x}+\right.$$

$$\left.+\frac{ai}{2\rho}\Big(1+e^{2i\rho x}+e^{2i\rho x_1}+e^{2i\rho(x-x_1)}\Big)\right)\theta_1.$$

Асимптотика розв'язку і його похідної

$$y(x)=e^{-i\rho x}\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big)\Big),\quad y'(x)=-i\rho e^{-i\rho x}\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho}\Big)\Big)$$

збігається з відповідними формулами (2.280).

3

ВЕКТОРНА СИНГУЛЯРНА КРАЙОВА ЗАДАЧА

3.1. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [65].

3.1.1. Квазідиференціальне рівняння і квазіпохідні.

Розглянемо векторний квазідиференціальний вираз

$$\hat{L}_{mn}(\mathbf{y}) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(A_{ij}(x)\mathbf{y}^{(n-i)} \right)^{(m-j)},$$

де $m,\ n \in \mathbb{N}$, $A_{ij}(x)$ – матриці порядку $l \times l$ $(i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m})$, $\mathbf{y}(x)$ – вектор-стовпець. Ми будемо вважати, що $A_{00} \equiv E$, $A_{01} \equiv \equiv A_{10} \equiv 0$; $A_{i0},\ A_{0j} \in L_2\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x)$, $B_{ij} \in \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$. Штрих означає тут узагальнене диференціювання і тому елементи матриць $A_{ij}(x)$ є мірами.

Означення 3.1. *Квазіпохідними* вектор-функції $\mathbf{y}(x)$, що відповідають квазідиференціальному виразу $\hat{L}_{mn}(\mathbf{y})$, будемо називати вектор-функції $\mathbf{y}^{[k]}(x)$, $k = \overline{0, n+m}$, які визначаються формулами

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[k]} = \mathbf{y}^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}; \quad \mathbf{y}^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^{n} A_{i0}\mathbf{y}^{(n-i)}; \\ \mathbf{y}^{[n+k]} = -\left(\mathbf{y}^{[n+k-1]}\right)' + \sum\limits_{i=0}^{n} A_{ik}\mathbf{y}^{(n-i)}, \quad k = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Зрозуміло, що $\mathbf{y}^{[n+m]} \equiv \hat{L}_{mn}(\mathbf{y})$.

Поставимо тепер наступну початкову задачу

$$\hat{L}_{mn}(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y}^{[\nu]}(a) = \tilde{\mathbf{c}}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, n+m-1}, \tag{3.3}$$

де λ – комплексний параметр. Рівняння (3.2) прийнято називати векторним квазідиференціальним рівнянням. Нехай $r = n + m$. Поряд з (3.2), (3.3) розглянемо також матричне квазідиференціальне рівняння і відповідні початкові умови

$$\hat{L}_{mn}(Y) = \lambda Y, \tag{3.4}$$

$$Y^{[\nu]}(a) = \tilde{C}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, r-1}, \tag{3.5}$$

причому квазіпохідні в (3.5) будуються за аналогічними до (3.1) формулами (Y – квадратна матриця l-го порядку). Рівняння (3.4) називатимемо *асоційованим* до рівняння (3.2). Як правило, зручніше оперувати саме з матричними квазідиференціальними рівняннями, а потім вже переходити до векторних. Між векторним (3.2) і асоційованим до нього рівнянням (3.4) існує тісний зв'язок: якщо матриця-функція $Y(x)$ – розв'язок рівняння (3.4), $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^l$ – сталий вектор, то, поклавши $\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{c}$, отримаємо розв'язок векторного квазідиференціального рівняння (3.2).

За допомогою прямокутної матриці

$$\mathcal{Y} = \left(Y, Y^{[1]}, \ldots, Y^{[r-1]}\right)^T \tag{3.6}$$

матричне рівняння (3.4) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'(x)\mathcal{Y}, \tag{3.7}$$

а умови (3.5) набувають вигляду

$$\mathcal{Y}(a) = \tilde{C},$$

де $\tilde{C} = \left(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_r\right)^T$. Матриця-міра $\mathcal{B}'(x)$ визначається тут аналогічно (2.7):

$$\mathcal{B}'(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & E_l & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & E_l & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_{n0} & -A_{n-1,0} & \cdots & -A_{10} & E_l & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{A}_{n1} & \tilde{A}_{n-1,1} & \cdots & \tilde{A}_{11} & A_{01} & -E_l & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \tilde{A}_{n,m-1} & \tilde{A}_{n-1,m-1} & \cdots & \tilde{A}_{1,m-1} & A_{0,m-1} & 0 & \cdots & -E_l \\ \tilde{A}_{nm} - \lambda E_l & \tilde{A}_{n-1,m} & \cdots & \tilde{A}_{1m} & A_{0m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

де $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} - A_{0j}A_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ (тут 0 означає нульову матрицю l-го порядку, E_l – одинична матриця l-го порядку). Очевидно, що

$$\Delta\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta B_{n1} & \cdots & \Delta B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta B_{nm} & \cdots & \Delta B_{1m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, внаслідок рівності $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$, система (3.7) – коректна (див. пункт 1.2.2 і [104]).

Означення 3.2. Під *розв'язком* матричного квазідиференціального рівняння (3.4) будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathcal{Y}(x)$ системи (3.7), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Твердження 3.1 ([114, с. 20–21, 124, с. 134]). *Існує єдиний матричний розв'язок* $Y(x)$ *початкової задачі* (3.4), (3.5) *такий, що* $Y^{[k]} \in AC\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, $Y^{[n+\nu]} \in$

$\in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $\nu = \overline{0, m-1}$ *і в точках* $x_s \in [a,b]$ *розривів матриць-функцій* $B_{ij}(x)$ *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta Y^{[n+\nu]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,\nu+1}(x_s) Y^{[i]}(x_s), \quad \nu = \overline{0, m-1}. \qquad (3.9)$$

3.1.2. Спряжені квазіпохідні і функція Коші. Система, спряжена до системи (3.7), має вигляд

$$\mathcal{Z}' = -\left(\mathcal{B}^*(x)\right)' \mathcal{Z}, \qquad (3.10)$$

де $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{r-1\}}, \ldots, Z^{\{1\}}, Z\right)^T$, Z – тут квадратна матриця l-го порядку. Фігурними дужками позначаються квазіпохідні в сенсі спряженого до (3.4) рівняння. З (3.10) безпосередньо видно структуру спряженого рівняння і квазіпохідних у сенсі останнього.

Означення 3.3. *Спряженим* до (3.4) називається матричне квазідиференціальне рівняння

$$\hat{L}^*_{mn}(Z) \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \Big(A^*_{ij}(x) Z^{(m-j)}\Big)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z, \qquad (3.11)$$

де $A^*_{ij}(x) = (B'_{ij}(x))^* \quad \forall i,j \geqslant 1$.

Означення 3.4. *Квазіпохідними* виразу $\hat{L}^*_{mn}(Z)$ (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (3.11)) називаються матриці-функції $Z^{\{i\}}(x)$, $i = \overline{0, r}$, що визначаються формулами

$$\begin{cases} Z^{\{k\}} = Z^{(k)}, \quad k = \overline{0, m-1}; \quad Z^{\{m\}} = -\sum\limits_{j=0}^{m} A^*_{0j} Z^{(m-j)}; \\ Z^{\{m+k\}} = -\left(Z^{\{m+k-1\}}\right)' - \sum\limits_{j=0}^{m} A^*_{kj} Z^{(m-j)}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (3.12)$$

При цьому, очевидно, $Z^{\{r\}} \equiv \hat{L}^*_{mn}(Z)$.

Розглянемо тепер рівняння (3.11) з початковими умовами

$$Z^{\{\nu\}}(a) = Z_0^{\{\nu\}}, \quad \nu = \overline{0, r-1}. \qquad (3.13)$$

Твердження 3.2 ([114, с. 21, 124, с. 136]). *Існує єдиний матричний розв'язок задачі* (3.11), (3.13) *такий, що* $Z^{\{k\}} \in \in AC\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $k=\overline{0,m-1}$, *а* $Z^{\{m+\nu\}} \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $\nu=\overline{0,n-1}$, *і в точках* $x_s\in[a,b]$ *розривів матриць-функцій* $B_{ij}(x)$ *мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta Z^{\{m+\nu\}}(x_s) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta B^*_{\nu+1,m-j}(x_s) Z^{\{j\}}(x_s), \quad \nu=\overline{0,n-1}. \tag{3.14}$$

Означення 3.5. Матриця-функція $K(x,t)=K(x,t,\lambda)= = (K_{ij}(x,t,\lambda))_{i,j=1}^{l}$ називається *функцією Коші* рівняння (3.4), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x=t\in[a,b]$ задовольняє початкові умови $K^{[i]}(t,t)=0$ $(i=\overline{0,r-2})$, $K^{[r-1]}(t,t)=E$.

Означення 3.6. Нехай $F(x,\alpha)$ – достатньо гладка комплекснозначна матриця-функція двох дійсних змінних. Вираз $F^{*\{j\}*[i]}(x,\alpha)$ називатимемо *змішаною квазіпохідною* порядку $i+j$, якщо спочатку береться i-та квазіпохідна по x в сенсі вихідного квазідиференціального рівняння, потім – ермітове спряження, далі – j-та квазіпохідна по α в сенсі спряженого рівняння від отриманого результату і, нарешті, – знову ермітове спряження.

Твердження 3.3 ([115, с. 46, 124, с. 143]). *Якщо* $K(x,\alpha)$ – *матриця-функція Коші квазідиференціального рівняння, то має місце матрична тотожність*

$$K^{*\{j\}*[i]}(x,\alpha) \equiv K^{[i]*\{j\}*}(x,\alpha) \quad \forall i,j=\overline{0,r-1}.$$

Означення 3.7. Матриця-функція $\hat{K}(x,t)=\hat{K}(x,t,\lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (3.11), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x=t\in[a,b]$ задовольняє початкові умови $\hat{K}_x^{\{i\}}(t,t)=0$ $(i=\overline{0,r-2})$, $\hat{K}_x^{\{r-1\}}(t,t)=E$.

Твердження 3.4 ([115, с. 48, 124, с. 146]). *Для матричних функцій Коші спряжених квазідиференціальних рівнянь справджується тотожність*

$$\hat{K}(x,t) \equiv K^*(t,x). \tag{3.15}$$

Означення 3.8. *Еволюційним оператором* (*фундаментальною матрицею*) системи (3.7) називають квадратну матрицю-функцію $B(x,\alpha)$ порядку lr, що за змінною x задовольняє матричний еквівалент цієї системи і початкову умову $B(\alpha,\alpha) = E$, $\alpha \in [a,b]$.

3.1.3. Побудова матричних інтегро-квазідиференціальних рівнянь. Поклавши $\lambda = (-1)^{m+1}\rho^r$, рівняння (3.4) можна записати у вигляді

$$Y^{(r)} + \rho^r Y = \sum_{0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m,\ i+j>1} (-1)^{j+1}\Big(A_{ij}Y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}. \quad (3.16)$$

Розіб'ємо так само, як і в пункті 2.1.3, комплексну ρ-площину на $2r$ секторів $\mathcal{S}_q = \{\rho : q\pi/r \leqslant \arg\rho \leqslant (q+1)\pi/r\}$, $q = \overline{0, 2r-1}$, аналогічно вводяться сектори $\mathcal{T}_q$ (з вершиною в точці $\rho = -c$).

Матричне рівняння

$$Y^{(r)} + \rho^r Y = 0 \quad (3.17)$$

має фундаментальну систему розв'язків $e^{\rho\omega_1 x}E_l$, $e^{\rho\omega_2 x}E_l$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r x}E_l$, де $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ – різні корені r-го степеня з -1. Згідно з твердженням 2.5 в кожній області $\mathcal{T}_q$ можна так занумерувати числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, щоб виконувався ланцюг нерівностей (2.25).

Блочну матрицю $\mathcal{B}'(x)$ можна подати у вигляді суми двох матриць

$$\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}'_1(x) + \mathcal{B}'_2(x),$$

де

$$\mathcal{B}'_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_l & & & & & \\ & & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & & E_l & & & \\ & & & \ddots & -E_l & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & -E_l \\ (-1)^m\rho^r E_l & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_{n0} & \cdots & -A_{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{A}_{n1} & \cdots & \tilde{A}_{11} & A_{01} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{A}_{nm} & \cdots & \tilde{A}_{1m} & A_{0m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Тоді система

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}_1'\mathcal{Y} \tag{3.19}$$

буде еквівалентною рівнянню (3.17). Якщо праву частину рівності (3.16) розглядати як «неоднорідність», то згідно з формулою для неоднорідного рівняння

$$Y(a) = \Phi(x,a)Y(a) + \int_a^x \Phi(x,\xi)dB_2(\xi)Y(\xi), \tag{3.20}$$

де $\Phi(x,\xi)$ – еволюційний оператор однорідної системи (3.19); його структура має вигляд [112]

$$\Phi(x,\xi) = \begin{pmatrix} K^{*\{r-1\}*}(x,\xi) & \cdots & K(x,\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{*\{r-1\}*[r-1]}(x,\xi) & \cdots & K^{[r-1]}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

де $K(x,\xi)$ – матриця-функція Коші рівняння (3.17). Квадратні дужки в (3.21) позначають квазіпохідні за змінною x в сенсі системи (3.19), а фігурні дужки – квазіпохідні в сенсі спряженого до (3.17) рівняння, які беруться за другою змінною. Квазіпохідні визначаються формулами

$$\begin{cases} Y^{[k]} = Y^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \\ Y^{[n+k]} = (-1)^k Y^{(n+k)}, \quad k = \overline{0, m-1}; \\ Z^{\{k\}} = Z^{(k)}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ Z^{\{m+k\}} = (-1)^{k+1} Z^{(m+k)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Легко перевірити, що матриця-функція Коші для рівняння (3.17) має вигляд

$$K(x,\xi) = -\frac{1}{r\rho^{r-1}} \sum_{j=1}^{r} \omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)} E_l. \tag{3.23}$$

Справді, вона задовольняє (3.17) по x, $K^{(\nu)}(\xi,\xi) = 0$ $(\nu = \overline{0, r-2})$, $K^{(r-1)}(\xi,\xi) = E$, бо $\omega_1^{\nu+1} + \omega_2^{\nu+1} + \ldots + \omega_r^{\nu+1} = 0$, а $\omega_j^r = -1$.

Підставивши (3.18) і (3.21) в (3.20), отримаємо за допомогою блочного множення матриць, аналогічно пункту 2.1.5, матричну систему інтегро-квазідиференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса

$$\begin{gathered}
Y^{[\nu]}(x) = \sum_{s=1}^{r} K^{*\{r-s\}*[\nu]}(x,a)\tilde{C}_s - \\
- \sum_{s=2}^{n} \int_a^x K^{*\{m\}*[\nu]}(x,\xi) A_{s0}(\xi) Y^{[n-s]}(\xi) d\xi + \\
+ \sum_{p=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \int_a^x K^{*\{m-p\}*[\nu]}(x,\xi) dB_{sp}(\xi) Y^{[n-s]}(\xi) - \\
- \sum_{p=2}^{m} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x K^{*\{m-p\}*[\nu]}(x,\xi) A_{0p}(\xi) A_{s0}(\xi) Y^{[n-s]}(\xi) d\xi + \\
+ \sum_{p=2}^{m} \int_a^x K^{*\{m-p\}*[\nu]}(x,\xi) A_{0p}(\xi) Y^{[n]}(\xi) d\xi, \quad \nu = \overline{0, r-1},
\end{gathered}$$

звідки, завдяки формулам (3.22), (3.23), будемо мати

$$\begin{gathered}
Y^{[\nu]}(x) = \frac{R_\nu}{r\rho^{r-1}} \sum_{s=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \gamma_{r-s} \rho^{r-s+\nu} \omega_j^{r-s+\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-a)} \tilde{C}_s + \\
+ \Omega_\nu(x), \quad \nu = \overline{0, r-1},
\end{gathered}$$

де

$$\Omega_\nu(x) = -\frac{R_\nu \gamma_m}{r\rho^{n-\nu-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \sum_{j=1}^{r} \omega_j^{m+\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \frac{R_\nu \gamma_{m-p}}{r\rho^{n+p-\nu-1}} \left[\sum_{s=1}^{n} \int_a^x \sum_{j=1}^{r} \omega_j^{m-p+\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} dB_{sp}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) - \right.$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \sum_{j=1}^{r} \omega_j^{m-p+\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} A_{0p}(\xi) A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$\left. + \int_a^x \sum_{j=1}^{r} \omega_j^{m-p+\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} A_{0p}(\xi) Y^{(n)}(\xi) d\xi \right], \quad \nu = \overline{0, r-1},$$

$$R_\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \overline{0, n-1}, \\ (-1)^{\nu-n}, & \nu = \overline{n, r-1}, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\gamma_\nu = \begin{cases} (-1)^{\nu+1}, & \nu = \overline{0, m-1}, \\ (-1)^m, & \nu = \overline{m, r-1}. \end{cases}$$

Ми можемо підібрати сталі матриці $\tilde{C}_j$ так, щоб справджувалась матрична система інтегро-квазідиференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса

$$Y^{[\nu]}(x) = R_\nu \sum_{j=1}^{r} C_j \rho^\nu \omega_j^\nu e^{\rho\omega_j x} + \Omega_\nu(x), \quad \nu = \overline{0, r-1}. \tag{3.25}$$

Справді, розписавши покоординатно систему

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 \omega_1^{r-1} \rho^{r-1} \gamma_{r-1} + \ldots + \tilde{C}_r \gamma_0 = C_1 r \rho^{r-1} \omega_1^{-1} e^{\rho\omega_1 a}, \\ \ldots \\ \tilde{C}_1 \omega_r^{r-1} \rho^{r-1} \gamma_{r-1} + \ldots + \tilde{C}_r \gamma_0 = C_r r \rho^{r-1} \omega_r^{-1} e^{\rho\omega_r a}, \end{cases}$$

за допомогою якої здійснюється перехід від сталих матриць $\tilde{C}_j$ до C_j, ми отримаємо l^2 систем для визначення елементів матриць

$\tilde{C}_j$, а їх визначники

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{r-1}\rho^{r-1}\gamma_{r-1} & \cdots & \gamma_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_r^{r-1}\rho^{r-1}\gamma_{r-1} & \cdots & \gamma_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+r}\rho^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{vmatrix} \omega_1^{r-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_r^{r-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

при $|\rho| > 0$ відрізняються від нуля як визначники Вандермонда.

Покладемо для деякого фіксованого k, $k = \overline{1, r}$,

$$\hat{C}_j = C_j \text{ для } j = \overline{1, k}, \tag{3.26}$$

$$\hat{C}_j = C_j - \frac{\gamma_m}{r\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \omega_j^{m+1} e^{-\rho\omega_j\xi} A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{m-p}}{r\rho^{n+p-1}} \left[\sum_{s=1}^{n} \int_a^b \omega_j^{m-p+1} e^{-\rho\omega_j\xi} dB_{sp}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) - \right.$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \omega_j^{m-p+1} e^{-\rho\omega_j\xi} A_{0p}(\xi) A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$\left. + \int_a^b \omega_j^{m-p+1} e^{-\rho\omega_j\xi} A_{0p}(\xi) Y^{(n)}(\xi) d\xi \right] \text{ для } j = \overline{k+1, r}. \tag{3.27}$$

Тоді рівняння (3.25) запишуться у вигляді ($\nu = \overline{0, r-1}$)

$$Y^{[\nu]}(x) = R_\nu \sum_{j=1}^{r} \hat{C}_j \rho^\nu \omega_j^\nu e^{\rho\omega_j x} + H_1(a, x, \rho) + H_2(b, x, \rho), \tag{3.28}$$

де

$$H_q(t,x,\rho) = -\frac{R_\nu \gamma_m}{r\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_t^x \frac{\partial^\nu K_{q0}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \frac{R_\nu \gamma_{m-p}}{r\rho^{n+p-1}} \left[\sum_{s=1}^{n} \int_t^x \frac{\partial^\nu K_{qp}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} dB_{sp}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) - \right.$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \int_t^x \frac{\partial^\nu K_{qp}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} A_{0p}(\xi) A_{s0}(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) d\xi +$$

$$\left. + \int_t^x \frac{\partial^\nu K_{qp}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} A_{0p}(\xi) Y^{(n)}(\xi) d\xi \right], \quad q = 1, 2,$$

$$K_{1p}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{m-p+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)},$$

$$K_{2p}(x,\xi,\rho) = \sum_{j=k+1}^{r} \omega_j^{m-p+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}, \quad p = \overline{0,m}.$$

3.1.4. Асимптотика розв'язків квазідиференціального рівняння з мірами. Користуючись твердженням 2.5, легко встановити оцінки для скалярних ядер K_{1p}, K_{2p} та їхніх похідних. Відповідь на це питання дає наступна лема.

Лема 5. *Існує така стала D, що для всіх $\rho \in \mathcal{T}$ та $\nu = \overline{0, r-1}$ виконуються нерівності*

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x,\xi,\rho) \right| \leqslant D\,|\rho|^\nu\, k \left| e^{\rho\omega_k(x-\xi)} \right|, \ a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b,$$

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_2(x,\xi,\rho) \right| \leqslant D\,|\rho|^\nu\, (r-k) \left| e^{\rho\omega_k(x-\xi)} \right|, \ a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b.$$

Доведення здійснюється за схемою доведення леми 4. Справді, оскільки неперервна функція є обмеженою, ми можемо вибрати сталу D так, щоб

$$\left|e^{c(\omega_j-\omega_k)(x-\xi)}\right| \leqslant D \quad \forall j,k=\overline{1,n}, \quad x,\xi\in[a,b].$$

Якщо $\rho\in\mathcal{T}$, то з нерівностей (2.25) випливає, що для $\alpha\leqslant k$ має місце $\mathrm{Re}(\rho\omega_\alpha)\leqslant\mathrm{Re}(\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha))$. Тому при $a\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_1(x,\xi,\rho)\right| = \left|\sum_{\alpha=1}^{k}\rho^\nu\omega_j^{\nu+m-p+1}e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{k}|\rho|^\nu\left|e^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha)](x-\xi)}\right|,$$

звідки випливає перша нерівність леми. Друга нерівність доводиться аналогічно.

У наступній теоремі на основі аналізу матричних інтегро-квазідиференціальних рівнянь (3.28) встановлюються асимптотичні формули для фундаментальної системи розв'язків рівняння (3.4).

Теорема 3.1. *При вищезгаданих умовах на матриці* A_{ij} *квазідиференціального матричного рівняння* (3.16), *воно у всій області* $\mathcal{T}$ *комплексної* ρ*-площини має* r *лінійно незалежних матричних розв'язків* Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_r, *регулярних відносно* $\rho\in\mathcal{T}$, *таких, що при досить великому* $|\rho|$ *задовольняють співвідношення* ($\nu=\overline{0,r-1}$, $k=\overline{1,r}$)

$$Y_k^{[\nu]}(x,\rho)=R_\nu\rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left[\omega_k^\nu E_l+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{3.29}$$

де R_ν *подаються формулами* (3.24).

Доведення. Припустимо, що рівняння (3.16) має такий розв'язок Y_k, що $\hat{C}_\nu=0$ при $\nu\neq k$, $\hat{C}_k=e^{-\rho\omega_k a}E_l$. Покладемо

$$Y_k^{[\nu]}(x,\rho)=\rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}Z_{k\nu}, \quad \nu=\overline{0,r-1}, \tag{3.30}$$

і введемо позначення

$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = \frac{1}{r} R_\nu \gamma_{m-p} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{2-s-p-\nu} \times \\ \times \frac{\partial^\nu K_{1p}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \ \text{для } \xi \leqslant x, \tag{3.31}$$

$$\mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = -\frac{1}{r} R_\nu \gamma_{m-p} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{2-s-p-\nu} \times \\ \times \frac{\partial^\nu K_{2p}(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \ \text{для } \xi > x, \tag{3.32}$$

$$k = \overline{1,r}, \ \ p = \overline{0,m}, \ \ \nu = \overline{0,r-1}, \ \ s = \overline{1,n};$$

тоді для матриць-функцій $Z_{k\nu}(x,\rho)$ ми отримаємо з (3.28) систему інтегральних рівнянь

$$Z_{k\nu}(x,\rho) = R_\nu \omega_k^\nu E_l - \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho) A_{s0}(\xi) Z_{k,n-s}(\xi,\rho) d\xi + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{p=1}^{m} \Bigg[\sum_{s=1}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) dB_{sp}(\xi) Z_{k,n-s}(\xi,\rho) - \\ - \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) A_{0p}(\xi) A_{s0}(\xi) Z_{k,n-s}(\xi,\rho) d\xi + \\ + \int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho) A_{0p}(\xi) Z_{k,n}(\xi,\rho) d\xi \Bigg]. \tag{3.33}$$

Другий інтеграл в (3.33) буде існувати як набір скалярних інтегралів Стільтьєса внаслідок того, що підінтегральна матриця-функція може мати розриви хіба що справа, тоді як $B_{sp}(x)$ є неперервними праворуч. Побудуємо тепер скалярну та матричну функції $Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ і $\mathcal{U}_{sp}(x) = (u_{spij}(x))_{i,j=1}^{l}$ ($k = \overline{1,r}$, $p = \overline{0,2m}$,

$\nu = \overline{0, r-1}$, $s = \overline{0, n}$) наступним чином:

$$Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho), & s = \overline{0,n},\ p = \overline{1,m}; \\ -\mathcal{K}_{k,p-m,\nu s}(x,\xi,\rho), & s = \overline{1,n},\ p = \overline{m+1,2m}; \\ -\mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho), & s = \overline{1,n},\ p = 0; \\ 0, & s = 0,\ p = 0, m+1, m+2, \ldots, 2m; \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_{sp}(x) = \begin{cases} B_{sp}(x), & s = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}; \\ \int\limits_a^x A_{0p}(\tau)d\tau, & s = 0,\ p = \overline{0,m}; \\ \int\limits_a^x A_{s0}(\tau)d\tau, & s = \overline{1,n},\ p = 0; \\ \int\limits_a^x A_{0,p-m}(\tau)A_{s0}(\tau)d\tau, & s = \overline{0,n},\ p = \overline{m+1,2m}. \end{cases}$$

Інтеграл Лебега зі змінною верхньою межею від сумовної функції є абсолютно неперервною функцією на проміжку $[a,b]$, а отже, має обмежену варіацію на цьому проміжку. Внаслідок цього всі елементи матриць $\mathcal{U}_{sp}(x)$ мають обмежену варіацію на $[a,b]$. Тоді (3.33) можна буде зобразити в компактнішому вигляді

$$Z_{k\nu}(x,\rho) = R_\nu \omega_k^\nu E_l + \\ + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)d\mathcal{U}_{sp}(\xi)Z_{k,n-s}(\xi,\rho). \tag{3.34}$$

При фіксованому k і $\nu = \overline{0, r-1}$ це є система інтегральних рівнянь стосовно функцій $Z_{k\nu}(x,\rho) = (z_{k\nu ij}(x,\rho))_{i,j=1}^{l}$, $\nu = \overline{0, r-1}$. Якщо система (3.34) має розв'язок, то, використавши метод послідовних підстановок, отримаємо

$$Z_{k\nu}(x,\rho) = R_\nu \omega_k^\nu E_l + \\ + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_a^b Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\omega_k^{n-s}d\mathcal{U}_{sp}(\xi) + \ldots + \frac{1}{\rho^d}\times \\ \times \sum_{p_1,\ldots,p_d=0}^{2m}\ \sum_{s_1,\ldots,s_d=0}^{n}\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b Q_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)d\mathcal{U}_{s_1p_1}(\xi_1)\times\ldots$$

$$\ldots \times Q_{k,p_d,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)d\mathcal{U}_{s_dp_d}(\xi_d)\omega_k^{n-s_d} + \frac{1}{\rho^{d+1}} \times$$

$$\times \sum_{p_1,\ldots,p_{d+1}=0}^{2m} \sum_{s_1,\ldots,s_{d+1}=0}^{n} \int_a^b \ldots \int_a^b Q_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)d\mathcal{U}_{s_1p_1}(\xi_1) \times \ldots$$

$$\ldots \times Q_{k,p_{d+1},n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho)d\mathcal{U}_{s_{d+1},p_{d+1}}(\xi_{d+1})Z_{k,n-s_{d+1}}(\xi_{d+1},\rho).$$

Розпишемо тепер останню рівність покомпонентно:

$$z_{k\nu ij}(x,\rho) = R_\nu \omega_k^\nu \delta_{ij} + \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)du_{spij}(\xi)\omega_k^{n-s} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\rho^d} \sum_{p_1,\ldots,p_d=0}^{2m} \sum_{s_1,\ldots,s_d=0}^{n} \int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{g_1,\ldots,g_{d-1}=1}^{l} Q_{k,p_1,\nu,s_1}(x,\xi_1,\rho)\times$$

$$\times du_{s_1,p_1,i,g_1}(\xi_1)\ldots Q_{k,p_d,n-s_{d-1},s_d}(\xi_{d-1},\xi_d,\rho)\times$$

$$\times du_{s_d,p_d,g_{d-1},j}(\xi_d)\omega_k^{n-s_d} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^{d+1}} \sum_{p_1,\ldots,p_{d+1}=0}^{2m} \sum_{s_1,\ldots,s_{d+1}=0}^{n} \int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{g_1,\ldots,g_{d+1}=1}^{l} Q_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times$$

$$\times du_{s_1p_1ig_1}(\xi_1)\ldots Q_{k,p_{d+1},n-s_d,s_{d+1}}(\xi_d,\xi_{d+1},\rho)\times$$

$$\times du_{s_{d+1},p_{d+1},g_d,g_{d+1}}(\xi_{d+1})z_{k,n-s_{d+1},g_{d+1},j}(\xi_{d+1},\rho), \qquad (3.35)$$

тут δ_{ij} – символ Кронекера, $\nu = \overline{0,r-1}$, $i,j = \overline{1,l}$. Нехай

$$B = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |z_{k\nu ij}(x)|, \quad \nu = \overline{0,r-1}, \quad k = \overline{1,r}, \quad i,j = \overline{1,l};$$

$$V_{spij} = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, u_{spij}, \quad M = \max V_{spij}, \quad s = \overline{0,n}, \quad p = \overline{0,2m}, \quad i,j = \overline{1,l}.$$

З леми 5 і формул (3.31), (3.32) безпосередньо випливає існування таких сталих L і R, що при $s+p \neq 1$ і $|\rho| > R$ справджуватиметься нерівність $|Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)| \leqslant L$. З умов $A_{10}(x) \equiv 0$, $A_{01}(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ видно, що там є сталими і матриці-функції $\mathcal{U}_{10}(x), \mathcal{U}_{01}(x)$. Тоді останній доданок з рівності (3.35) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{d+1}}{|\rho|^{d+1}}\sum_{p_1,p_2,\dots,p_{d+1}=0}^{2m}\ \sum_{s_1,s_2,\dots,s_{d+1}=0}^{n}\ \sum_{g_1,\dots,g_{d+1}=1}^{l}V_{s_1p_1ig_1}\times$$
$$\times\prod_{j=2}^{d+1}V_{s_jp_jg_{j-1},g_j}\leqslant 2B(d+1)^3nml\left(\frac{LM}{|\rho|}\right)^{d+1}.$$

При $|\rho|>R_0$, де $R_0=\max\{R,2LM\}$ (тут враховано, що при великих d справджується нерівність $d^3<2^d$), функція $z_{k\nu ij}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu ij}(x,\rho)=R_\nu\omega_k^\nu\delta_{ij}+\frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)\,\omega_k^{n-s}\,du_{spij}(\xi)+$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{p_1,p_2=0}^{2m}\ \sum_{s_1,s_2=0}^{n}\ \sum_{g=1}^{l}\int_a^b\int_a^b Q_{kp_1\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\times$$
$$\times Q_{kp_2,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\omega_k^{n-s_2}du_{s_1p_1ig}(\xi_1)du_{s_2p_2gj}(\xi_2)+\dots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho|\geqslant R_1>R_0$, $a\leqslant x\leqslant b$ цей ряд збігається рівномірно і є покомпонентним розв'язком системи (3.34). Отже, система (3.34) має один і тільки один матричний розв'язок $Z_{k\nu}=Z_{k\nu}(x,\rho)$, аналітичний відносно ρ, причому

$$Z_{k\nu}(x,\rho)=R_\nu\omega_k^\nu E_l+O\left(\tfrac{1}{\rho}\right).$$

Звідси і з рівності (3.30) випливають співвідношення (3.29), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність матриць-функцій Y_1, Y_2, ..., Y_r. Залишається довести, що існує розв'язок $Y_k(x,\rho)$ рівняння (3.16), якому за формулою (3.30) відповідає таке $Z_{k\nu}$, що задовольняє (3.33). Для цього досить показати, що якими б не були сталі матриці $\hat{C}_\nu$, існує розв'язок Y рівняння (3.16), який задовольняє (3.28) при цих значеннях $\hat{C}_\nu$.

Рівності (3.26), (3.27) – це лінійне перетворення від C_j до $\hat{C}_j$. Очевидно, достатньо довести, що визначник перетворення (3.26), (3.27) при достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля. У цьому випадку рівняння (3.26), (3.27) можна розв'язати відносно C_j при довільно заданих $\hat{C}_j$.

Якщо визначник перетворення (3.26), (3.27) дорівнює нулю при як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, то для цих значень ρ рівняння (3.26), (3.27) мають нетривіальні розв'язки відносно C_j при $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \ldots = \hat{C}_r = 0$. Відповідна функція Y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи, яку можна отримати з (3.28) при $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \ldots = \hat{C}_r = 0$.

Доведемо, що це неможливо. Скориставшись заміною $(\nu = \overline{0, r-1})$

$$Z_\nu(x,\rho) = (z_{\nu ij}(x,\rho))_{i,j=1}^{l} = Y^{[\nu]}(x,\rho)\rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-a)}, \tag{3.36}$$

аналогічною до формули (3.30), отримаємо для матриць-функцій Z_ν систему рівнянь

$$Z_\nu(x,\rho) = -\frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{k0\nu s}(x,\xi,\rho)A_{s0}(\xi)Z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)dB_{sp}(\xi)Z_{n-s}(\xi,\rho) -$$

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\sum_{s=2}^{n}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)A_{0p}(\xi)A_{s0}(\xi)Z_{n-s}(\xi,\rho)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\rho}\sum_{p=2}^{m}\int_a^b \mathcal{K}_{kp\nu 0}(x,\xi,\rho)A_{0p}(\xi)Z_n(\xi,\rho)d\xi.$$

За допомогою функцій $Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)$ і $\mathcal{U}_{sp}(x)$ останню рівність можна записати в компактнішій формі

$$Z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho}\sum_{p=0}^{2m}\sum_{s=0}^{n}\int_a^b Q_{kp\nu s}(x,\xi,\rho)d\mathcal{U}_{sp}(\xi)Z_{n-s}(\xi,\rho).$$

Поклавши $m(\rho) = \max|z_{\nu ij}(x,\rho)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\nu = \overline{0, r-1}$, $i, j = \overline{1, l}$, і використавши лему 5, отримаємо оцінки кожного елемента матриці $Z_\nu(x,\rho)$

$$|z_{\nu ij}(x,\rho)| \leqslant \frac{D_1}{|\rho|} \sum_{p=0}^{2m} \sum_{s=0}^{n} \int_a^b |\rho|^{2-p-s} \, |du_{spij}(\xi)| \, m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \leqslant m(\rho) D_2/|\rho|$, де D_1, D_2 – сталі.

Для великих значень $|\rho|$ ця нерівність можлива лише тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_{\nu ij}(x,\rho) = 0$. Звідси можна зробити висновок, що $Y \equiv 0$. Теорему доведено.

3.2. Асимптотика власних значень крайової задачі

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [65].

3.2.1. Сингулярний квазідиференціальний оператор. Квазідиференціальний вираз $\hat{L}_{mn}(\mathbf{y})$ і крайові умови

$$\hat{U}_\nu(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{r-1} \Gamma_{\nu j} \mathbf{y}^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_{\nu j} \mathbf{y}^{[j]}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \tag{3.37}$$

де $\Gamma_{\nu j}$, $\Delta_{\nu j}$ – сталі матриці l-го порядку, породжують квазідиференціальний оператор $\hat{L}$ з областю визначення

$$D(\hat{L}) = \Big\{ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{[k]}(x) \in AC\Big([a,b]; \mathbb{C}^l\Big), \ k = \overline{0, n-1},$$
$$\mathbf{y}^{[s]}(x) \in BV^+\Big([a,b]; \mathbb{C}^l\Big), \ s = \overline{n, r-1}, \ \hat{U}_\nu(\mathbf{y}) = 0, \ \nu = \overline{1, r} \Big\},$$

який діє з простору $BV^+\left([a,b]; \mathbb{C}^l\right)$ в простір векторів-мір.

Крайові умови (3.37) можна переписати у матричному вигляді

$$\hat{U}_\nu(Y) = 0, \quad \nu = \overline{1, r} \tag{3.38}$$

або

$$W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0, \tag{3.39}$$

де блочні матриці W_a, W_b мають вигляд $W_a = (\Gamma_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$, $W_b = (\Delta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{r}$, а матриця $\mathcal{Y}$ подається формулою (3.6).

3.2.2. Регулярні крайові умови. Розглянемо лінійні форми $\hat{U}_\nu(\mathbf{y})$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$. Число k назвемо *порядком* форми $\hat{U}_\nu(\mathbf{y})$, якщо ця форма містить хоча б один з векторів $\mathbf{y}^{[k]}(a)$ і $\mathbf{y}^{[k]}(b)$, але не містить векторів $\mathbf{y}^{[\nu]}(a)$ і $\mathbf{y}^{[\nu]}(b)$ для $\nu > k$. Розглянемо форми порядку $r-1$, якщо такі є; вони мають вигляд

$$\hat{U}_\nu(\mathbf{y}) = \Gamma_{\nu,r-1}\mathbf{y}^{[r-1]}(a) + \Delta_{\nu,r-1}\mathbf{y}^{[r-1]}(b) + \ldots$$

Прямокутна матриця $(\Gamma_{\nu,r-1}, \Delta_{\nu,r-1})$ має m рядків і $2m$ стовпців. Але максимальна кількість лінійно незалежних рядків з $2m$ елементів дорівнює $2m$; тому, замінюючи їх, за необхідності, лінійними комбінаціями, можна досягти того, що максимальне число форм порядку $r-1$ буде меншим або рівним 2. Решта форм має порядок менший або рівний $r-2$; застосовуючи до форм порядку $r-2$ той самий прийом, зведемо їх число до мінімуму і т. д.

Цю операцію називають *нормуванням крайових умов*, а самі умови – *нормованими*. Таким чином, за допомогою нормування крайові умови (3.37) можна подати у вигляді

$$\hat{U}_\nu(\mathbf{y}) \equiv \hat{U}_{\nu a}(\mathbf{y}) + \hat{U}_{\nu b}(\mathbf{y}) = 0, \tag{3.40}$$

де

$$\hat{U}_{\nu a}(\mathbf{y}) = \Gamma_\nu \mathbf{y}^{[k_\nu]}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\Gamma}_{\nu j}\mathbf{y}^{[j]}(a), \tag{3.41}$$

$$\hat{U}_{\nu b}(\mathbf{y}) = \Delta_\nu \mathbf{y}^{[k_\nu]}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\Delta}_{\nu j}\mathbf{y}^{[j]}(b), \tag{3.42}$$

$r-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r \geqslant 0$, $k_{s+2} < k_s$, $s = \overline{1, r-2}$, $\nu = \overline{1, r}$, причому для кожного значення індексу ν хоча б одна з матриць Γ_ν, Δ_ν відрізняється від нульової.

Означення 3.9. При r непарному ($r = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (3.40) назвемо *регулярними* для розглядуваної задачі (3.2), (3.40), якщо числа θ_0 і θ_l, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l =$$
$$= \begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \Delta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_r^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \Delta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_r\omega_1^{k_r} & \cdots & \Gamma_r\omega_{\mu-1}^{k_r} & (\Gamma_r + s\Delta_r)\omega_\mu^{k_r} & \Delta_r\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & \Delta_r\omega_r^{k_r} \end{vmatrix}, \tag{3.43}$$

відрізняються від нуля. При r парному ($r = 2\mu$) нормовані крайові умови (3.40) називатимемо *регулярними* для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-l} і θ_l, що визначаються рівністю

$$\frac{\theta_{-l}}{s^l} + \ldots + \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = \det(A, B), \tag{3.44}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\Gamma_1 + \frac{1}{s}\Delta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\Gamma_2 + \frac{1}{s}\Delta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_r\omega_1^{k_r} & \cdots & \Gamma_r\omega_{\mu-1}^{k_r} & (\Gamma_r + s\Delta_r)\omega_\mu^{k_r} & \left(\Gamma_r + \frac{1}{s}\Delta_r\right)\omega_{\mu+1}^{k_r} \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} \Delta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_r^{k_1} \\ \Delta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_r\omega_{\mu+2}^{k_r} & \cdots & \Delta_r\omega_r^{k_r} \end{pmatrix}.$$

Означення регулярності 3.9 є аналогічним до означення регулярності в [76, с. 120–121] та [42, с. 203–205], лише з тією різницею, що тут воно формулюється в термінах квазіпохідних, а не звичайних похідних. Це означення не залежить від вибору області $\mathcal{S}$, за допомогою якої були занумеровані числа ω_j. Останнє твердження доводиться так само, як і в [76].

Мають місце наступні властивості регулярних умов, які доводяться аналогічно до [76, с. 67–69].

1. Корені рівняння

$$\theta_0 + \theta_1 \xi + \ldots + \theta_l \xi^l = 0 \tag{3.45}$$

не змінюються при переході від $\mathcal{S}_q$ до $\mathcal{S}'_q$, при $q = q' \pmod 2$.

2. При зміні індексу області $\mathcal{S}_q$ на парний доданок корені рівняння

$$\theta_{-l} \xi^{-l} + \ldots + \theta_l \xi^l = 0 \tag{3.46}$$

(відповідного регулярним крайовим умовам) не змінюються; при переході від парного q до непарного вони змінюють свої значення на обернені.

3.2.3. Асимптотика власних значень. Для крайової задачі (3.2), (3.40) можна встановити, що при регулярних для неї крайових умовах множина власних значень є зліченною, а асимптотична поведінка великих за модулем власних значень залежить лише від чисел θ_j, $j = -l, -l+1, \ldots, l$. Ми будемо вважати (не уточнюючи цього в умові теореми заради лаконічності), що матричні коефіцієнти векторного рівняння (3.2) задовольняють накладені на них у пункті 3.1.1 умови.

Теорема 3.2. *Нехай $\hat{L}$ – квазідиференціальний оператор, породжений квазідиференціальним виразом $\hat{L}_{mn}(\mathbf{y})$ і регулярними крайовими умовами* (3.40).

При непарному r кожному простому кореню $\xi_j^{(1)}$ рівняння (3.45) *для сектора $\mathcal{S}_q$ з парним q, а також кожному простому кореню $\xi_j^{(2)}$ рівняння* (3.45) *для сектора $\mathcal{S}_q$ з непарним q, відповідає послідовність власних значень відповідно $\lambda_{kj}^{(1)}$ і $\lambda_{kj}^{(2)}$, причому*

$$\begin{cases} \lambda_{kj}^{(1)} = \left(\mp \frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \mp \frac{r \ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \\ \lambda_{kj}^{(2)} = \left(\pm \frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \pm \frac{r \ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{3.47}$$

Тут верхній знак відповідає $r = 4g - 1$, *а нижній –* $r = 4g + 1$; $\ln_0 \xi$ *– деяке фіксоване значення натурального логарифма*: $k = N+1, N+2, \ldots$; $N \in \mathbb{N}$ – *достатньо велике число.*

У випадку p*-кратних коренів* $\xi_j^{(1)}$ *або* $\xi_j^{(2)}$ *отримуються* p *послідовностей власних значень, що задовольняють асимптотичні формули*

$$\begin{cases} \lambda_{kj}^{(1)} = \left(\mp\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \mp \frac{r\ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \\ \lambda_{kj}^{(2)} = \left(\pm\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \pm \frac{r\ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \end{cases} \tag{3.48}$$

$$j = j_0, j_0+1, \ldots, j_0+p-1,$$

причому $\xi_{j_0}^{(\gamma)} = \ldots = \xi_{j_0+p-1}^{(\gamma)}$, $\gamma = 1, 2$. *Вибір знаку в* (3.48) *підпорядкований тому самому правилу, що й у формулах* (3.47).

При парному r *кожному простому кореню* ξ *рівняння* (3.46) *для області* $\mathcal{S}_0$ *відповідає послідовність власних значень*

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \mp \frac{r\ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{3.49}$$

де верхній знак відповідає $r = 4g$, *а нижній –* $r = 4g+2$. *При переході до області* $\mathcal{S}_q$ *з парним* q *формула* (3.49) *не змінюється; для області* $\mathcal{S}_q$, *де* q *– непарне, в* (3.49) *потрібно* ξ *замінити на* ξ^{-1}.

Кожному p*-кратному кореню* ξ *рівняння* (3.46) *відповідає* p *послідовностей власних значень*

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^r \left[1 \mp \frac{r\ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \quad j = \overline{1,p}, \tag{3.50}$$

з вибором знаку за попереднім правилом.

У випадку кратного кореня ξ *деякі з* λ_{kj}, *відповідні цьому* ξ, *можуть збігтися, утворюючи одне кратне власне значення. При* $|\lambda|$ *досить великому оператор* $\hat{L}$ *не має ніяких інших власних значень і кратність власного значення* λ_{kj} *дорівнює числу власних значень з формул* (3.48), (3.50), *які збігаються з ним,* *а отже, не перевищує кратності відповідного кореня* ξ *рівнянь* (3.45), (3.46).

Доведення здійснюється аналогічно доведенню теорем 2.2, 2.26 з використанням теореми 3.1, причому застосовується той самий метод доведення, що і в [76, с. 74–83, с. 121–122].

Розглянемо випадок непарного r. Нехай $r = 2\mu - 1$, а ρ визначається за формулою $\lambda = (-1)^{m+1}\rho^r$. Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2r$ секторів $\mathcal{S}_q$ і $\mathcal{T}_q$ (так само, як це робиться в пункті 3.1.3). Нехай числа ω_j (різні корені r-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{T}$ виконується ланцюг нерівностей (2.25).

Покладемо
$$\tilde{\rho}_j = (\rho + c)\omega_j, \quad j = \overline{1, r}.$$

Так само, як і в теоремі 2.2, можна показати, що мають місце формули (2.76), (2.77). Отже, для $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$, $e^{\tilde{\rho}_j}$ експоненціально прямує до нуля, якщо $j < \mu$, і до безмежності, якщо $j > \mu$.

Згідно з теоремою 3.1 матричне квазідиференціальне рівняння (3.4), відповідне векторному рівнянню (3.2), має r лінійно незалежних розв'язків $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_r(x)$, які для великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, подаються разом зі своїми квазіпохідними формулами (3.29). Складемо з їх допомогою визначник $\hat{\Delta}(\lambda) = \det(\hat{U}_\nu(Y_j))$, $\nu, j = \overline{1, r}$. Відомо, що власні значення є нулями $\hat{\Delta}(\lambda)$.

Підставивши вирази (3.29) в нормовані форми $\hat{U}_\nu(\mathbf{y})$ ((3.41), (3.42)), отримаємо

$$\hat{U}_{\nu a}(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, R_\nu[\Gamma_\nu],$$
$$\hat{U}_{\nu b}(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, R_\nu e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu],$$

де R_ν подаються формулами (3.24), $[A] = A + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ при $|\rho| \to \infty$. Звідси
$$\hat{U}_\nu(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\, R_\nu\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu]\}.$$

У випадку $j < \mu$ функція $e^{\rho\omega_j(b-a)} = e^{-c\omega_j(b-a)}e^{\tilde{\rho}_j(b-a)}$ експоненціально спадає при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathcal{T}$; отже,

$$\hat{U}_\nu(Y_j) = \begin{cases} R_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], & j < \mu, \\ R_\nu(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\}, \\ R_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu], & j > \mu. \end{cases} \tag{3.51}$$

Підставимо всі ці вирази в рівняння

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \det(\hat{U}_\nu(Y_j)) = 0$$

і скоротимо на спільні множники $\rho^{k_1}R_1$, $\rho^{k_2}R_2$, $\ldots$, $\rho^{k_r}R_r$ рядків і $e^{\rho\omega_{\mu+1}(b-a)}$, $e^{\rho\omega_{\mu+2}(b-a)}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_r(b-a)}$ останніх стовпців визначника $\hat{\Delta}(\lambda)$. Тоді це рівняння запишеться у вигляді

$$\hat{\Delta}_0 = \det(A, B) = 0, \tag{3.52}$$

де блочні матриці A і B мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} [\Gamma_1]\omega_1^{k_1} & \cdots & [\Gamma_1]\omega_{\mu-1}^{k_1} & [\Gamma_1 + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_1]\omega_\mu^{k_1} \\ [\Gamma_2]\omega_1^{k_2} & \cdots & [\Gamma_2]\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\Gamma_2 + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_2]\omega_\mu^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\Gamma_r]\omega_1^{k_r} & \cdots & [\Gamma_r]\omega_{\mu-1}^{k_r} & [\Gamma_r + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_r]\omega_\mu^{k_r} \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

$$B = \begin{pmatrix} [\Delta_1]\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & [\Delta_1]\omega_r^{k_1} \\ [\Delta_2]\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & [\Delta_2]\omega_r^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [\Delta_r]\omega_{\mu+1}^{k_r} & \cdots & [\Delta_r]\omega_r^{k_r} \end{pmatrix}.$$

Згідно з визначенням чисел $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_l$ у формулі (3.43) з (3.53) випливає, що

$$[\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\theta_1] + e^{2\rho\omega_\mu(b-a)}[\theta_2] + \ldots + e^{l\rho\omega_\mu(b-a)}[\theta_l] = 0,$$

тобто ми приходимо до рівняння

$$[\theta_0] + [\theta_1]\xi + \ldots + [\theta_l]\xi^l = 0, \tag{3.54}$$

в якому внаслідок регулярності крайових умов $\theta_0 \neq 0$, $\theta_l \neq 0$. Тоді

$$\rho = \tfrac{1}{\omega_\mu(b-a)}\left\{\ln_0 \xi_j + 2k\pi i + O\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.55}$$

де ξ_j – корені рівняння (3.54).

Покладемо

$$\rho_{kj} = \frac{1}{\omega_\mu(b-a)}\{2k\pi i + \ln_0 \xi_j\};$$

тоді співвідношення (3.55) перепишуться у вигляді

$$\rho = \rho_{kj} + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так само, як у теоремі 2.2, встановлюється, що числа ρ_k розташовані паралельно бісектрисі області $\mathcal{T}$, причому у випадку $r = 4q - 1$ для області $\mathcal{T}$ з парним індексом слід брати $k > 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом потрібно брати $k < 0$; у випадку $r = 4q + 1$ навпаки: для області $\mathcal{T}$ з парним індексом необхідно брати $k < 0$, а для області $\mathcal{T}$ з непарним індексом $k > 0$.

Опишемо тепер навколо кожної точки ρ_{kj} коло A_{kj} одного й того самого радіуса $p/(b-a)$, де $p < \pi$. Повторивши міркування теорем 2.2 і 2.26 та застосувавши теорему Руше, можна побачити, що для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, рівняння (3.54) може мати нулі лише всередині A_{kj}, причому стільки, скільки їх там має рівняння (3.45). Звідси, після врахування кратності коренів ξ_j і піднесення до r-го степеня формул (3.55), отримується твердження теореми у випадку непарного r.

Випадок парного r розглядається аналогічно наведеним вище міркуванням та міркуванням з другої частини доведення теорем 2.2 і 2.26. Теорему доведено.

3.2.4. Асимптотика власних функцій. Користуючись теоремами 3.1 і 3.2, можна встановити асимптотичну поведінку власних функцій. Власна функція має задовольняти крайову задачу (3.2), (3.40) і відповідати власному значенню, її можна подати у вигляді

$$\mathbf{y} = Y_1\mathbf{c}_1 + Y_2\mathbf{c}_2 + \ldots + Y_r\mathbf{c}_r,$$

де $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, …, $Y_r(x)$ – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (3.4), визначена за допомогою теореми 3.1. З системи

$$\sum_{j=1}^{r} \hat{U}_\nu(Y_j)\mathbf{c}_j = 0, \quad \nu = \overline{1, r},$$

визначають нетривіальні розв'язки – вектор-стовпці $\mathbf{c}_j$. За допомогою методу Гаусса, надаючи вільним невідомим вектор-функціям $\mathbf{c}_j$ деяких значень, визначають решту $\mathbf{c}_j$ і знаходять $\mathbf{y}$. У випадку простих власних значень побудову власних функцій можна провести безпосереднім узагальненням скалярного випадку.

Таким чином, асимптотичні формули для i-го елемента власних функцій $\mathbf{y}_k(x) = \mathrm{colon}(y_{k1}(x), y_{k2}(x), \ldots, y_{kl}(x))$, відповідних простим власним значенням λ_k, можна подати у вигляді визначників lr-го порядку, які отримують з детермінанта $\hat{\Delta}(\lambda) = \det(\hat{U}_\nu(Y_j))_{\nu,j=1}^{r}$ шляхом заміни в ньому першого (звичайного, а не блочного) рядка на i-й рядок прямокутної матриці $(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_r(x))$, де $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, …, $Y_r(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.4), що задовольняє асимптотичні формули (3.29).

3.3. Функція Ґріна крайової задачі

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [68].

3.3.1. Спряжені крайові умови. Розглянемо вираз $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$ і здиференціюємо його, скориставшись формулами (3.7), (3.10):

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})' = (\mathcal{Z}^*)'\,\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}' = -\left((\mathcal{B}^*)'\,\mathcal{Z}\right)^*\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} =$$
$$= -\mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(\mathcal{Z}^*)'\,\mathcal{Y}$ і $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}'$ є коректними на підставі того факту, що Y, $Y^{[1]}$, …,

$Y^{[n-1]}$, Z, $Z^{\{1\}}$, $\ldots$, $Z^{\{m-1\}}$ – матриці, що складаються з абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, а $Y^{[n]}$, $Y^{[n+1]}$, $\ldots$, $Y^{[r-1]}$, $Z^{\{m\}}$, $Z^{\{m+1\}}$, $\ldots$, $Z^{\{r-1\}}$ – матриці, компоненти яких є функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації. Отже, $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$ є сталою величиною і тому

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})|_a^b = 0 \tag{3.56}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\sum_{j=1}^{r} Z^{*\{r-j\}}(b)Y^{[j-1]}(b) - \sum_{j=1}^{r} Z^{*\{r-j\}}(a)Y^{[j-1]}(a) = 0.$$

За допомогою останньої рівності, аналогічно скалярному випадку, можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $\hat{U}_1(Y), \hat{U}_2(Y), \ldots, \hat{U}_r(Y)$ довільними формами $\hat{U}_{r+1}(Y)$, $\hat{U}_{r+2}(Y)$, $\ldots$, $\hat{U}_{2r}(Y)$ до лінійно незалежної системи $2r$ лінійних форм. Тоді систему

$$\hat{U}_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{r-1} \Gamma_{\nu j} Y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_{\nu j} Y^{[j]}(b), \quad \nu = \overline{1, 2r},$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $Y^{[q]}(a)$, $Y^{[q]}(b)$, які визначаються через $\hat{U}_1(Y), \ldots, \hat{U}_{2r}(Y)$. Підставивши отримані $Y^{[q]}(a)$, $Y^{[q]}(b)$ $(q = \overline{0, r-1})$ в білінійну форму в лівій частині рівності (3.56), ми отримаємо, що

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2r} \mathcal{A}_\nu(\xi)\mathcal{B}_\nu(\eta),$$

де $\eta = \big(Y^{[q]}(a), Y^{[q]}(b)\big)$, $\xi = \big(Z^{*\{q\}}(a), Z^{*\{q\}}(b)\big)$, $q = \overline{0, r-1}$, а $\mathcal{B}_\nu(\eta) = \hat{U}_\nu(Y)$. Позначимо $\mathcal{A}_{2r}(\xi) = \hat{V}_1(Z)$, $\ldots$, $\mathcal{A}_1(\xi) = \hat{V}_{2r}(Z)$. Очевидно, що для того щоб виконувалась рівність (3.56), повинні мати місце співвідношення

$$\hat{V}_\nu(Z) = 0, \quad \nu = \overline{1, r}, \tag{3.57}$$

де

$$\hat{V}_\nu(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Gamma}_{\nu j} Z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Delta}_{\nu j} Z^{\{j\}}(b), \quad \nu = \overline{1, r},$$

які ми назвемо *спряженими крайовими умовами* до умов (3.37) (оскільки крайові умови дорівнюють нулю, можна перенести комплексне спряження з Z на матрицю сталих коефіцієнтів при ньому). Спряжені крайові умови можна записувати й у векторному вигляді $\hat{V}_\nu(\mathbf{z}) = 0$, $\nu = \overline{1, r}$.

Зауваження. Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (3.39), то крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$\mathcal{Z}^*(a) W_a^{-1} + \mathcal{Z}^*(b) W_b^{-1} = 0. \tag{3.58}$$

Справді, з рівності (3.39), якщо $|W_a| \neq 0$, маємо

$$\mathcal{Y}(a) = -W_a^{-1} W_b \mathcal{Y}(b).$$

Підставивши отриманий вираз у (3.56), отримаємо співвідношення

$$\mathcal{Z}^*(b)\mathcal{Y}(b) + \mathcal{Z}^*(a) W_a^{-1} W_b \mathcal{Y}(b) = 0,$$

звідки при $|W_b| \neq 0$ випливає (3.58).

Спряжений квазідиференціальний вираз $\hat{L}^*_{mn}(z)$ і спряжені крайові умови (3.57) породжують квазідиференціальний оператор $\hat{L}^*$, який є спряженим до $\hat{L}$. Квазідиференціальний оператор $\hat{L}^*$ має область визначення

$$D(\hat{L}^*) = \Big\{ \mathbf{z} : \mathbf{z}^{\{k\}} \in AC\Big([a,b]; \mathbb{C}^{l\times 1}\Big), k = \overline{0, m-1},$$
$$\mathbf{z}^{\{s\}} \in BV^+\Big([a,b]; \mathbb{C}^{l\times 1}\Big), \ s = \overline{m, r-1}, \ \ \hat{V}_\nu(z) = 0, \ \nu = \overline{1, r} \Big\}$$

і діє з простору $BV^+([a,b]; \mathbb{C})$ у простір мір.

3.3.2. Функція Ґріна крайової задачі. Розглянемо тепер неоднорідне векторне квазідиференціальне рівняння

$$\hat{L}_{mn}(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}', \tag{3.59}$$

де $\mathbf{f}$ – вектор-стовпець, усі компоненти якого є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a, b]$ варіації, а також асоційоване йому матричне рівняння

$$\hat{L}_{mn}(Y) = \lambda Y + F', \tag{3.60}$$

де матриця $F(x)$ складається з l стовпців $\mathbf{f}(x)$. Неоднорідне рівняння (3.60) за допомогою введення прямокутної матриці $\mathcal{Y}$ (див. пункт 3.1.1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}', \tag{3.61}$$

де $\mathcal{F}(x) = (0, \ldots, 0, -F(x))^T$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta\mathcal{B}(x)\Delta\mathcal{F}(x) \equiv 0$ (див. [114, с. 9]).

Побудуємо матричну функцію Ґріна крайової задачі (3.59), (3.37). Нехай $K(x, t, \lambda)$ – матриця-функція Коші однорідного рівняння (3.4). Відомо [114, с. 21, 124, с. 146, с. 156], що $K(x, a, \lambda)$, $K^{*\{1\}*}(x, a, \lambda)$, ..., $K^{*\{r-1\}*}(x, a, \lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (3.60) можна записати у вигляді

$$Y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{r} K^{*\{k-1\}*}(x, a, \lambda)C_k + \int_a^x K(x, t, \lambda)dF(t). \tag{3.62}$$

Оскільки

$$Y^{[j]}(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{r} K^{[j]*\{k-1\}*}(x, a, \lambda)C_k + \int_a^x K^{[j]}(x, t, \lambda)dF(t)$$

$(j = \overline{1, r})$, підстановка формули (3.62) в крайові умови (3.38) дає рівності

$$\hat{U}_\nu(Y) = \sum_{k=1}^{r} \hat{U}_\nu\Big(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\Big)C_k +$$
$$+\sum_{j=0}^{r-1} \Delta_{\nu j} \int_a^b K^{[j]}(b,t,\lambda)dF(t), \quad \nu=\overline{1,r}, \tag{3.63}$$

що можна записати у вигляді $\mathcal{W}\tilde{C} + \tilde{B} = 0$, де $\tilde{C} = (C_1,\dots,C_r)^T$, $\tilde{B}$ – прямокутна матриця порядку $rl\times l$, $\mathcal{W} = (\hat{U}_\nu(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)))_{\nu,k=1}^{r}$. У припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (3.4), (3.38), визначник системи (3.63) відрізняється від нуля $\hat{\Delta}(\lambda) \equiv \det \mathcal{W} \neq 0$. Тоді сталі матриці C_k можуть бути визначені з системи (3.63) єдиним чином:

$$C_k = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} \frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\int_a^b K^{[j]}(b,t,\lambda)dF(t), \quad k=\overline{1,r},$$

де $W_{\nu k}$ $(\nu, k = \overline{1,r})$ – матриця l-го порядку, транспонована до складеної з алгебричних доповнень елементів матриці $\hat{U}_\nu\left(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\right)$, тобто

$$\mathcal{W}^{-1} = \frac{1}{\hat{\Delta}(\lambda)}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} & \cdots & W_{r1} \\ W_{12} & W_{22} & \cdots & W_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{1r} & W_{2r} & \cdots & W_{rr} \end{pmatrix}.$$

Підставивши ці значення C_k у формулу (3.62), отримаємо

$$Y(x,\lambda) = \int_a^x K(x,t,\lambda)dF(t) -$$
$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\int_a^b K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}\Delta_{\nu j}}{\hat{\Delta}(\lambda)}K^{[j]}(b,t,\lambda)dF(t),$$

Означення 3.10. Матричний вираз

$$G(x,t,\lambda) = P(x,t,\lambda) -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{r-1} K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda) \frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \Delta_{\nu j} K^{[j]}(b,t,\lambda), \tag{3.64}$$

де

$$P(x,t,\lambda) = \begin{cases} K(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \tag{3.65}$$

будемо називати *функцією Ґріна* крайової задачі (3.59), (3.37).

З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Ґріна. Як видно з наступної теореми, ця матриця-функція Ґріна, яка будується лише за допомогою матриці-функції Коші однорідного рівняння та її мішаних квазіпохідних, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [76, с. 115–116]).

Теорема 3.3. *Розв'язок задачі* (3.59), (3.37), *у припущенні, що* λ *не є її власним значенням, можна отримати у вигляді*

$$\mathbf{y}(x) = \int_a^b G(x,t,\lambda) d\mathbf{f}(t), \tag{3.66}$$

де матриця-функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ *подається формулою* (3.64) *і має наступні властивості:*

1) *квазіпохідні за першою змінною* $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0, n-1})$ *є неперервними матрицями-функціями двох змінних* x, t *і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*

2) *квазіпохідні* $G^{[k]}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{n, r-1})$ *мають обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по* t*;*

3) $G(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t), (t,b]$ *по* x *задовольняє рівняння* (3.4)*;*

4) $G(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови* (3.38)*;*

5) *при* $x = t$ *матриця-функція* $G(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda) - G^{[k]}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k = \overline{0,n-1};$$

$$G^{[n+s]}(t+0,t,\lambda) - G^{[n+s]}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,s+1}(t) K^{(i)*\{k-1\}*}(t,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\times$$

$$\times K^{[j]}(b,t,\lambda), \quad s = \overline{0,m-2};$$

$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda) - G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= E - \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i,m}(t) K^{(i)*\{k-1\}*}(t,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\times$$

$$\times K^{[j]}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Формула (3.66) була вже доведена вище. Внаслідок того, що матриці-функції $K^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{1,r})$ є розв'язками матричного рівняння (3.4) за змінною x, для них має місце твердження 3.1, тобто всі елементи матриць-функцій $K^{[s]*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{1,r})$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a,b]$ для $s = \overline{0,n-1}$ і неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації для $s = \overline{n,r-1}$. Згідно з наслідком [112] матриці-функції $K^{*[i]}(x,t,\lambda)$ $(i = \overline{0,r-1})$ є розв'язками спряженого квазідиференціального рівняння (3.11) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 3.2, зокрема всі елементи матричних функцій $K^{*[i]}(x,t,\lambda)$ $(i = \overline{0,r-1})$ будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a,b]$. Згідно з формулою (3.64) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$G^{[s]}(x,t,\lambda) = P^{[s]}(x,t,\lambda) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} K^{[s]*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\hat{\beta}_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $G(x,t,\lambda)$. Для доведення пункту 5) використовуються співвідношення

$$K^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)=\sum_{q=1}^{r}Y_q(x,\lambda)C_{qk}(t,\lambda),\quad k=\overline{1,r}, \tag{3.67}$$

які випливають з того факту, що всі $K^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (3.4); $Y_q(x)$, $q=\overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.4). Тоді, внаслідок рівності (3.9), ми маємо

$$K^{[n+s]*\{k-1\}*}(t+0,a,\lambda)-K^{[n+s]*\{k-1\}*}(t-0,a,\lambda)=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}\left(Y_q^{[n+s]}(t+0,\lambda)-Y_q^{[n+s]}(t-0,\lambda)\right)C_{qk}(a,\lambda)=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta B_{n-i,s+1}(t)Y_q^{[i]}(t,\lambda)C_{qk}(a,\lambda)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta B_{n-i,s+1}(t)K^{(i)*\{k-1\}*}(t,a,\lambda),\quad k=\overline{1,r},\ \ s=\overline{0,m-1},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta B_{ij}(x)=0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, властивість 5) набуває «класичного» вигляду

$$G^{[k]}(t+0,t,\lambda)-G^{[k]}(t-0,t,\lambda)=0,\quad k=\overline{0,r-2};$$

$$G^{[r-1]}(t+0,t,\lambda)-G^{[r-1]}(t-0,t,\lambda)=E.$$

Зауваження 2. Матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda)=(-1)^{rl}\frac{1}{\hat{\Delta}(\lambda)}\begin{pmatrix}Q_{11}&\cdots&Q_{1l}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ Q_{l1}&\cdots&Q_{ll}\end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

де

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) =$$
$$= \begin{vmatrix} K_{i1}(x,a,\lambda) & \cdots & K_{il}^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda) & P_{ij}(x,t,\lambda) \\ \hat{U}_1(K_{11}(x,a,\lambda)) & \cdots & \hat{U}_1(K_{1l}^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)) & \hat{U}_1(P_{1j}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_r(K_{l1}(x,a,\lambda)) & \cdots & \hat{U}_r(K_{ll}^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)) & \hat{U}_r(P_{lj}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{3.69}$$

$K_{ij}(x,t,\lambda)$ – елементи матриці $K(x,t,\lambda)$, $P_{ij}(x,t,\lambda)$ – елементи матриці $P(x,t,\lambda)$.

Справді, позначивши через $\tilde{W}_{\nu kpq}$ і $W_{\nu kpq}$ відповідно доповнюючий мінор і алгебричне доповнення у визначнику $\hat{\Delta}(\lambda)$ елемента $\hat{U}_\nu(K_{pq}^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda))$, ми отримаємо, розписавши (3.69) за елементами останнього стовпця і першого рядка,

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) = (-1)^{rl} P_{ij}(x,t,\lambda)\hat{\Delta}(\lambda) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{p=1}^{l} (-1)^{rl+(\nu-1)l+p}\, \hat{U}_\nu(P_{pj}(x,t,\lambda)) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{r}\sum_{q=1}^{l} K_{iq}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)(-1)^{(k-1)l+q+1}\tilde{W}_{\nu kpq}. \tag{3.70}$$

Тепер, врахувавши формулу (3.65), неважко від (3.68) прийти до рівності (3.64).

3.3.3. Розв'язувальне ядро задачі (3.61), (3.39). Розв'язок задачі (3.61), (3.39), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матриці-функції Ґріна задачі (3.61), (3.39)) і прямокутної матриці $\mathcal{F}$. Цей результат буде необхідним для подальших досліджень властивостей функції Ґріна задачі (3.59), (3.37).

Для задачі (3.61), (3.39) має місце формула (див. [114])

$$\mathcal{Y}(x) = \Phi(x,a)\mathcal{Y}(a) + \int_a^x \Phi(x,t)\,d\mathcal{F}(t), \tag{3.71}$$

де $\Phi(x,t)=\Phi(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця системи (3.7); вона зображується у вигляді $\Phi(x,t,\lambda)=R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ – інтегральна матриця системи (3.7). Ми можемо записати рівність (3.71) наступним чином:

$$\mathcal{Y}(x)=R(x,\lambda)C+\int\limits_a^x \Phi(x,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t), \tag{3.72}$$

де $C=R^{-1}(a,\lambda)\mathcal{Y}(a)$ – прямокутна матриця. Підставивши (3.72) в умови (3.39), внаслідок того, що $|W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)|\neq 0$ (оскільки λ не є власним значенням крайової задачі), можна отримати вираз для матриці C

$$C=-\left\{W_aR\left(a,\lambda\right)+W_bR\left(b,\lambda\right)\right\}^{-1}\int\limits_a^b W_b\Phi\left(b,t,\lambda\right)d\mathfrak{F}(t),$$

а тому (3.72) запишеться у вигляді

$$\mathcal{Y}(x)=\int\limits_a^x \Phi(x,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t)-$$

$$-R(x,\lambda)\left\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\right\}^{-1}\int\limits_a^b W_b\Phi(b,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t).$$

Оскільки

$$R(x,\lambda)\left\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\right\}^{-1}=$$

$$=\left\{W_aR(a,\lambda)R^{-1}(x,\lambda)+W_bR(b,\lambda)R^{-1}(x,\lambda)\right\}^{-1},$$

ми одержимо формулу

$$\mathcal{Y}(x)=\int\limits_a^b M(x,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t), \tag{3.73}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} \Phi(x,t,\lambda) + \Omega_1(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \Omega_1(x,t,\lambda), & x < t \end{cases}$$

є квадратною матрицею порядку lr, а

$$\Omega_1(x,t,\lambda) = -\left\{W_a\Phi(a,x,\lambda) + W_b\Phi(b,x,\lambda)\right\}^{-1} W_b\Phi(b,t,\lambda).$$

3.3.4. Зв'язок між функціями Ґріна спряжених крайових задач. Нехай $H(x,t,\lambda)$ – матриця-функція Ґріна спряженої крайової задачі

$$\hat{L}^*_{mn}(Z) = \bar{\lambda}Z + \hat{F}' \qquad (3.74)$$

з крайовими умовами (3.57) (оператора $\hat{L}^* - \bar{\lambda}I$), де матриця $\hat{F}$ складається з l стовпців $\hat{\mathbf{f}}(x)$, усі компоненти яких є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації. Вона будується за допомогою матриці-функції Коші $K(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння (3.4) та її мішаних квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого квазідиференціальних рівнянь.

Теорема 3.4. *Розв'язок задачі*

$$\hat{L}^*_{mn}(\mathbf{z}) = \bar{\lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{f}}',$$

$$\hat{V}_\nu(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Gamma}_{\nu j}\mathbf{z}^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Delta}_{\nu j}\mathbf{z}^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r},$$

в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді

$$\mathbf{z}(x) = \int_a^b H(x,t,\lambda)d\hat{\mathbf{f}}(t), \qquad (3.75)$$

де матриця-функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ має вигляд

$$H(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}(x,t,\lambda) + K(t,x,\lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases} \qquad (3.76)$$

$$\hat{\Omega}(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} K^{*[k-1]}(a,x,\lambda)\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}K^{\{j\}}(t,b,\lambda),$$

фігурними дужками тут позначаються квазіпохідні в сенсі рівняння (3.11) за першою змінною, а квадратними – в сенсі спряженого до (3.11) рівняння (3.4) за другою змінною, $\hat{W}_{\nu k}$ $(\nu, k = \overline{1,r})$ *– матриця* l*-го порядку, транспонована до складеної з алгебричних доповнень визначника*

$$\Delta_1(\lambda) \equiv \det\Big(\hat{V}_\nu\Big(K^{*[k-1]}(a,x,\lambda)\Big)\Big)_{\nu,k=1}^{r}$$

до елементів матриці $\hat{V}_\nu\big(K^{*[k-1]}(a,x,\lambda)\big)$.

Матриця-функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ *має наступні властивості:*

1) *квазіпохідні за першою змінною* $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0,m-1})$ *є неперервними матрицями-функціями двох змінних* x, t *і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*

2) *квазіпохідні* $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{m,r-1})$ *мають обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по* t;

3) $H(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t),(t,b]$ *по* x *задовольняє однорідне рівняння (3.11);*

4) $H(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови (3.57);*

5) *для* $x=t$ *матриця-функція* $H(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$H^{\{k\}}(t+0,t,\lambda) - H^{\{k\}}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k=\overline{0,m-1};$$

$$H^{\{m+s\}}(t+0,t,\lambda) - H^{\{m+s\}}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1} \Delta B^{*}_{s+1,m-i}(t)K^{(i)*[k-1]}(a,t,\lambda)\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}\times$$

$$\times K^{\{j\}}(t,b,\lambda), \quad s=\overline{0,n-2};$$

$$H^{\{r-1\}}(t+0,t,\lambda) - H^{\{r-1\}}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= E + \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{m-1} \Delta B^{*}_{n,m-i}(t)K^{(i)*[k-1]}(a,t,\lambda)\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}\times$$

$$\times K^{\{j\}}(t,b,\lambda).$$

Доведення. Теорема доводиться аналогічно теоремам 3.3 і 2.6. Відомо [114, с. 21, 124, с. 146], що матриці-функції $K^*(a,x,\lambda)$, $K_t^{*[1]}(a,x,\lambda)$, ..., $K_t^{*[r-1]}(a,x,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.11) і розв'язок рівняння (3.74) можна подати у вигляді

$$Z(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} K_t^{*[k-1]}(a,x,\lambda)C_k + \int\limits_a^x K(t,x,\lambda)d\hat{F}(t). \qquad (3.77)$$

Оскільки

$$Z^{\{j\}}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{r} K_{xt}^{\{j\}*[k-1]}(a,x,\lambda)C_k +$$
$$+\int\limits_a^x K_x^{\{j\}}(t,x,\lambda)d\hat{F}(t), \quad j=\overline{1,r},$$

підстановка (3.77) в крайові умови (3.57) дасть рівності

$$\hat{V}_\nu(Z) = \sum_{k=1}^{r} \hat{V}_\nu\Big(K_t^{*[k-1]}(a,x,\lambda)\Big)C_k +$$
$$+\sum_{j=0}^{r-1}\hat{\Delta}_{\nu j}\int\limits_a^b K_x^{\{j\}}(t,b,\lambda)d\hat{F}(t), \quad \nu=\overline{1,r}, \qquad (3.78)$$

що можна записати у вигляді $\hat{\mathcal{W}}\tilde{C}+\tilde{B}=0$, де $\tilde{C} = (C_1,\ldots,C_r)^T$, $\tilde{B}$ – прямокутна матриця порядку $rl\times l$, $\hat{\mathcal{W}} = (\hat{V}_\nu(K^{*[k-1]}(a,x,\lambda)))_{\nu,k=1}^r$. В припущенні, що λ не є власним значенням крайової задачі (3.11), (3.57), визначник системи (3.78) відрізняється від нуля $\Delta_1(\lambda)\equiv\det\hat{\mathcal{W}}\neq 0$. Тоді сталі матриці C_k можуть бути визначені з системи (3.78) єдиним чином:

$$C_k = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}\int\limits_a^b K^{\{j\}}(t,b,\lambda)d\hat{F}(t), \quad k=\overline{1,r},$$

де $\hat{W}_{\nu k}$ $(\nu, k = \overline{1, r})$ – матриця l-го порядку, транспонована до складеної з алгебричних доповнень визначника $\Delta_1(\lambda)$ до елементів матриці $\hat{V}_\nu\left(K^{*[k-1]}(x, a, \lambda)\right)$, тобто

$$\hat{\mathcal{W}}^{-1} = \frac{1}{\Delta_1(\lambda)} \begin{pmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{21} & \cdots & \hat{W}_{r1} \\ \hat{W}_{12} & \hat{W}_{22} & \cdots & \hat{W}_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{W}_{1r} & \hat{W}_{2r} & \cdots & \hat{W}_{rr} \end{pmatrix}.$$

Підставивши ці значення C_k у формулу (3.77), отримаємо

$$Z(x, \lambda) = \int\limits_a^x K(t, x, \lambda) d\hat{F}(t) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{r-1} \int\limits_a^b \frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)} \hat{\Delta}_{\nu j} K_t^{*[k-1]}(a, x, \lambda) K^{\{j\}}(t, b, \lambda) d\hat{F}(t).$$

Позначивши матричну функцію Ґріна $H(x, t, \lambda)$ формулою (3.76), ми прийдемо до формули (3.75).

Внаслідок того, що матриці-функції $K_t^{*[k-1]}(t, x, \lambda)$ $(k = \overline{1, r})$ є розв'язками рівняння (3.11) за змінною x, для них має місце твердження 3.2, тобто всі елементи матричних функцій $K_{tx}^{\{s\}*[k-1]}(t, x, \lambda)$ є абсолютно неперервними по x на проміжку $[a, b]$ для $s = \overline{0, m-1}$ і є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a, b]$ варіації для $s = \overline{m, r-1}$. Згідно з наслідком [112] функції $K_x^{*\{i\}}(t, x, \lambda)$ $(i = \overline{0, r-1})$ є розв'язками квазідиференціального рівняння (3.4) за змінною t. Отже, для них має місце твердження 3.1, зокрема всі елементи матриць-функцій $K_x^{*\{i\}}(t, x, \lambda)$ $(i = \overline{0, r-1})$ будуть абсолютно неперервними за змінною t на проміжку $[a, b]$. Згідно з формулою (3.76) квазіпохідні функції Ґріна мають вигляд

$$H_x^{\{s\}}(x, t, \lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x, t, \lambda) + K_x^{\{s\}}(t, x, \lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x, t, \lambda), & x < t, \end{cases}$$

причому

$$\hat{\Omega}_x^{\{s\}}(x,t,\lambda) =$$
$$= -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\hat{W}_{\nu k}}{\Delta_1(\lambda)} \hat{\Delta}_{\nu j} K_{xt}^{\{s\}*[k-1]}(a,x,\lambda) K_x^{\{j\}}(t,b,\lambda),$$

звідки випливає виконання пунктів 1) і 2) теореми.

Властивості 3) і 4) теореми мають місце за самою побудовою функції $H(x,t,\lambda)$. Залишилось довести пункт 5). Для цього розглянемо співвідношення

$$K_t^{*[k-1]}(t,x,\lambda) = \sum_{q=1}^{r} Z_q(x,\lambda) C_{qk}(t,\lambda), \quad k = \overline{1,r},$$

які випливають з того факту, що всі $K_t^{*[k-1]}(t,x,\lambda)$ є розв'язками рівняння (3.11); $Z_q(x)$, $q = \overline{1,r}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.11). Тоді, внаслідок рівності (3.14), ми маємо

$$K_{xt}^{\{m+s\}*[k-1]}(a,t+0,\lambda) - K_{xt}^{\{m+s\}*[k-1]}(a,t-0,\lambda) =$$
$$= \sum_{q=1}^{r} \Big(Z_q^{\{m+s\}}(t+0,\lambda) - Z_q^{\{m+s\}}(t-0,\lambda) \Big) C_{qk}(a,\lambda) =$$
$$= -\sum_{q=1}^{r}\sum_{i=0}^{m-1} \Delta B_{s+1,m-i}^{*}(t) Z_q^{\{i\}}(t,\lambda) C_{qk}(a,\lambda) =$$
$$= -\sum_{i=0}^{m-1} \Delta B_{s+1,m-i}^{*}(t) K_{xt}^{(i)*[k-1]}(a,t,\lambda), \ \ k = \overline{1,r}, \ s = \overline{0,n-1},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Теорема 3.5. *Для $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням крайової задачі (3.59), (3.37), функції Ґріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda) = H^{*}(t,x,\lambda).$$

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ – функції Ґріна спряжених крайових задач

$$L_{mn}(Y) - \lambda Y = -F_1(x), \tag{3.79}$$

$$U_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{r-1} \Gamma_{\nu j} Y^{[j]}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \Delta_{\nu j} Y^{[j]}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{3.80}$$

$$L^*_{mn}(Z) - \bar{\lambda} Z = F_2(x), \tag{3.81}$$

$$V_\nu(Z) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Gamma}_{\nu j} Z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{r-1} \hat{\Delta}_{\nu j} Z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{3.82}$$

відповідно, де $F_1(x)$, $F_2(x)$ – неперервні на $[a,b]$ матриці, які складаються з l однакових стовпчиків вигляду $\mathbf{f}_1(x)$ і $\mathbf{f}_2(x)$. Ці задачі внаслідок введення прямокутних матриць $\mathcal{Y} = \left(Y, Y^{[1]}, \ldots, Y^{[r-1]}\right)^T$ і $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{r-1\}}, \ldots, Z^{\{1\}}, Z\right)^T$ зводяться до задач

$$\begin{cases} \mathcal{Y}' = \mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}_1, \\ W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{Z}' = -\left(\mathcal{B}^*\right)'\mathcal{Z} + \mathcal{F}_2, \\ \hat{W}_a\mathcal{Z}(a) + \hat{W}_b\mathcal{Z}(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де

$$\mathcal{F}_1(x) = (0, \ldots, 0, F_1(x))^T, \quad \mathcal{F}_2(x) = (F_2(x), 0, \ldots, 0)^T,$$

а W_a, W_b, $\hat{W}_a$, $\hat{W}_b$ – числові матриці порядку $rl \times rl$.

Оскільки добутки $(\mathcal{Z}^*)'\mathcal{Y}$ і $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}'$ коректні, то

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})' = (\mathcal{Z}^*)'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}' =$$
$$= -\mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{F}_1 = \mathcal{Z}^*\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2^*\mathcal{Y}.$$

З іншого боку, враховуючи спосіб побудови крайових умов спряженої крайової задачі (3.57) і повторивши міркування з доведення теореми 2.7, можна переконатись у правильності рівності (3.56) для неоднорідних спряжених крайових задач (3.79)–(3.82). Тоді

$$\int_a^b \left(\mathcal{Z}^*(x)\mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2^*(x)\mathcal{Y}(x)\right) dx = 0.$$

Згідно з формулою (3.73)

$$\mathcal{Y}(x) = \int\limits_a^b M(x,t,\lambda)\mathcal{F}_1(t)dt, \quad \mathcal{Z}(t) = \int\limits_a^b N(t,x,\lambda)\mathcal{F}_2(x)dx,$$

враховуючи (3.66), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка блочної матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює $-G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка блочної матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b N(t,x,\lambda)\mathcal{F}_2(x)dx\right)^* \mathcal{F}_1(t)dt +$$

$$+ \int\limits_a^b \mathcal{F}_2^*(x) \int\limits_a^b M(x,t,\lambda)\mathcal{F}_1(t)dtdx =$$

$$= \int\limits_a^b \int\limits_a^b \mathcal{F}_2^*(x)\left\{N^*(t,x,\lambda) + M(x,t,\lambda)\right\}\mathcal{F}_1(t)dxdt = 0,$$

тобто

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b \mathbf{f}_2^*(x)\left\{H^*(t,x,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right\}\mathbf{f}_1(t)dxdt = 0. \tag{3.83}$$

Нехай

$$G(x,t,\lambda) = \left(g_{ij}(x,t,\lambda)\right)_{i,j=1}^l, \quad H(x,t,\lambda) = \left(h_{ij}(x,t,\lambda)\right)_{i,j=1}^l,$$

$\mathbf{f}_1(x) = (f_{11},\ldots,f_{1l})^T$, $\mathbf{f}_2(x) = (f_{21},\ldots,f_{2l})^T$, (x_0,t_0) – будь-яка точка області $a \leqslant x,\ t \leqslant b,\ x \neq t$. Довільно виберемо оточуючий її маленький прямокутник Δs зі сторонами $t = t_0 \pm \Delta t$ і $x = x_0 \pm \Delta x$ і такі вектор-функції $\mathbf{f}_1(t)$ і $\mathbf{f}_2(x)$, щоб $f_{1j}(t) \equiv 0$ для $j \neq j_0$, $f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs, $f_{1,j_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs, $f_{2i}(t) \equiv 0$ для

$i \neq i_0$, $f_{2,i_0}(t) \neq 0$ в Δs, $f_{2,i_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs. Для цього вибору рівняння (3.83) буде еквівалентним

$$\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_{2,i_0}(x)\Big[\overline{h_{j_0,i_0}(t,x,\lambda)} - g_{i_0,j_0}(x,t,\lambda)\Big] f_{1,j_0}(t)dxdt = 0,$$

і, оскільки $f_{2,i_0}(x)f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs, очевидно, вираз у квадратних дужках перетворюється в нуль десь у цій області. Нехай Δx і Δt прямують до нуля. Тоді в границі ми будемо мати $\overline{h_{j_0,i_0}(t_0,x_0,\lambda)} = g_{i_0,j_0}(x_0,t_0,\lambda)$ і внаслідок довільності вибору векторів $\mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{f}_2(x)$ і точок x_0, t_0 $(x_0 \neq t_0)$ отримаємо твердження теореми.

3.3.5. Аналітична природа функції Ґріна у випадку простих полюсів. Оскільки, внаслідок того, що матриці-функції $K^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)$ є цілими аналітичними по λ, чисельник і знаменник у формулі (3.64) є цілими аналітичними матрицею-функцією і скалярною функцією параметра λ, функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ задачі (3.59), (3.37) є матричною мероморфною функцією параметра λ; її полюсами можуть бути лише власні значення крайової задачі (3.2), (3.37).

Нехай λ_0 – простий нуль функції $\hat{\Delta}(\lambda)$. Тоді λ_0 може бути лише простим полюсом функції $G(x,t,\lambda)$, отже

$$G(x,t,\lambda) = \frac{R(x,t)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x,t,\lambda), \tag{3.84}$$

де $R(x,t)$, $G_1(x,t,\lambda)$ – квадратні матриці l-го порядку, $G_1(x,t,\lambda)$ регулярна в околі точки λ_0. Якщо λ_0 взагалі не є особливою точкою функції $G(x,t,\lambda)$, то будемо вважати $R(x,t) = 0$.

Згідно з відомою формулою теорії лишків

$$R(x,t) = (-1)^r \frac{Q(x,t,\lambda_0)}{\hat{\Delta}'(\lambda_0)},$$

де $Q(x,t,\lambda)$ визначається формулою (3.69). Очевидно, що $R(x,t)$ як лінійна комбінація розв'язків (3.4) за (3.67), за першою змінною задовольняє рівняння $\hat{L}_{mn}(R) - \lambda_0 R = 0$. За побудовою

$Q(x,t,\lambda_0)$, а отже, і $R(x,t)$ при фіксованому t задовольняє крайові умови (3.38).

Таким чином, кожен стовпчик $R(x,t)$ – власна функція крайової задачі (3.2), (3.37), відповідна власному значенню λ_0. Але оскільки λ_0 – простий нуль функції $\hat{\Delta}(\lambda)$, йому відповідає з точністю до множника, що не залежить від x, лише одна власна функція $\mathbf{y}_0(x)$ оператора $\hat{L}$. Отже,

$$R(x,t) = \mathbf{y}_0(x)A(t). \tag{3.85}$$

де $A(t)$ – вектор-рядок. Врахувавши теорему 3.5 і формулу (3.84), для функції Ґріна $H(x,t,\lambda)$ оператора $\hat{L}^* - \bar{\lambda}I$ будемо мати

$$H(x,t,\lambda) = \frac{R^*(t,x)}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0} + G_1^*(t,x,\lambda).$$

Тому кожен стовпчик $R^*(t,x)$ за фіксованого t є власною функцією оператора $\hat{L}^*$, що відповідає власному значенню $\bar{\lambda}_0$. Позначивши через $\mathbf{z}_0(x)$ одну з таких вектор-функцій, матимемо

$$R^*(t,x) = \mathbf{z}_0(x)B(t),$$

де $B(t)$ – вектор-рядок, або

$$R(x,t) = B^*(x)\mathbf{z}_0^*(t).$$

Врахувавши (3.85), отримаємо рівність

$$R(x,t) = c\mathbf{y}_0(x)\mathbf{z}_0^*(t). \tag{3.86}$$

Залишається визначити сталу c.

Врахувавши (3.86) і помноживши (3.84) на $\mathbf{y}_0(t)$ та зінтегрувавши це співвідношення по t, одержимо рівність

$$(\lambda - \lambda_0)\int\limits_a^b G(x,t,\lambda)\mathbf{y}_0(t)dt = c\mathbf{y}_0(x)\int\limits_a^b \mathbf{z}_0^*(t)\mathbf{y}_0(t)dt +$$

$$+ (\lambda - \lambda_0)\int\limits_a^b G_1(x,t,\lambda)\mathbf{y}_0(t)dt. \tag{3.87}$$

Інтеграл в останньому доданку є однозначною аналітичною функцією параметра λ в околі точки λ_0. Тоді

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G(x,t,\lambda)\mathbf{y}_0(t)dt = c\mathbf{y}_0(x)\int_a^b \mathbf{z}_0^*(t)\mathbf{y}_0(t)dt.$$

З іншого боку,

$$(\hat{L}-\lambda I)\mathbf{y}_0 = (\lambda_0-\lambda)\mathbf{y}_0,$$

звідки

$$(\hat{L}-\lambda I)^{-1}\mathbf{y}_0 = \frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathbf{y}_0.$$

Оскільки $G(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $\hat{L}-\lambda I$, то, врахувавши, що для сумовної вектор-функції $\mathbf{g}(t)=\mathbf{f}'(t)$ вираз $d\mathbf{f}(t)$ у формулі (3.66) перетворюється у $\mathbf{g}(t)dt$, останню рівність можна переписати у вигляді

$$\int_a^b G(x,t,\lambda)\mathbf{y}_0(t)dt = \frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathbf{y}_0(x).$$

Підставивши її в (3.87), отримаємо, що

$$-\mathbf{y}_0(x) = c\mathbf{y}_0(x)\int_a^b \mathbf{z}_0^*(t)\mathbf{y}_0(t)dt;$$

звідси можна визначити c і, підставивши його в (3.86), прийти до рівності

$$R(x,t) = -\frac{\mathbf{y}_0(x)\mathbf{z}_0^*(t)}{\int_a^b \mathbf{z}_0^*(\tau)\mathbf{y}_0(\tau)d\tau}.$$

Пронормуємо функції $\mathbf{y}_0(x)$ і $\mathbf{z}_0(x)$ так, щоб

$$\int_a^b \mathbf{z}_0^*(\tau)\mathbf{y}_0(\tau)d\tau = 1. \tag{3.88}$$

Тоді (3.84) запишеться у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{\mathbf{y}_0(x)\mathbf{z}_0^*(t)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x,t,\lambda). \tag{3.89}$$

3.4. Розвинення за власними функціями

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботах [63], [161].

3.4.1. Структура функції Коші та її квазіпохідних. У задачах не лише прикладного, але й теоретичного характеру можна зіткнутись з проблемою побудови функції Коші та її змішаних квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого рівнянь через відому фундаментальну систему розв'язків та її квазіпохідні. Відповідь на це питання дають дві наступні теореми.

Теорема 3.6. *Нехай* $Y_1(x), \ldots, Y_r(x)$ – *будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного квазідиференціального рівняння* (3.4),

$$W(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_r(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{[r-1]}(t) & \cdots & Y_r^{[r-1]}(t) \end{vmatrix}$$

– *квазівронскіан цього рівняння, а* $V_{ij}(t)$ – *матриця, транспонована до матриці, складеної з алгебричних доповнень у визначнику* $W(t)$ *до елементів матриці* $Y_j^{[i-1]}(t)$. *Тоді матрицю-функцію Коші* $K(x,t)$ *рівняння* (3.4) *і її мішані квазіпохідні в сенсі вихідного і спряженого рівнянь можна зобразити у вигляді*

$$K^{*\{j\}*[i]}(x,t) = \frac{1}{W(t)} \sum_{k=1}^{r} Y_k^{[i]}(x) V_{r-j,k}(t), \quad i,j = \overline{0, r-1}. \tag{3.90}$$

Доведення. Нехай

$$R(x) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_r(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{[r-1]}(t) & \cdots & Y_r^{[r-1]}(t) \end{pmatrix}$$

– інтегральна матриця рівняння (3.4). Тоді $B(x,t) = R(x)R^{-1}(t)$ – еволюційний оператор, який має структуру [112]

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} K^{*\{r-1\}*}(x,t) & \cdots & K(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{*\{r-1\}*[r-1]}(x,t) & \cdots & K^{[r-1]}(x,t) \end{pmatrix}. \tag{3.91}$$

Матрицю (3.91) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} K^{*\{r-1\}*}(x,t) & \cdots & K(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K^{*\{r-1\}*[r-1]}(x,t) & \cdots & K^{[r-1]}(x,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_r(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{[r-1]}(t) & \cdots & Y_r^{[r-1]}(t) \end{pmatrix} \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} V_{11}(t) & \cdots & V_{r1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1r}(t) & \cdots & V_{rr}(t) \end{pmatrix},$$

звідки випливає (3.90), що й завершує доведення теореми.

Теорема 3.7. *Нехай $Y_1(x)$, ..., $Y_r(x)$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного рівняння* (3.4). *Позначимо через $y_{ipqj}(x)$ елемент, який знаходиться на перетині p-го рядка і q-го стовпця матриці $Y_j^{[i-1]}(x)$, тобто $Y_j^{[i-1]}(x) = (y_{ipqj}(x))_{p,q=1}^{l}$ $(i,j = \overline{1,r})$. Тоді матриця-функція Коші рівняння* (3.4) *і її змішані квазіпохідні є квадратними матрицями l-го порядку, кожен елемент яких подається відношенням визначника, який відрізняється від квазівронскіана $W(t)$ лише одним рядком, до $W(t)$:*

$$K_{pq}^{*\{j\}*[i]}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_{1111}(t) & \cdots & y_{11l1}(t) & \cdots & y_{11lr}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1l11}(t) & \cdots & y_{1ll1}(t) & \cdots & y_{1llr}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{r-j,q-1,11}(t) & \cdots & y_{r-j,q-1,l1}(t) & \cdots & y_{r-j,q-1,lr}(t) \\ y_{i+1,p11}(x) & \cdots & y_{i+1,pl1}(x) & \cdots & y_{i+1,plr}(x) \\ y_{r-j,q+1,11}(t) & \cdots & y_{r-j,q+1,l1}(t) & \cdots & y_{r-j,q+1,lr}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{rl11}(t) & \cdots & y_{rll1}(t) & \cdots & y_{rllr}(t) \end{vmatrix}, \tag{3.92}$$

$$i, j = \overline{0, r-1}, \quad p, q = \overline{1, l}.$$

Тут «нестандартний» рядок з залежними від x функціями знаходиться на $((r-j-1)l+q)$-му місці зверху, а елемент $K_{pq}^{*\{j\}*[i]}(x,t)$ розташований на перетині p-го рядка і q-го стовпця матриці $K^{*\{j\}*[i]}(x,t)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.6 має місце рівність (3.90), розпишемо її покоординатно

$$K_{pq}^{*\{j\}*[i]}(x,t) = \frac{1}{W(t)} \sum_{k=1}^{r} \sum_{g=1}^{l} y_{i+1,pqk}(x) A_{r-j,qgk}(t) = \frac{M_{ipqj}(x,t)}{W(t)},$$

де $M_{ipqj}(x,t)$ – визначник з чисельника правої частини формули (3.92), $A_{r-j,qgk}(t)$ – алгебричне доповнення у визначнику $W(t)$ елемента $y_{r-j,qgk}(t)$, $p,q = \overline{1,l}$, $i,j = \overline{1,r}$. Теорему доведено.

Залежний від x рядок знаходиться у визначнику з чисельника правої частини формули (3.92) на q-му місці в $(r-j)$-й смузі зверху, хоча він взятий з p-го місця в $(i+1)$-й смузі зверху у визначнику $W(x)$. Фактично, це означає, що навіть при $j \neq 0$ $K^{*\{j\}*[i]}(x,t)$ залежить лише від елементів матриць $Y_1(x)$, …, $Y_r(x)$, $Y_1(t)$, …, $Y_r(t)$ і їхніх квазіпохідних у сенсі вихідного рівняння (3.4).

3.4.2. Оцінка матричної функції Ґріна. Будемо вважати, не втрачаючи загальності, що $\hat{L}\mathbf{y} = 0$ лише при $\mathbf{y} = 0$. Дійсно, в протилежному випадку достатньо замінити $\hat{L}_{mn}(\mathbf{y})$ виразом

$\hat{L}_{mn}(\mathbf{y}) - c\mathbf{y}$, де c – довільне число, відмінне від усіх власних значень оператора $\hat{L}$. Таке число існує, бо згідно з теоремою 3.2 цей оператор має лише зліченну множину власних значень. Нехай $G(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $\hat{L} - \lambda I$; оператор $\hat{L}$ має матрицю-функцію Ґріна $G(x,t) = G(x,t,0)$.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \dots$, зі спільним центром у початку координат, що мають наступні властивості: 1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає для $k \to \infty$; 2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ власних значень оператора $\hat{L}$ при відображенні

$$\lambda = (-1)^{m+1}\rho^r \tag{3.93}$$

знаходяться для досить великих k на відстані не меншій δ від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Аналогічно пункту 2.5.1 розглядається також інтеграл

$$I_k(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,t,\lambda)}{\lambda} d\lambda;$$

застосовуючи до нього теорему про лишки, отримуємо

$$I_k(x,t) = G(x,t) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}, \tag{3.94}$$

де $Q_\nu(x,t)$ – лишок матриці-функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який ми припускатимемо простим), а m_k – число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 3.8. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k кожен елемент матриці-функції $G(x,t,\lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)| \leqslant M\,|\lambda|^{-\frac{r-1}{r}}, \tag{3.95}$$

де M – деяка стала.

Доведення здійснюється подібно до скалярного випадку (теорема 2.8). За відповідного вибору $\arg\rho$ при відображенні (3.93) коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $2\pi/r$, що проходить у двох сусідніх областях $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного r.

1) r – непарне; $r = 2\mu - 1$. Нехай згідно з твердженням 2.5 числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ (різні корені r-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{S}_0$ виконується ланцюг нерівностей (2.25) (c тут дорівнює 0). Тоді згідно з формулами (2.76), (2.77), які доведені в теоремі 2.2, для $\rho \in \mathcal{S}_0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_r) \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.96}$$

Нехай γ_k' – та частина дуги γ_k, яка знаходиться в області $\mathcal{S}_0$ і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а γ_k'' – та її частина, яка теж знаходиться в цій області і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$. Оцінимо функцію $G_{ij}(x,t,\lambda)$ на дузі γ_k', скориставшись формулами (3.68), (3.69), (3.65).

Врахувавши формули (3.67) і їх наслідки

$$\hat{U}_\nu(K^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)) = \sum_{j=1}^{r} \hat{U}_\nu(Y_j(x,\lambda))C_{jk}(t,\lambda), \quad k = \overline{1,r},$$

ми можемо записати

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_1(Y_1) & \cdots & \hat{U}_1(Y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_r(Y_1) & \cdots & \hat{U}_r(Y_r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \hat{U}_1(K(x,t,\lambda)) & \cdots & \hat{U}_1(K^{*\{r-1\}*}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_r(K(x,t,\lambda)) & \cdots & \hat{U}_r(K^{*\{r-1\}*}(x,t,\lambda)) \end{pmatrix},$$

де $Y_k = (y_{kij})_{i,j=1}^{l}$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків. Тепер, оскільки подібна рівність матиме місце і для визначників замість матриць, бо детермінант добутку матриць дорівнює добутку їхніх детермінантів, отримаємо, що $\hat{\Delta}(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(\hat{U}_\nu(Y_k)\right)_{\nu,k=1}^{r}, \quad C(\lambda) = \det\left(C_{\nu k}\right)_{\nu,k=1}^{r}.$$

Аналогічно, поряд з рівністю

$$P_{i,j}(-1)^{rl}\begin{pmatrix}\hat{U}_1(Y_1) & \cdots & \hat{U}_1(Y_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_r(Y_1) & \cdots & \hat{U}_r(Y_r)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ C_{r1} & \cdots & C_{rr}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{l}(-1)^{rl+(\nu-1)l+k}\hat{U}_\nu(P_{kj})\times$$

$$\times\begin{pmatrix}y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ri1} & \cdots & y_{ril}\\ \hat{U}_1(y_{111}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{11l}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{r11}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{r1l})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_\nu(y_{1,k-1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{1,k-1,l}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{r,k-1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{r,k-1,l})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_\nu(y_{1,k+1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{1,k+1,l}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{r,k+1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(y_{r,k+1,l})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_r(y_{1l1}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{1ll}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{rl1}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{rll})\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}c_{1111} & \cdots & c_{1r1l}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{r1l1} & \cdots & c_{rrll}\end{pmatrix}=$$

$$=P_{i,j}(-1)^{rl}\begin{pmatrix}\hat{U}_1(K) & \cdots & \hat{U}_1(K^{*\{r-1\}*})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_r(K) & \cdots & \hat{U}_r(K^{*\{r-1\}*})\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k=1}^{l}(-1)^{rl+(\nu-1)l+k}\hat{U}_\nu(P_{kj})\times$$

$$\times\begin{pmatrix}K_{i1} & \cdots & K_{il} & \cdots & K_{il}^{*\{r-1\}*}\\ \hat{U}_1(K_{11}) & \cdots & \hat{U}_1(K_{1l}) & \cdots & \hat{U}_1(K_{1l}^{*\{r-1\}*})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_\nu(K_{k-1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(K_{k-1,l}) & \cdots & \hat{U}_\nu(K_{k-1,l}^{*\{r-1\}*})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_\nu(K_{k+1,1}) & \cdots & \hat{U}_\nu(K_{k+1,l}) & \cdots & \hat{U}_\nu(K_{k+1,l}^{*\{r-1\}*})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{U}_r(K_{l1}) & \cdots & \hat{U}_r(K_{ll}) & \cdots & \hat{U}_r(K_{ll}^{*\{r-1\}*})\end{pmatrix}$$

$\forall i, j = \overline{1, l}$ можна розглядати і аналогічну рівність з визначниками замість матриць. Права частина цієї рівності дорівнюватиме визначнику $Q_{ij}(x, t, \lambda)$, бо є його розкладом за елементами останнього стовпця, а ліву частину можна подати як добуток $\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda) =$$
$$= \begin{vmatrix} y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ri1} & \cdots & y_{ril} & P_{ij} \\ \hat{U}_1(y_{111}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{11l}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{r11}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{r1l}) & \hat{U}_1(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_1(y_{1l1}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{1ll}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{rl1}) & \cdots & \hat{U}_1(y_{rll}) & \hat{U}_1(P_{lj}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_r(y_{111}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{11l}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{r11}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{r1l}) & \hat{U}_r(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{U}_r(y_{1l1}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{1ll}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{rl1}) & \cdots & \hat{U}_r(y_{rll}) & \hat{U}_r(P_{lj}) \end{vmatrix}. \tag{3.97}$$

Отже,

$$Q_{ij}(x, t, \lambda) = \tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)C(\lambda).$$

Тоді формула (3.68) перепишеться у вигляді

$$G(x, t, \lambda) = (-1)^{rl} \frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \cdots & \tilde{Q}_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{Q}_{r1} & \cdots & \tilde{Q}_{rr} \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

або

$$G_{ij}(x, t, \lambda) = (-1)^{rl} \frac{\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i, j = \overline{1, l}. \tag{3.99}$$

Згідно з теоремами 3.6, 3.7

$$K^{[j]}(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^{r} Y_k^{[j]}(x, \lambda) Z_k(t, \lambda),$$

де кожен елемент матриці l-го порядку $Z_k(t, \lambda) = (z_{kpq}(t, \lambda))_{p,q=1}^{l}$ є відношенням алгебричного доповнення елемента $((r-1)l+q)$-го рядка і $((k-1)l+p)$-го стовпця у квазівронскіані

$$W(t)=\det\left(Y_j^{[i-1]}\right)_{i,j=1}^{r}$$

до самого визначника $W(t)$. Функції Y_j виберемо так, щоб вони разом зі своїми квазіпохідними для достатньо великих $|\rho|$ задовольняли співвідношення (3.29). Підставивши формули (3.29) замість $Y_k^{[\nu]}(t)$ у вираз для $W(t)$, а отже, $Z_k(t,\lambda)$, і скоротивши у кожному елементі цієї матриці чисельник і знаменник на $(\rho R_1)^l$, $(\rho^2R_2)^l$, $\ldots$, $(\rho^{r-2}R_{r-2})^l$, $(\rho^{r-1}R_{r-1})^{l-1}$, $e^{l\rho\omega_s(t-a)}$, $s=\overline{1,r}$, $s\neq k$, $e^{(l-1)\rho\omega_k(t-a)}$, будемо мати

$$Z_k(t,\lambda)=e^{-\rho\omega_k(t-a)}\frac{R_{r-1}}{\rho^{r-1}}\Big[\frac{\gamma_k}{\gamma}\Big], \tag{3.100}$$

де

$$\gamma=\begin{vmatrix} E_l & E_l & \cdots & E_l\\ \omega_1E_l & \omega_2E_l & \cdots & \omega_rE_l\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1^{r-1}E_l & \omega_2^{r-1}E_l & \cdots & \omega_r^{r-1}E_l\end{vmatrix},$$

$\gamma_k=(\gamma_{kpq})_{p,q=1}^{l}$, γ_{kpq} – алгебричне доповнення елемента, що лежить на перетині $((r-1)l+q)$-го рядка і $((k+1)l+p)$-го стовпця у визначнику γ, $[A]=A+O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ при $|\rho|\to\infty$, R_ν подаються формулами (3.24).

За формулою Фробеніуса [19, с. 56], якщо

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

A і D – квадратні матриці, $|A|\neq 0$, то

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1}\\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1}\end{pmatrix},$$

$$H=D-CA^{-1}B.$$

Застосуємо $r-1$ разів формулу Фробеніуса до матриці, відповідної визначнику γ. В якості матриці A в нас щоразу фігуруватиме помножена на скаляр одинична матриця l-го порядку.

Матриця H складатиметься з деякої кількості тих самих блоків, що й вихідна матриця (внаслідок властивостей блочного множення матриць і того, що обернена до одиничної матриці теж є одиничною). На підставі цього, матриця M^{-1} теж складатиметься з r^2 подібних блоків. Тому $\gamma_{kpq} = 0$ для всіх k і $p \neq q$ (внаслідок зв'язку алгебричних доповнень елементів матриці з оберненою до неї).

В той же час, мають виконуватись співвідношення

$$\sum_{k=1}^{r} \omega_k^j \frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, r-2}, \\ 1, & j = r-1, \end{cases} \qquad p = \overline{1, l}.$$

Остання система має єдиний розв'язок; з іншого боку, вона задовольняється при $\gamma_{kpp}/\gamma = -\omega_k/r$, бо $\omega_k^r = -1$. Отже, формула (3.100) набуває вигляду

$$Z_k(t, \lambda) = \frac{R_{r-1}}{r\rho^{r-1}} e^{-\rho\omega_k(t-a)}[-\omega_k E], \quad k = \overline{1, r}. \tag{3.101}$$

Розглянемо матрицю-функцію $G(x, t, \lambda)$ при $x > t$ (у випадку $x < t$ міркування будуть аналогічними); тоді останній елемент першого рядка у визначнику (3.97) буде $K_{ij}(x, t, \lambda)$. Помножимо групи по l стовпців визначника $\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)$, починаючи з $(\mu l + 1)$-го, $((\mu + 1)l + 1)$-го, $\ldots$, $((r-1)l + 1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_{\mu+1}(t)$, $-Z_{\mu+2}(t)$, $\ldots$, $-Z_r(t)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)$ будуть

$$\sum_{k=1}^{\mu} \sum_{g=1}^{l} y_{kig}(x) z_{kgj}(t), \tag{3.102}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} \sum_{g=1}^{l} \hat{U}_{\nu b}(y_{kpg}) z_{kgj}(t) - \sum_{k=\mu+1}^{r} \sum_{g=1}^{l} \hat{U}_{\nu a}(y_{kpg}) z_{kgj}(t),$$
$$\nu = \overline{1, r}, \quad p = \overline{1, l}. \tag{3.103}$$

Підставивши вирази (3.29) в нормовані форми $\hat{U}_\nu(Y)$, матимемо

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\nu a}(Y_j) &= R_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], \\ \hat{U}_{\nu b}(Y_j) &= R_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu], \end{aligned} \tag{3.104}$$

звідки

$$\hat{U}_\nu(Y_j) = \hat{U}_{\nu a}(Y_j) + \hat{U}_{\nu b}(Y_j) = R_\nu(\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$

$\nu, j = \overline{1,n}$. Отже, на підставі нерівностей (3.96) справджуються формули

$$\hat{U}_\nu(Y_s) = \begin{cases} R_\nu(\rho\omega_s)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], & s = \overline{1,\mu-1}, \\ R_\nu(\rho\omega_s)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\}, & s = \mu, \\ R_\nu(\rho\omega_s)^{k_\nu}e^{\rho\omega_s(b-a)}[\Delta_\nu], & s = \overline{\mu+1,r}. \end{cases} \tag{3.105}$$

Підставивши їх у $\tilde{\Delta}(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{r}\rho^{lk_\nu}R_\nu^l\prod_{j=\mu+1}^{r}e^{l\rho\omega_j(b-a)}\sum_{s=0}^{l}[\theta_s]e^{s\rho\omega_\mu(b-a)} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{r}\rho^{lk_\nu}R_\nu^l\prod_{s=\mu+1}^{r}e^{l\rho\omega_s(b-a)}\theta_l\prod_{s=1}^{l}[e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s], \tag{3.106}$$

причому тут θ_s – ті самі, що і в означенні регулярних крайових умов 3.9, а ξ_s – корені рівняння (3.45).

Врахувавши (3.29), (3.101) і (3.104), ми можемо переписати (3.102), (3.103) у вигляді

$$\frac{1}{r\rho^{r-1}}P_0 = \begin{cases} [0], \ i \neq j, \\ -\frac{R_{r-1}}{r\rho^{r-1}}\sum\limits_{k=1}^{\mu}e^{\rho\omega_k(x-t)}[\omega_k], \ i = j, \end{cases}$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}R_\nu}{r\rho^{r-1}}P_{0p} = -\frac{\rho^{k_\nu}R_{r-1}R_\nu}{r\rho^{r-1}}\left\{\sum_{s=1}^{\mu}e^{\rho\omega_s(b-t)}[\omega_s^{k_\nu+1}\Delta_{\nu pj}] - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=\mu+1}^{r}e^{-\rho\omega_s(t-a)}[\omega_s^{k_\nu+1}\Gamma_{\nu pj}]\right\}, \quad \nu = \overline{1,r}, \quad p = \overline{1,l},$$

де $\Gamma_{\nu pj}$, $\Delta_{\nu pj}$ – елементи матриць Γ_ν, Δ_ν.

Підставимо тепер (3.97), (3.29), (3.101), (3.105), (3.106), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ в (3.99) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ наступним чином. На $\rho^{k_\nu} R_\nu$ розділимо $((\nu-1)l+2)$-й, $((\nu-1)l+3)$-й, $\ldots$, $(\nu l+1)$-й рядок, на $e^{\rho\omega_s(b-a)}$ – $((s-1)l+p)$-ті стовпці ($s=\overline{\mu+1,r}$, $p=\overline{1,l}$) і на $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_p]$ поділимо $((\mu-1)l+p)$-ті стовпці відповідно. Тоді формула (3.99) набуде вигляду

$$G_{ij}(x,t,\lambda)=\frac{(-1)^{rl}}{r\rho^{r-1}\theta_l}D,$$

де перший рядок визначника $(rl+1)$-го порядку D має вигляд

$$\Big([0],\ \ldots,\ [0],\ e^{\rho\omega_1(x-a)}[1],\ [0],\ \ldots,\ [0],\ e^{\rho\omega_{\mu-1}(x-a)}[1],\ [0],\ \ldots,$$
$$[0],\ \frac{e^{\rho\omega_\mu(x-a)}[1]}{[e^{\rho\omega_1(b-a)}-\xi_i]},\ [0],\ \ldots,\ [0],\ e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-b)}[1],\ [0],\ \ldots,\ [0],$$
$$e^{\rho\omega_r(x-b)}[1],\ [0],\ \ldots,\ [0],\ P_0\Big),$$

причому відмінні від $[0]$ елементи знаходяться на останньому та $((s-1)l+i)$-тих місцях, а $((\nu-1)l+p+1)$-й рядок побудовано наступним чином:

$$\Big([\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu p1}],\ \ldots,\ [\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}],\ \ldots,\ [\omega_{\mu-1}^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}],$$
$$\frac{\omega_\mu^{k_\nu}[\Gamma_{\nu p1}+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu p1}]}{[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_1]},\ \ldots,\ \frac{\omega_\mu^{k_\nu}[\Gamma_{\nu pl}+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu pl}]}{[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_l]},$$
$$[\omega_{\mu+1}^{k_\nu}\Delta_{\nu p1}],\ \ldots,\ [\omega_r^{k_\nu}\Delta_{\nu pl}],\ P_{\nu p}\Big).$$

Можна так само, як у теоремі 2.8 (стор. 119), показати, що внаслідок регулярності крайових умов знаменник $e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[1]-$ $-[\xi_p]$ $(p=\overline{1,l})$ обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді внаслідок умов (3.96) всі елементи визначника D на дузі γ_k' обмежені зверху, бо експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' має місце нерівність

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)|\leqslant M\,|\rho|^{1-r}, \tag{3.107}$$

де M – деяка стала.

Доведемо тепер, що така сама нерівність виконується і на дугах γ_k''. Для цього достатньо у визначнику $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ помножити групи по l стовпчиків, починаючи з $((\mu-1)l+1)$-го, $(\mu l+1)$-го, $\ldots$, $((r-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_\mu(t)$, $-Z_{\mu+1}(t)$, $\ldots$, $-Z_r(t)$ відповідно і додати до останнього стовпця. Повторивши попередні міркування, легко переконатись у правильності нерівності (3.107) і на дугах γ_k''.

Таким чином, (3.107) доведено для тієї частини дуги γ_k, що лежить у секторі $\mathcal{S}_0$. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області $\mathcal{S}_\nu$, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі $\mathcal{S}_1$. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження теореми для випадку непарного r.

2) r парне; $r = 2\mu$. Завдяки тому, що

$$\hat{U}_\nu(Y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu} R_\nu\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$
$$\hat{U}_\nu(Y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu} R_\nu\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$

цей випадок відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз

$$\theta_l \prod_{s=1}^{2l} [e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s],$$

де ξ_s – корені рівняння (3.46). Тут $((\mu-1)l+s)$-ті стовпці потрібно поділити на $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s]$ $(s = \overline{1,2l})$ відповідно. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними випадку дуги γ_k', бо на дузі γ_k мають місце нерівності $\operatorname{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, $\operatorname{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0$ внаслідок того, що рівняння $\omega^{2\mu}+1=0$ містить поряд з ω_j корінь $-\omega_j$ $(j=\overline{1,r})$. Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми видно, що нерівність (3.95) залишається правильною для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho-\rho_k|<\delta$ при відображенні $\lambda = (-1)^{m+1}\rho^r$.

3.4.3. Розвинення функцій з області визначення оператора $\hat{L}$.

Теорема 3.9. *Функція Гріна $G(x,t)$ квазідиференціального оператора $\hat{L}$, породженого регулярними крайовими умовами* (3.40), *розвивається в рівномірно збіжний відносно x і t з $[a,b]$ ряд*

$$G(x,t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}. \tag{3.108}$$

Доведення. Користуючись теоремою 3.8 і зауваженням до неї, отримуємо оцінки (тут R_k – радіус кола Γ_k)

$$|I_{kij}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R_k^{\overline{\frac{r-1}{r}}} R_k} 2\pi R_k = \frac{M}{R_k^{\overline{\frac{r-1}{r}}}},$$

$$\left| \frac{Q_{kij}(x,t)}{\lambda_k} \right| = \left| \frac{1}{2\pi\lambda_k} \int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} r\rho^{r-1} G_{ij}(x,t,(-1)^{m+1}\rho^r)d\rho \right| \leqslant \frac{rM\delta}{|\lambda_k|},$$
$$i,j = \overline{1,l},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,t) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_k(x,t)}{\lambda_k} = 0, \tag{3.109}$$

причому рівномірно відносно x і t з $[a,b]$. Внаслідок (3.94) і (3.109) буде мати місце формула (3.108), що й доводить теорему.

Теорема 3.10. *Якщо всі власні значення крайової задачі* (3.2), (3.40) *з регулярними крайовими умовами* (3.40) *є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$, то для функції Гріна квазідиференціального оператора $\hat{L}$ за виконання умови нормованості*

$$\int_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)\mathbf{y}_\nu(x)dx = 1 \tag{3.110}$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{y}_\nu(x)\mathbf{z}_\nu^*(t)}{\lambda_\nu}. \tag{3.111}$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,t)$ у теоремі 3.9 – лишок функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення крайової задачі (3.2), (3.40) – прості нулі функції $\hat{\Delta}(\lambda)$, то згідно з формулою (3.89) має місце рівність $-Q_\nu(x,t) = \mathbf{y}_\nu(x)\mathbf{z}^*_\nu(t)$, де $\mathbf{y}_\nu(x)$, $\mathbf{z}_\nu(t)$ – власні функції спряжених операторів $\hat{L}$ і $\hat{L}^*$, відповідні власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$ та пронормовані так, щоб виконувалось співвідношення (3.110). Теорему доведено.

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої вектор-функції $\mathbf{f}(x)$.

Теорема 3.11. *Нехай $\hat{L}$ – оператор, породжений регулярними крайовими умовами і нехай всі його власні значення є простими нулями функції $\hat{\Delta}(\lambda)$. Тоді будь-яка вектор-функція $\mathbf{f}(x)$ з області визначення оператора $\hat{L}$ розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \mathbf{y}_\nu(x), \tag{3.112}$$

де при виконанні умови (3.110)

$$\alpha_\nu = \int_a^b \mathbf{z}^*_\nu(t)\mathbf{f}(t)dt,$$

а $\mathbf{y}_\nu(x)$, $\mathbf{z}_\nu(x)$ – власні функції операторів $\hat{L}$ і $\hat{L}^*$, що відповідають власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $\hat{L}\mathbf{f} = \varphi'$, $\hat{L}^*\mathbf{z}_\nu = \psi'_\nu$, де $\varphi, \psi_\nu \in$ $\in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^l\right)$. Тоді

$$\mathbf{f}(x) = \int_a^b G(x,t)d\varphi(t), \quad \mathbf{z}_\nu(x) = \int_a^b H(x,t)d\psi_\nu(t), \tag{3.113}$$

де $H(x,t)$ – функція Ґріна оператора $\hat{L}^*$. Підставимо в формулу (3.113) замість функції $G(x,t)$ її розвинення (3.108). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, ми можемо його інтегрувати почленно. Отже, справджується формула (3.112), де

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b \mathbf{z}_\nu^*(t)d\varphi(t). \tag{3.114}$$

Оскільки згідно з теоремою 3.5

$$G(x,t) = H^*(t,x),$$

буде виконуватись і рівність

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b G(x,t)d\varphi(t) = \int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b H^*(t,x)d\varphi(t),$$

звідки

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b G(x,t)d\varphi(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b H(x,t)d\psi_\nu(t)\right)^* d\varphi(x).$$

Врахувавши (3.113), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\mathbf{f}(x) = \int\limits_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)d\varphi(x). \tag{3.115}$$

З іншого боку, $\hat{L}^*\mathbf{z}_\nu = \bar{\lambda}_\nu\mathbf{z}_\nu$. Тоді

$$\psi_\nu(x) = \int\limits_a^x \bar{\lambda}_\nu\mathbf{z}_\nu(t)dt.$$

Після підстановки останньої рівності в (3.115) отримаємо з (3.114), що

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\mathbf{f}(x) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b \left(\bar{\lambda}_\nu\mathbf{z}_\nu(x)\right)^*\mathbf{f}(x)dx = \int\limits_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)\mathbf{f}(x)dx,$$

що й потрібно було довести.

3.5. Асимптотика фундаментальної системи розв'язків сингулярного диференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [69].

3.5.1. Постановка задачі. Розглянемо диференціальний вираз

$$\hat{M}_n(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}^{(n)} + A_1(x)\mathbf{y}^{(n-1)} + A_2(x)\mathbf{y}^{(n-2)} + \ldots + A_n(x)\mathbf{y}, \quad (3.116)$$

де $A_1 \equiv 0$, $A_i = B_i'$, $B_i \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $i = \overline{2,n}$, $\mathbf{y}(x)$ – вектор-стовпець. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами. Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $\hat{M}_n(\mathbf{y})$ рівняння

$$\hat{M}_n(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}, \quad (3.117)$$

де λ – комплексний параметр, і початкові умови

$$\mathbf{y}^{(\nu)}(a) = \mathbf{y}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (3.118)$$

Поряд з (3.117), (3.118) розглянемо також матричне диференціальне рівняння і відповідні початкові умови

$$\hat{M}_n(Y) = \lambda Y, \quad (3.119)$$

$$Y^{(\nu)}(a) = \tilde{C}_{\nu+1}, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \quad (3.120)$$

(Y – квадратна матриця l-го порядку). Рівняння (3.119) називатимемо *асоційованим* до рівняння (3.117). Як правило, зручніше оперувати саме з матричними диференціальними рівняннями, а потім вже переходити до векторних. Між векторним (3.117) і асоційованим до нього рівнянням (3.119) існує тісний зв'язок: якщо матриця-функція $Y(x)$ – розв'язок рівняння (3.119), $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^l$ – сталий вектор, то, поклавши $\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{c}$, отримаємо розв'язок векторного диференціального рівняння (3.117).

За допомогою прямокутної матриці

$$\mathcal{Y} = \left(Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}\right)^T \tag{3.121}$$

матричне рівняння (3.119) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'(x)\mathcal{Y} \tag{3.122}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \\ \lambda E - A_n & -A_{n-1} & \cdots & -A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

(тут E – одинична матриця l-го порядку). Умови (3.118) тоді набувають вигляду

$$\mathcal{Y}(a) = \tilde{C},$$

де $\tilde{C} = \left(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n\right)^T$.

Очевидно, що

$$\Delta\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\Delta B_n(x) & \cdots & -\Delta B_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 = 0$, то система (3.122) є коректною (див. пункт 1.2.2 і [104]).

Означення 3.11. Диференціальне рівняння називатимемо *коректним*, якщо буде коректною відповідна йому система.

Означення 3.12. Під *розв'язком* матричного диференціального рівняння будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathcal{Y}(x)$ системи (3.122), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Твердження 3.5 ([114, с. 29]). *Існує єдиний матричний розв'язок $Y(x)$ задачі Коші для рівняння (3.119) такий, що $Y^{(k)} \in AC\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $k=\overline{0,n-2}$, $Y^{(n-1)} \in BV^{+}\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$ і в точках $x_s \in [a,b]$ розривів матриць-функцій $B_i(x)$ має місце стрибок, що визначається формулою*

$$\Delta Y^{(n-1)}(x_s) = -\sum_{i=0}^{n-2} \Delta B_{n-i}(x_s) Y^{(i)}(x_s). \tag{3.123}$$

3.5.2. Спряжені квазіпохідні і функція Коші. Система, спряжена до системи (3.122), має вигляд

$$\mathcal{Z}' = -\left(\mathcal{B}^*(x)\right)' \mathcal{Z}, \tag{3.124}$$

де $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{r-1\}},\ldots,Z^{\{1\}},Z\right)^T$. Фігурними дужками тут позначено квазіпохідні в сенсі спряженого до (3.119) рівняння. З (3.124) безпосередньо видно структуру спряженого рівняння і квазіпохідних у сенсі останнього.

Означення 3.13. *Спряженим* до (3.119) називається матричне квазідиференціальне рівняння

$$\hat{M}_n^*(Z) \equiv (-1)^n Z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (A_i^* Z)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z, \tag{3.125}$$

де $A_i^*(x) = (B_i'(x))^* \quad \forall i=\overline{2,n}$.

Означення 3.14. *Квазіпохідними* виразу $\hat{M}_n^*(Z)$ (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (3.125)) називаються матриці-функції $Z^{\{i\}}(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, що визначаються формулами

$$Z^{\{0\}} \overset{df}{=} Z, \quad Z^{\{i\}} = A_i^* Z - \left(Z^{\{i-1\}}\right)', \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{3.126}$$

Розглянемо тепер рівняння (3.125) з початковими умовами

$$Z^{\{\nu\}}(a) = Z_0^{\{\nu\}}, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{3.127}$$

Твердження 3.6 ([115, с. 29]). *Існує єдиний матричний розв'язок задачі* (3.125), (3.127) *такий, що* $Z \in AC\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, *а квазіпохідні* $Z^{\{k\}} \in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\right)$, $k = \overline{1, n-1}$, *і в точках* $x_s \in [a,b]$ *розривів матриць-функцій* $B_i(x)$ *вони мають стрибки, що визначаються формулами*

$$\Delta Z^{\{k\}}(x_s) = \Delta B_{k+1}(x_s) Z(x_s), \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{3.128}$$

Означення 3.15. Матриця-функція $\tilde{K}(x,t) = \tilde{K}(x,t,\lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (3.117), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a,b]$ задовольняє початкові умови $\tilde{K}^{(i)}(t,t) = 0$ $(i = \overline{0, n-2})$, $\tilde{K}^{(n-1)}(t,t) = E$.

Означення 3.16. Матриця-функція $R(x,t) = R(x,t,\lambda)$ називається *функцією Коші* рівняння (3.125), якщо вона за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = t \in [a,b]$ задовольняє початкові умови $R_x^{\{i\}}(t,t) = 0$ $(i = \overline{0, n-2})$, $R_x^{\{n-1\}}(t,t) = E$.

Твердження 3.7 ([114, с. 16]). *Для матриць-функцій Коші спряжених диференціального і квазідиференціального рівнянь справджується тотожність*

$$R(x,t) \equiv \tilde{K}^*(t,x). \tag{3.129}$$

3.5.3. Побудова матричних інтегро-диференціальних рівнянь. Поклавши $\lambda = -\rho^n$, рівняння (3.119) можна записати у вигляді

$$Y^{(n)} + \rho^n Y = -A_2 Y^{(n-2)} - A_3 Y^{(n-3)} - \ldots - A_n Y. \tag{3.130}$$

Розіб'ємо так само, як і в пункті 2.6.3, комплексну ρ-площину на $2n$ секторів $\mathcal{S}_q = \{\rho : q\pi/n \leqslant \arg\rho \leqslant (q+1)\pi/n\}$, $q = \overline{0, 2n-1}$, аналогічно вводяться сектори $\mathcal{T}_q$ (з вершиною в точці $\rho = -c$).

Матричне рівняння

$$Y^{(n)} + \rho^n Y = 0 \tag{3.131}$$

має фундаментальну систему розв'язків $e^{\rho\omega_1 x}E_l$, $e^{\rho\omega_2 x}E_l$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_n x}E_l$, де $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ – різні корені n-го степеня з -1. Згідно з твердженням 2.5 в кожній області $\mathcal{T}_q$ можна так занумерувати числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, щоб виконувався ланцюг нерівностей (2.25).

Блочну матрицю $\mathcal{B}'(x)$ можна подати у вигляді суми двох матриць

$$\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}_1'(x) + \mathcal{B}_2'(x),$$

де

$$\mathcal{B}_1'(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_l & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & E_l & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & E_l \\ -\rho^n E_l & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -A_n & -A_{n-1} & \cdots & -A_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.132}$$

Тоді система

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}_1'\mathcal{Y} \tag{3.133}$$

буде еквівалентною рівнянню (3.131). Якщо праву частину рівності (3.130) розглядати як «неоднорідність», то згідно з формулою для неоднорідного рівняння

$$Y(a) = \Phi(x,a)Y(a) + \int\limits_a^x \Phi(x,\xi)dB_2(\xi)Y(\xi), \tag{3.134}$$

де $\Phi(x,\xi)$ – еволюційний оператор однорідної системи (3.133); його структура має вигляд [112]

$$\Phi(x,\xi)=\begin{pmatrix} \tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,\xi) & \dots & \tilde{K}(x,\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{K}^{*\{n-1\}*(n-1)}(x,\xi) & \dots & \tilde{K}^{(n-1)}(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{3.135}$$

де $\tilde{K}(x,\xi)$ – матриця-функція Коші рівняння (3.131). Квадратні дужки в (3.135) позначають звичайні похідні за змінною x, а фігурні дужки – квазіпохідні в сенсі спряженого до (3.131) рівняння, які беруться за другою змінною і визначаються формулами

$$Y^{\{0\}}\stackrel{def}{=}Y,\;\; Y^{\{i\}}=-\left(Y^{\{i-1\}}\right)',\;\; i=\overline{1,n-1}. \tag{3.136}$$

Легко перевірити, що матриця-функція Коші для рівняння (3.131) має вигляд

$$\tilde{K}(x,\xi)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)}E_l. \tag{3.137}$$

Справді, вона задовольняє (3.131) по x, $\tilde{K}^{(\nu)}(\xi,\xi)=0$ $(\nu=\overline{0,n-2})$, $\tilde{K}^{(n-1)}(\xi,\xi)=E$, бо $\omega_1^{\nu+1}+\omega_2^{\nu+1}+\ldots+\omega_n^{\nu+1}=0$, а $\omega_j^n=-1$.

Врахувавши формули (3.136), (3.137), отримаємо для $\nu=\overline{0,n-1}$

$$\tilde{K}^{(\nu)}(x,\xi)=\tilde{K}^{*\{\nu\}*}(x,\xi)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}\rho^{\nu}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}E. \tag{3.138}$$

Підставивши (3.132) і (3.135) в (3.134), отримаємо за допомогою блочного множення матриць матричну систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса

$$Y^{(\nu)}(x)=\sum_{s=1}^{n}\tilde{K}^{*\{n-s\}*(\nu)}(x,a)\tilde{C}_s-$$

$$-\sum_{s=2}^{n}\int_a^x\tilde{K}^{(\nu)}(x,\xi)dB_s(\xi)Y^{(n-s)}(\xi),$$

звідки, завдяки формулам (3.137), (3.138), будемо мати

$$
\begin{gathered}
Y^{(\nu)}(x) = -\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n\rho^{s-\nu-1}} \sum_{j=1}^{n} e^{\rho\omega_j(x-a)} \omega_j^{n-s+\nu+1} \tilde{C}_s + \\
+ \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \frac{1}{n\rho^{n-1-\nu}} \sum_{j=1}^{n} e^{\rho\omega_j(x-\xi))} \omega_j^{\nu+1} \times \\
\times dB_s(\xi) Y^{(n-s)}(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1}.
\end{gathered}
$$

Ми можемо підібрати сталі матриці $\tilde{C}_j$ так, щоб справджувалась матрична система інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерри-Стільтьєса ($\nu = \overline{0, n-1}$)

$$
\begin{gathered}
Y^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \rho^{\nu} \omega_j^{\nu} e^{\rho\omega_j x} + \\
+ \frac{\rho^{1-n+\nu}}{n} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} dB_s(\xi) Y^{(n-s)}(\xi). \qquad (3.139)
\end{gathered}
$$

Справді, розписавши покоординатно систему

$$
\begin{cases}
\hat{C}_1 \omega_1^{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + \hat{C}_n = -C_1 n \rho^{n-1} \omega_1^{-1} e^{\rho\omega_1 a}, \\
\ldots \\
\hat{C}_1 \omega_n^{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + \hat{C}_n = -C_n n \rho^{n-1} \omega_n^{-1} e^{\rho\omega_n a},
\end{cases}
$$

за допомогою якої здійснюється перехід від сталих матриць $\tilde{C}_j$ до C_j, ми отримаємо l^2 систем для визначення елементів матриць $\tilde{C}_j$, а їх визначники

$$
\begin{vmatrix}
\omega_1^{n-1}\rho^{n-1} & \ldots & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\omega_n^{n-1}\rho^{n-1} & \ldots & 1
\end{vmatrix}
= \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}
\begin{vmatrix}
\omega_1^{n-1} & \ldots & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\omega_n^{n-1} & \ldots & 1
\end{vmatrix}
$$

при $|\rho| > 0$ відрізняються від нуля як визначники Вандермонда.

Покладемо для деякого фіксованого k, $k = \overline{1, n}$,

$$\hat{C}_j = \begin{cases} C_j, & j = \overline{1, k}, \\ C_j + \sum_{s=2}^{n} \int_a^b \frac{\omega_j e^{-\rho\omega_j\xi}}{n\rho^{n-1}}\, dB_s(\xi) Y^{(n-s)}(\xi), & j = \overline{k+1, n}. \end{cases} \tag{3.140}$$

Тоді рівняння (3.139) запишуться у вигляді ($\nu = \overline{0, n-1}$)

$$Y^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \hat{C}_j \omega_j^{\nu} \rho^{\nu} e^{\rho\omega_j x} +$$
$$+ \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \frac{\partial^{\nu} K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^{\nu}}\, dB_s(\xi) Y^{(n-s)}(\xi) -$$
$$- \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{s=2}^{n} \int_x^b \frac{\partial^{\nu} K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^{\nu}}\, dB_s(\xi) Y^{(n-s)}(\xi), \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{3.141}$$

де

$$K_1(x,\xi,\rho) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)}, \quad K_2(x,\xi,\rho) = \sum_{j=k+1}^{n} \omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)}.$$

3.5.4. Асимптотика розв'язків диференціального рівняння з мірами. У наступній теоремі на основі аналізу матричних інтегро-диференціальних рівнянь (3.141) встановлюються асимптотичні формули для фундаментальної системи розв'язків рівняння (3.119).

Теорема 3.12. *При вищезгаданих умовах на матриці A_i диференціального матричного рівняння (3.130), воно у всій області $\mathcal{T}$ комплексної ρ-площини має n лінійно незалежних матричних розв'язків Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n, регулярних (тобто однозначних аналітичних) відносно $\rho \in \mathcal{T}$ для достатньо великих*

$|\rho|$, *таких, що задовольняють співвідношенням* ($\nu = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{1, n}$)

$$Y_k^{(\nu)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)} \left[\omega_k^\nu E + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{3.142}$$

де $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ *позначає матрицю* $\frac{A(x,\rho)}{\rho}$, *а* $A(x, \rho)$ – *матрична функція, всі елементи якої задовольняють умови* $|A_{ij}(x, \rho)| \leqslant M$ *при* $|\rho| \geqslant R$, $x \in [a, b]$ (*тут* M, R – *деякі сталі числа*).

Доведення. Припустимо, що рівняння (3.130) має такий розв'язок Y_k, що $\hat{C}_\nu = 0$ при $\nu \neq k$, $\hat{C}_k = e^{-\rho\omega_k a}E$. Нехай

$$Y_k^{(\nu)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)} Z_{k\nu}, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{3.143}$$

$$\mathcal{K}_{k\nu s}(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{2-\nu-s} \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}, & \xi \leqslant x, \\ -\frac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{2-\nu-s} \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu}, & \xi > x, \end{cases} \tag{3.144}$$

$$k = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \quad s = \overline{2, n};$$

тоді для матриць-функцій $Z_{k\nu} = (z_{k\nu ij}(x, \rho))_{i,j=1}^l$ ми отримаємо з (3.141) систему інтегральних рівнянь

$$Z_{k\nu}(x, \rho) = \omega_k^\nu E + \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^n \int_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x, \xi, \rho) dB_s(\xi) Z_{k,n-s}(\xi, \rho). \tag{3.145}$$

При фіксованому k і $\nu = \overline{0, n-1}$ (3.145) є системою матричних інтегральних рівнянь відносно функцій $Z_{k\nu}(x, \rho)$ ($\nu = \overline{0, n-1}$). Якщо вона має розв'язок $Z_{k\nu}$, то, скориставшись методом послідовних підстановок, отримаємо

$$
\begin{aligned}
Z_{k\nu}(x,\rho) &= \omega_k^{\nu}E+\frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\omega_k^{n-s}dB_s(\xi)+\ldots\\
&\ldots+\frac{1}{\rho^m}\sum_{s_1,\ldots,s_m=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)dB_{s_1}(\xi_1)\times\ldots\\
&\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_{m-1},s_m}(\xi_{m-1},\xi_m,\rho)dB_{s_m}(\xi_m)\omega_k^{n-s_m}+\\
&+\frac{1}{\rho^{m+1}}\sum_{s_1,\ldots,s_{m+1}=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)dB_{s_1}(\xi_1)\times\ldots\\
&\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_m,s_{m+1}}(\xi_m,\xi_{m+1},\rho)dB_{s_{m+1}}(\xi_{m+1})Z_{k,n-s_{m+1}}(\xi_{m+1},\rho).
\end{aligned}
\tag{3.146}
$$

Розпишемо тепер останню рівність покомпонентно

$$
\begin{aligned}
z_{k\nu ij}(x,\rho) &= \omega_k^{\nu}\delta_{ij}+\frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)db_{sij}(\xi)\omega_k^{n-s}+\ldots\\
&\ldots+\frac{1}{\rho^m}\sum_{s_1,\ldots,s_m=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b\sum_{g_1,\ldots,g_{m-1}=1}^{l} \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)db_{s_1,i,g_1}(\xi_1)\times\ldots\\
&\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_{m-1},s_m}(\xi_{m-1},\xi_m,\rho)db_{s_m,g_{m-1},j}(\xi_m)\omega_k^{n-s_m}+\\
&+\frac{1}{\rho^{m+1}}\sum_{s_1,\ldots,s_{m+1}=2}^{n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b\sum_{g_1,\ldots,g_{m+1}=1}^{l} \mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)db_{s_1,i,g_1}(\xi_1)\times\ldots\\
&\ldots\times\mathcal{K}_{k,n-s_m,s_{m+1}}(\xi_m,\xi_{m+1},\rho)db_{s_{m+1},g_m,g_{m+1}}(\xi_{m+1})\times\\
&\times z_{k,n-s_{m+1},g_{m+1},j}(\xi_{m+1},\rho),
\end{aligned}
\tag{3.147}
$$

тут δ_{ij} – символ Кронекера (тобто $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$), $i,j=\overline{1,l}$, $\nu=\overline{0,n-1}$. Нехай $B=\max|z_{k\nu gh}(x,\rho)|$, $a\leqslant x\leqslant b$, $\nu=\overline{0,n-1}$, $g,h=\overline{1,l}$. З леми 4 пункту 2.10.2 і формули (3.144) безпосередньо випливає існування таких сталих L і R, що для $|\rho|>R$ буде правильною нерівність $|\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)| \leqslant L$. Тоді останній доданок в (3.147) за модулем не перевищує

$$B\frac{L^{m+1}}{|\rho|^{m+1}}\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_{m+1}=2}^{n}\ \sum_{g_1,\ldots,g_{m+1}=1}^{l}\ \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, b_{s_1,i,g_1}\ldots \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, b_{s_{m+1},g_m,g_{m+1}},$$

де $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, b_{sgh}$ – варіація функції $b_{sgh}(x)$ на проміжку $[a,b]$. Внаслідок обмеженості варіації елементів матриць B_s $(s=\overline{2,n})$, можна прийти до оцінки за модулем останнього доданку в (3.147) через $B(m+1)^2nl\left(\frac{LM}{|\rho|}\right)^{m+1}$, де $M=\max \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, b_{sgh}$, $s=\overline{2,n}$, $g,h=\overline{1,l}$. При $|\rho|>R_0$, де $R_0=\max\{R,2LM\}$ (тут враховано, що для великих m має місце нерівність $m^2<2^m$), функція $z_{k\nu ij}(x,\rho)$ є сумою ряду

$$z_{k\nu ij}(x,\rho)=\omega_k^{\nu}\delta_{ij}+\frac{1}{\rho}\sum_{s=2}^{n}\int\limits_a^b \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)db_{sij}(\xi)\omega_k^{n-s}+$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\sum_{s_1,s_2=2}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\sum_{g=1}^{l}\mathcal{K}_{k\nu s_1}(x,\xi_1,\rho)\mathcal{K}_{k,n-s_1,s_2}(\xi_1,\xi_2,\rho)\times$$
$$\times db_{s_1ig}(\xi_1)db_{s_2gj}(\xi_2)\omega_k^{n-s_2}+\ldots,$$

оскільки він мажорується сумою геометричної прогресії зі знаменником, меншим від одиниці. Навпаки, легко побачити, що в кожній області $|\rho|\geqslant R_1>R_0$, $a\leqslant x\leqslant b$, цей ряд збігається рівномірно і є покомпонентним розв'язком системи (3.145). Отже, він має один і тільки один матричний розв'язок $Z_{k\nu}=Z_{k\nu}(x,\rho)$, регулярний відносно ρ, причому $Z_{k\nu}(x,\rho)=\omega_k^{\nu}E+O(1/\rho)$. Звідси і з (3.143) випливають співвідношення (3.142), з яких можна зробити висновок про лінійну незалежність матриць-функцій Y_1, Y_2, …, Y_n.

Залишається довести існування розв'язку $Y_k(x,\rho)$ рівняння (3.130), якому за формулою (3.143) відповідає функція $Z_{k\nu}$, яка задовольняє (3.145). Для цього достатньо показати, що визначник лінійного перетворення під сталих матриць C_j до $\hat{C}_j$ для достатньо великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, відрізняється від нуля.

Але якщо визначник перетворення (3.140) дорівнює нулю для як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in \mathcal{T}$, то для цих значень ρ система (3.140) має нетривіальні розв'язки відносно C_j для $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \ldots = \hat{C}_n = 0$. Відповідна функція Y буде тоді нетривіальним розв'язком першого рівняння системи, яку можна отримати з (3.141) при $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \ldots = \hat{C}_n = 0$.

Доведемо, що це неможливо. Скориставшись заміною ($\nu = \overline{0, n-1}$)

$$Z_\nu(x) = (z_{\nu ij}(x))_{i,j=1}^{l} = Y^{(\nu)}(x)\rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-a)}, \tag{3.148}$$

отримаємо для матриць-функцій Z_ν, $\nu = \overline{0, n-1}$, систему рівнянь

$$Z_\nu(x,\rho) = \omega_k^\nu E +$$

$$+\sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{s+\nu-1}} \int\limits_a^x \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} e^{\rho\omega_k(\xi-x)} dB_s(\xi) Z_{n-s}(\xi,\rho) -$$

$$-\sum_{s=2}^{n} \frac{1}{n\rho^{s+\nu-1}} \int\limits_x^b \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} e^{\rho\omega_k(\xi-x)} dB_s(\xi) Z_{n-s}(\xi,\rho).$$

Поклавши $m(\rho) = \max|z_{\nu gh}(x,\rho)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\nu = \overline{0, n-1}$, $g, h = \overline{1, l}$, і застосувавши лему 4 до правої частини останньої системи, можна отримати оцінку

$$|z_{\nu ij}(x,\rho)| \leqslant \frac{D_1}{n|\rho|}(k+n-k) \sum_{s=2}^{n} \sum_{g=1}^{l} \int\limits_a^b |\rho|^{2-s} |db_{sig}(\xi)| m(\rho).$$

Оскільки ліва частина досягає свого максимуму $m(\rho)$, то $m(\rho) \leqslant m(\rho)D_2/|\rho|$, де D_1, D_2 – сталі. Для великих значень $|\rho|$ ця нерівність можлива тільки тоді, коли $m(\rho) = 0$; отже, $z_{\nu ij}(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (3.148) $Y \equiv 0$ при $\nu = 0$, і теорему доведено повністю.

Зауваження. У випадку, коли всі коефіцієнти диференціального рівняння (3.119) є сумовними, з теореми 3.10 випливають уже відомі результати (див. [76, с. 118–119] або теорему 1.8).

3.6. Асимптотика власних значень і власних функцій крайової задачі для диференціального рівняння

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [69].

3.6.1. Сингулярний векторний диференціальний оператор та регулярні крайові умови. Диференціальний вираз $\hat{M}_n(\mathbf{y})$, визначений формулою (3.116), і крайові умови

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(\mathbf{y}) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{3.149}$$

де $\Gamma_{\nu j}$, $\Delta_{\nu j}$ – сталі матриці l-го порядку, породжують диференціальний оператор $\hat{M}$ з областю визначення

$$D(\hat{M}) = \Big\{\mathbf{y} : \mathbf{y}^{(k)} \in AC([a,b];\mathbb{C}^l),\ \ k = \overline{0, n-2},$$
$$\mathbf{y}^{(n-1)} \in BV^+([a,b];\mathbb{C}^l),\ \ \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\mathbf{y}) = 0,\ \ \nu = \overline{1,n}\Big\},$$

який діє з простору $BV^+([a,b];\mathbb{C}^l)$ у простір мір.

Крайові умови (3.149) можна переписати у матричному вигляді

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y) = 0, \quad \nu = \overline{1,n} \tag{3.150}$$

або

$$W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0, \tag{3.151}$$

де блочні матриці W_a, W_b мають вигляд $W_a = (\Gamma_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$, $W_b = (\Delta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^n$, а матриця $\mathcal{Y}$ подається формулою (3.121).

За допомогою операції нормування (див. пункт 3.2.2) крайові умови (3.149) можна подати у вигляді

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(\mathbf{y}) \equiv \Gamma_\nu \mathbf{y}^{(k_\nu)}(a) + \Delta_\nu \mathbf{y}^{(k_\nu)}(b) + \\ + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\Gamma}_{\nu j} \mathbf{y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \tilde{\Delta}_{\nu j} \mathbf{y}^{(j)}(b) = 0, \tag{3.152}$$

$$n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{s+2} < k_s, \\ s = \overline{1, n-2}, \quad \nu = \overline{1, n},$$

причому для кожного значення індексу ν хоча б одна з матриць Γ_ν, Δ_ν відрізняється від нульової.

Означення 3.17. Для n непарного ($n = 2\mu - 1$) нормовані крайові умови (3.152) назвемо *регулярними* для задачі (3.117), (3.152), якщо числа θ_0 і θ_l, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = \\ = \begin{vmatrix} \Gamma_1 \omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \Delta_1 \omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \Delta_1 \omega_n^{k_1} \\ \Gamma_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \Delta_2 \omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \Delta_2 \omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \Gamma_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & (\Gamma_n + s\Delta_n)\omega_\mu^{k_n} & \Delta_n \omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \Delta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{3.153}$$

відрізняються від нуля. Для n парного ($n = 2\mu$) нормовані крайові умови (3.152) називатимемо *регулярними* для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-l} і θ_l, що визначаються рівністю

$$\frac{\theta_{-l}}{s^l} + \ldots + \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = D,$$

де визначник D відрізняється від детермінанта з (3.153) тим, що ($\mu + 1$)-й блочний стовпець містить елементи вигляду $\left(\Gamma_j + \frac{1}{s}\Delta_j\right)\omega_{\mu+1}^{k_j}$.

Означення регулярності 3.17 збігається з означенням регулярності з [76, с. 120–121] та [42, с. 203–205].

3.6.2. Асимптотика власних значень. Для крайової задачі (3.117), (3.152) можна встановити, що при регулярних для неї крайових умовах множина власних значень є зліченною, а асимптотична поведінка великих за модулем власних значень залежить лише від чисел θ_j, $j = -l, -l+1, \ldots, l$. Ми будемо вважати (не уточнюючи цього в умові теореми заради лаконічності), що матричні коефіцієнти векторного рівняння (3.117) задовольняють накладені на них у пункті 3.5.1 умови.

Теорема 3.13. *Нехай $\hat{M}$ – диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $\hat{M}_n(\mathbf{y})$ і регулярними крайовими умовами* (3.152).

Тоді для непарного n кожному p-кратному кореню $\xi_j^{(1)}$ рівняння

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = 0 \tag{3.154}$$

для сектора S_k з парним індексом k відповідає p послідовностей власних значень $\lambda_{kj}^{(1)}$, а кожному p-кратному кореню $\xi_j^{(2)}$ рівняння (3.154) *для сектора S_k з непарним k відповідає p послідовностей власних значень $\lambda_{kj}^{(2)}$, причому вони подаються асимптотичними формулами*

$$\begin{gathered}
\lambda_{kj}^{(1)} = \left(\mp\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^n \left[1 \mp \frac{n \ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \\
\lambda_{kj}^{(2)} = \left(\pm\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^n \left[1 \pm \frac{n \ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \\
j = j_0, j_0+1, \ldots, j_0+p-1, \quad k \to \infty,
\end{gathered} \tag{3.155}$$

де верхній знак відповідає $n = 4q-1$, а нижній – $n = 4q+1$; $\xi_{j_0}^{(\gamma)} = \ldots = \xi_{j_0+p-1}^{(\gamma)}$; $\gamma = 1, 2$; $\ln_0 \xi$ – деяке фіксоване значення натурального логарифма; $k = N+1, N+2, \ldots$; N – достатньо велике натуральне число.

Для парного n кожному p-кратному кореню ξ_j рівняння

$$\theta_{-l} s^{-l} + \theta_{-l+1} s^{-l+1} + \ldots + \theta_l s^l = 0 \tag{3.156}$$

для області S_0 відповідає p послідовностей власних значень

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{2k\pi i}{b-a}\right)^n \left[1 \mp \frac{n \ln_0 \xi_j}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/p}}\right)\right], \qquad (3.157)$$
$$j = \overline{j_0, j_0+p-1}, \quad k \to \infty,$$

де верхній знак відповідає $n = 4q$, а нижній – $n = 4q+2$. При переході до області S_k з непарним індексом k формула (3.157) не змінюється, а при переході до області S_k з парним k у формулі (3.157) необхідно замінити ξ_j на $\frac{1}{\xi_j}$.

У випадку кратного кореня ξ деякі з λ_{kj}, відповідні цьому ξ, можуть збігтися, утворюючи одне кратне власне значення. Для достатньо великих $|\lambda|$ крайова задача (3.117), (3.152) не має ніяких інших власних значень, а кратність власного значення не перевищує кратності відповідного кореня ξ рівняння (3.154) або (3.156).

Доведення здійснюється аналогічно доведенню теорем 2.2, 3.2 з використанням теореми 3.12. Можна зазначити лиш, що власні значення є нулями визначника

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \det\Big(\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j)\Big)_{\nu,j=1}^n.$$

Нехай $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.119), яка задовольняє асимптотичні формули (3.142). Тоді крайові умови (3.152) запишуться у вигляді

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\Big\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu]\Big\}.$$

Зовсім так само, як у теоремі 2.2, за допомогою формул (2.76), (2.77) можна показати, що в кожному секторі $\mathcal{T}$ за виконання нерівностей (2.177) для n непарного ($n = 2\mu+1$) і парного ($n = 2\mu$)

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], & j < \mu, \\ (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\}, & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu], & j > \mu, \end{cases} \qquad (3.158)$$

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], & j < \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu] + e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu]\}, & j = \mu, \mu+1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu], & j > \mu+1 \end{cases} \quad (3.159)$$

відповідно. Після підстановки останніх формул у $\hat{\Delta}(\lambda)$, скорочення на спільні множники рядків і стовпців (враховуючи, що для парного n має місце $\omega_{\mu+1} = -\omega_\mu$), ми отримаємо рівняння

$$[\theta_0] + [\theta_1]e^{\rho\omega_\mu(b-a)} + [\theta_2]e^{2\rho\omega_\mu(b-a)} + \ldots + [\theta_l]e^{l\rho\omega_\mu(b-a)} = 0$$

і

$$[\theta_{-l}]e^{-l\rho\omega_\mu(b-a)} + [\theta_{-l+1}]e^{(-l+1)\rho\omega_\mu(b-a)} + \ldots + [\theta_0] + \\ + [\theta_1]e^{\rho\omega_\mu(b-a)} + [\theta_2]e^{2\rho\omega_\mu(b-a)} + \ldots + [\theta_l]e^{l\rho\omega_\mu(b-a)} = 0$$

для n непарного і парного відповідно. Внаслідок регулярності крайових умов (3.152), міркуваннями, аналогічними наведеним у теоремах 2.2, 3.2, з цих рівнянь можна вивести асимптотичні формули для великих власних значень (3.155), (3.157).

Зауваження. У випадку, коли всі коефіцієнти диференціального рівняння (3.119) є сумовними, теорема 3.13 збігається з уже відомими результатами (див. [76, с. 122–123] або теорему 1.9).

3.6.3. Асимптотика власних функцій. Користуючись теоремами 3.12 і 3.13, можна встановити асимптотичну поведінку власних вектор-функцій. Власна функція повинна задовольняти крайову задачу (3.117), (3.152) і відповідати власному значенню, її можна подати у вигляді

$$\mathbf{y} = Y_1\mathbf{c}_1 + Y_2\mathbf{c}_2 + \ldots + Y_n\mathbf{c}_n,$$

де $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, …, $Y_n(x)$ – лінійно незалежна система розв'язків рівняння (3.119), визначена за допомогою теореми 3.12. З системи

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j)\mathbf{c}_j = 0, \quad \nu = \overline{1, n},$$

можна визначити нетривіальні розв'язки – вектор-стовпці $\mathbf{c}_j$. За допомогою методу Гаусса, надавши вільним невідомим вектор-функціям $\mathbf{c}_j$ деяких значень, можна визначити решту $\mathbf{c}_j$ і встановити $\mathbf{y}$. У випадку простих власних значень побудову власних функцій можна провести безпосереднім узагальненням скалярного випадку.

Таким чином, асимптотичні формули для i-го елемента власних функцій $\mathbf{y}_k(x) = \mathrm{colon}(y_{k1}(x), y_{k2}(x), \ldots, y_{kl}(x))$, відповідних простим власним значенням λ_k, можна подати у вигляді визначників ln-го порядку, які отримують з детермінанта $\hat{\Delta}(\lambda) = \det(\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j))_{\nu,j=1}^n$ шляхом заміни в ньому першого (звичайного, а не блочного) рядка на i-й рядок прямокутної матриці $(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x))$, де $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $\ldots$, $Y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.119), що задовольняє асимптотичні формули (3.142).

3.7. Функція Ґріна крайової задачі

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [66].

3.7.1. Спряжені крайові умови. Розглянемо вираз $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$ і здиференціюємо його, скориставшись формулами (3.122), (3.124):

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})' = (\mathcal{Z}^*)'\,\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}' = -\left((\mathcal{B}^*)'\,\mathcal{Z}\right)^*\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} =$$
$$= -\mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(\mathcal{Z}^*)'\,\mathcal{Y}$ і $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}'$ є коректними на підставі того факту, що Y, Y', $\ldots$, $Y^{(n-2)}$, Z – матриці, що складаються з абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, а $Y^{(n-1)}$, $Z^{\{1\}}$, $Z^{\{2\}}$, $\ldots$, $Z^{\{n-1\}}$ – матриці, компоненти яких є функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації (див. твердження 3.5, 3.6). Отже, $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$ є сталою величиною і тому

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})\big|_a^b = 0 \qquad (3.160)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} Z^{*\{n-j\}}(b)Y^{(j-1)}(b) - \sum_{j=1}^{n} Z^{*\{n-j\}}(a)Y^{(j-1)}(a) = 0.$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $\hat{\mathcal{U}}_1(Y)$, $\hat{\mathcal{U}}_2(Y)$, ..., $\hat{\mathcal{U}}_n(Y)$ формами $\hat{\mathcal{U}}_{n+1}(Y)$, $\hat{\mathcal{U}}_{n+2}(Y)$, ..., $\hat{\mathcal{U}}_{2n}(Y)$ до лінійно незалежної системи $2n$ лінійних форм. Тоді систему

$$\hat{\mathcal{U}}_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j} Y^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1, 2n},$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $Y^{(q)}(a)$, $Y^{(q)}(b)$, які визначаються через $\hat{\mathcal{U}}_1(Y)$, ..., $\hat{\mathcal{U}}_{2n}(Y)$. Підставивши отримані $Y^{(q)}(a)$, $Y^{(q)}(b)$ $(q = \overline{0, n-1})$ у білінійну форму в лівій частині рівності (3.160), ми отримаємо, що

$$(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y})\big|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2n} \mathcal{A}_\nu(\xi)\mathcal{B}_\nu(\eta),$$

де $\eta = \big(Y^{(q)}(a), Y^{(q)}(b)\big)$, $\xi = \big(Z^{*\{q\}}(a), Z^{*\{q\}}(b)\big)$, $q = \overline{0, n-1}$, а $\mathcal{B}_\nu(\eta) = \hat{U}_\nu(Y)$. Позначимо $\mathcal{A}_{2n}(\xi) = \hat{\mathcal{V}}_1(Z)$, ..., $\mathcal{A}_1(\xi) = \hat{\mathcal{V}}_{2n}(Z)$. Очевидно, що для того щоб виконувалась рівність (3.160), повинні мати місце співвідношення

$$\hat{\mathcal{V}}_\nu(Z) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \tag{3.161}$$

де

$$\hat{\mathcal{V}}_\nu(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Gamma}_{\nu j} Z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_{\nu j} Z^{\{j\}}(b), \quad \nu = \overline{1, n},$$

які ми назвемо *спряженими крайовими умовами* до умов (3.149) (оскільки крайові умови дорівнюють нулю, можна перенести комплексне спряження з Z на матрицю сталих коефіцієнтів при ньому). Спряжені крайові умови можна записувати й у векторному вигляді $\hat{\mathcal{V}}_\nu(\mathbf{z}) = 0$, $\nu = \overline{1, n}$.

Зауваження. Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (3.151), то крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$\mathcal{Z}^*(a)W_a^{-1} + \mathcal{Z}^*(b)W_b^{-1} = 0. \tag{3.162}$$

Справді, з рівності (3.151), якщо $|W_a| \neq 0$, маємо

$$\mathcal{Y}(a) = -W_a^{-1}W_b\mathcal{Y}(b).$$

Підставивши отриманий вираз у (3.160), отримаємо співвідношення

$$\mathcal{Z}^*(b)\mathcal{Y}(b) + \mathcal{Z}^*(a)W_a^{-1}W_b\mathcal{Y}(b) = 0,$$

звідки при $|W_b| \neq 0$ випливає (3.162).

Спряжений квазідиференціальний вираз $\hat{M}_n^*(z)$ і спряжені крайові умови (3.161) породжують квазідиференціальний оператор $\hat{M}^*$, який є спряженим до $\hat{M}$. Квазідиференціальний оператор $\hat{M}^*$ має область визначення

$$D(\hat{M}^*) = \Big\{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in AC\Big([a,b];\mathbb{C}^{l\times 1}\Big),$$
$$\mathbf{z}^{\{s\}} \in BV^+\Big([a,b];\mathbb{C}^{l\times 1}\Big),\ \ s = \overline{1, n-1},\quad \hat{\mathcal{V}}_\nu(z) = 0,\ \nu = \overline{1,n}\Big\}$$

і діє з простору $BV^+([a,b];\mathbb{C})$ у простір мір.

3.7.2. Функція Ґріна крайової задачі. Розглянемо тепер неоднорідне векторне диференціальне рівняння

$$\hat{M}_n(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}', \tag{3.163}$$

де $\mathbf{f} \in BV^+\big([a,b];\mathbb{C}^l\big)$, а також асоційоване до нього матричне рівняння

$$\hat{M}_n(Y) = \lambda Y + F', \tag{3.164}$$

де $F \in BV^+\big([a,b];\mathbb{C}^{l\times l}\big)$, $F(x)$ складається з l стовпчиків $\mathbf{f}(x)$. Неоднорідне рівняння (3.164) шляхом введення прямокутної матриці $\mathcal{Y}$ (див. пункт 3.5.1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}', \tag{3.165}$$

де $\mathcal{F}(x) = (0, \ldots, 0, -F(x))^T$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta\mathcal{B}(x)\Delta\mathcal{F}(x) \equiv 0$ (див. [114]).

Побудуємо матричну функцію Ґріна крайової задачі (3.163), (3.117). Нехай $\tilde{K}(x,t,\lambda)$ – матриця-функція Коші однорідного рівняння (3.119). Відомо [114, с. 21], що $\tilde{K}(x,a,\lambda)$, $\tilde{K}^{*\{1\}*}(x,a,\lambda)$, ..., $\tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (3.164) можна подати у вигляді

$$Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)C_k + \int_a^x \tilde{K}(x,t,\lambda)dF(t). \qquad (3.166)$$

Оскільки згідно з [114]

$$Y^{(j)}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{K}^{*\{k-1\}*(j)}(x,a,\lambda)C_k + \int_a^x \tilde{K}^{(j)}(x,t,\lambda)dF(t)$$

($j = \overline{1,n}$), підстановка формули (3.166) в крайові умови (3.150) дасть рівності

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\mathfrak{U}}_\nu\Big(\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\Big)C_k +$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j}\int_a^b \tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dF(t), \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad (3.167)$$

що можна записати у вигляді $\mathcal{W}\tilde{C} + \tilde{B} = 0$, де $\tilde{C} = (C_1, \ldots, C_n)^T$, $\tilde{B}$ – прямокутна матриця порядку $nl \times l$, $\mathcal{W} = \Big(\hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda))\Big)_{\nu,k=1}^{n}$. В припущенні, що λ не є власним значенням оператора $\hat{M}$, визначник системи (3.167) відрізняється від нуля $\hat{\Delta}(\lambda) \equiv \det \mathcal{W} \neq 0$. Тоді сталі матриці C_k можуть бути визначені з системи (3.167) єдиним чином:

$$C_k = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)} \Delta_{\nu j} \int_a^b \tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dF(t), \quad k = \overline{1,n},$$

де $W_{\nu k}$ $(\nu, k = \overline{1,n})$ – матриця l-го порядку, транспонована до складеної з алгебричних доповнень визначника $\hat{\Delta}(\lambda)$ до елементів матриці $\hat{\mathfrak{U}}_\nu\Big(\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\Big)$, тобто

$$\mathcal{W}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} & \cdots & W_{n1} \\ W_{12} & W_{22} & \cdots & W_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{1n} & W_{2n} & \cdots & W_{nn} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи ці значення C_k у формулу (3.166), отримаємо

$$Y(x,\lambda) = \int\limits_a^x \tilde{K}(x,t,\lambda)dF(t) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_a^b \tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda)dF(t).$$

Означення 3.18. Матричний вираз

$$G(x,t,\lambda) = P(x,t,\lambda) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda), \tag{3.168}$$

де

$$P(x,t,\lambda) = \begin{cases} \tilde{K}(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ 0, & x < t \end{cases} \tag{3.169}$$

будемо називати *функцією Ґріна* крайової задачі (3.163), (3.150) (диференціального оператора $\hat{M} - \lambda I$).

З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Ґріна. Як видно з наступної теореми, ця матриця-функція Ґріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння, її похідних і квазіпохідних у сенсі спряженого рівняння, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [76, с. 115–116]).

Теорема 3.14. *Розв'язок задачі* (3.163), (3.149), *в припущенні, що* λ *не є її власним значенням, можна подати у вигляді*

$$\mathbf{y}(x) = \int_a^b G(x,t,\lambda)d\mathbf{f}(t), \tag{3.170}$$

де матриця-функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ *подається формулою* (3.168) *і має наступні властивості:*

1) *похідні за першою змінною* $G^{(k)}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0, n-2})$ *є неперервними функціями двох змінних* x, t *і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*

2) *функція* $G^{(n-1)}(x,t,\lambda)$ *має обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервною по* t*;*

3) $G(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t), (t,b]$ *по* x *задовольняє рівняння* (3.119)*;*

4) $G(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови* (3.150)*;*

5) *при* $x = t$ *матриця-функція* $G(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda) - G^{(k)}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k = \overline{0, n-2};$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda) - G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= E + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} \Delta B_{n-i}(t)\tilde{K}^{(i)*\{k-1\}*}(t,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\hat{\Delta}(\lambda)}\Delta_{\nu j}\times$$

$$\times \tilde{K}^{(j)}(b,t,\lambda).$$

Доведення. Формула (3.170) була вже доведена вище. Пункти 1) – 4) легко перевірити, врахувавши вищезгадані властивості розв'язків рівняння (3.119) та спряженого до нього і повторивши міркування теорем 2.16 та 3.3. Для доведення пункту 5) використовуються співвідношення

$$\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda) = \sum_{q=1}^{n} Y_q(x,\lambda)C_{qk}(t,\lambda), \quad k = \overline{1,n}, \tag{3.171}$$

які випливають з того факту, що всі $\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (3.119); $Y_q(x)$, $q=\overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.119). Тоді, внаслідок рівності (3.123), ми маємо

$$\tilde{K}^{(n-1)*\{k-1\}*}(t+0,a,\lambda) - \tilde{K}^{(n-1)*\{k-1\}*}(t-0,a,\lambda) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n}\Big(Y_q^{(n-1)}(t+0,\lambda) - Y_q^{(n-1)}(t-0,\lambda)\Big)C_{qk}(a,\lambda) =$$

$$= -\sum_{q=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-2}\Delta B_{n-i}(t)Y_q^{(i)}(t,\lambda)C_{qk}(a,\lambda) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-2}\Delta B_{n-i}(t)\tilde{K}^{(i)*\{k-1\}*}(t,a,\lambda), \quad k=\overline{1,n},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Зауваження 1. Зазначимо, що коли $\Delta B_i(x)=0$, $i=\overline{2,n}$, властивість 5) набуває «класичного» вигляду

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda) - G^{(k)}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k=\overline{0,n-2};$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda) - G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda) = E.$$

Зауваження 2. Матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^{nl}\frac{1}{\hat{\Delta}(\lambda)}\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{l1} & \cdots & Q_{ll} \end{pmatrix}, \tag{3.172}$$

де

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{K}_{i1}(x,a,\lambda) & \cdots & \tilde{K}_{il}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda) & P_{ij}(x,t,\lambda) \\ \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}_{11}(x,a,\lambda)) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}_{1l}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & \hat{\mathfrak{U}}_1(P_{1j}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}_{l1}(x,a,\lambda)) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}_{ll}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & \hat{\mathfrak{U}}_n(P_{lj}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{3.173}$$

$\tilde{K}_{ij}(x,t,\lambda)$ – елементи матриці $\tilde{K}(x,t,\lambda)$, $P_{ij}(x,t,\lambda)$ – елементи матриці $P(x,t,\lambda)$.

Справді, позначивши через $\tilde{W}_{\nu kpq}$ і $W_{\nu kpq}$ відповідно доповнюючий мінор і алгебричне доповнення у визначнику $\hat{\Delta}(\lambda)$ елемента $\hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}^{*\{k-1\}*}_{pq}(x,t,\lambda))$, ми отримаємо, розписавши (3.173) за елементами останнього стовпця і першого рядка,

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) = (-1)^{nl} P_{ij}(x,t,\lambda)\hat{\Delta}(\lambda) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{p=1}^{l}(-1)^{nl+(\nu-1)l+p}\hat{\mathfrak{U}}_\nu(P_{pj}(x,t,\lambda))\times \\ \times \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{l}\tilde{K}^{*\{k-1\}*}_{iq}(x,a,\lambda)(-1)^{(k-1)l+q+1}\tilde{W}_{\nu kpq}. \tag{3.174}$$

Тепер, врахувавши формулу (3.169), неважко від (3.172) прийти до рівності (3.168).

3.7.3. Розв'язувальне ядро задачі (3.165), (3.151). Розв'язок задачі (3.165), (3.151), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матриці-функції Ґріна задачі (3.165), (3.151)) і прямокутної матриці $\mathcal{F}$. Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Ґріна задачі (3.163), (3.149).

Для задачі (3.165), (3.151) має місце формула (див. [114])

$$\mathcal{Y}(x) = \Phi(x,a)\mathcal{Y}(a) + \int_a^x \Phi(x,t)d\mathcal{F}(t), \tag{3.175}$$

де $\Phi(x,t) = \Phi(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця системи (3.122); вона подається у вигляді $\Phi(x,t,\lambda) = R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ – інтегральна матриця системи (3.122). Ми можемо записати рівність (3.175) наступним чином:

$$\mathcal{Y}(x) = R(x,\lambda)C + \int_a^x \Phi(x,t,\lambda)d\mathcal{F}(t), \tag{3.176}$$

де $C = R^{-1}(a,\lambda)Y(a)$ – прямокутна матриця. Підставивши (3.176) в умови (3.151), отримаємо, внаслідок того, що $|W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)| \neq 0$ (бо λ не є власним значенням крайової задачі), вираз для матриці C

$$C = -\left\{W_aR\left(a,\lambda\right)+W_bR\left(b,\lambda\right)\right\}^{-1}\int\limits_a^b W_b\Phi\left(b,t,\lambda\right)d\mathfrak{F}\left(t\right).$$

А тому (3.176) запишеться у вигляді

$$\mathcal{Y}(x) = \int\limits_a^x \Phi(x,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t) -$$
$$- R(x,\lambda)\left\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\right\}^{-1}\int\limits_a^b W_b\Phi(b,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t).$$

Оскільки

$$R(x,\lambda)\left\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\right\}^{-1} =$$
$$= \Big\{W_aR(a,\lambda)R^{-1}(x,\lambda)+W_bR(b,\lambda)R^{-1}(x,\lambda)\Big\}^{-1},$$

ми одержимо формулу

$$\mathcal{Y}(x) = \int\limits_a^b M(x,t,\lambda)d\mathfrak{F}(t), \tag{3.177}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} \Phi(x,t,\lambda)+\Omega_1(x,t,\lambda), & x \geqslant t, \\ \Omega_1(x,t,\lambda), & x < t \end{cases}$$

є квадратною матрицею ln-го порядку, а

$$\Omega_1(x,t,\lambda) = -\left\{W_a\Phi(a,x,\lambda)+W_b\Phi(b,x,\lambda)\right\}^{-1}W_b\Phi(b,t,\lambda).$$

3.7.4. Зв'язок між функціями Ґріна спряжених крайових задач. Нехай $H(x,t,\lambda)$ – матриця-функція Ґріна спряженої крайової задачі

$$\hat{M}_n^*(Z) = \bar{\lambda} Z + \hat{F}' \tag{3.178}$$

з крайовими умовами (3.161) (оператора $\hat{M}^* - \bar{\lambda} I$), де матриця $\hat{F}$ складається з l стовпців $\hat{\mathbf{f}}(x)$, усі компоненти яких є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації. Вона будується за допомогою матриці-функції Коші $\tilde{K}(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння (3.119), її квазіпохідних у сенсі рівняння (3.125) та звичайних похідних.

Теорема 3.15. *Розв'язок задачі*

$$\hat{M}_n^*(\mathbf{z}) = \bar{\lambda}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{f}}',$$

$$\hat{V}_\nu(\mathbf{z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Gamma}_{\nu j} \mathbf{z}^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_{\nu j} \mathbf{z}^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n},$$

в припущенні, що λ не є її власним значенням, можна зобразити у вигляді

$$\mathbf{z}(x) = \int_a^b H(x,t,\lambda) d\hat{\mathbf{f}}(t), \tag{3.179}$$

де матриця-функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ подається формулою

$$H(x,t,\lambda) = \begin{cases} \hat{\Omega}(x,t,\lambda) + \tilde{K}(t,x,\lambda), & x \geqslant t, \\ \hat{\Omega}(x,t,\lambda), & x < t, \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{K}^{*(k-1)}(a,x,\lambda) \frac{\hat{W}_{\nu k}}{\hat{\Delta}_1(\lambda)} \hat{\Delta}_{\nu j} \tilde{K}^{\{j\}}(t,b,\lambda),$$

фігурними дужками тут позначаються квазіпохідні в сенсі рівняння (3.125) за першою змінною, а круглими – звичайні похідні в сенсі спряженого до (3.125) рівняння (2.163) за другою змінною, $\hat{W}_{\nu k}$ ($\nu, k = \overline{1,n}$) – матриця l-го порядку, транспонована до складеної з алгебричних доповнень визначника

$$\hat{\Delta}_1(\lambda) \equiv \det\Big(\hat{\mathcal{V}}_\nu\Big(\tilde{K}^{*(k-1)}(a,x,\lambda)\Big)\Big)_{\nu,k=1}^{n}$$

до елементів матриці $\hat{\mathcal{V}}_\nu\Big(\tilde{K}^{*(k-1)}(a,x,\lambda)\Big)$.

Матриця-функція Ґріна $H(x,t,\lambda)$ *має наступні властивості:*

1) *матриця-функція* $H(x,t,\lambda)$ *є неперервною функцією двох змінних* x, t *і абсолютно неперервною за кожною змінною при фіксованій іншій;*

2) *квазіпохідні* $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ $(k=\overline{1,n-1})$ *мають обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною та є абсолютно неперервними по* t;

3) $H(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t),(t,b]$ *по* x *задовольняє однорідне рівняння* (3.125);

4) $H(x,t,\lambda)$ *за змінною* x *задовольняє крайові умови* (2.220);

5) *для* $x=t$ *матриця-функція* $H(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$H(t+0,t,\lambda)-H(t-0,t,\lambda)=0;$$

$$H^{\{s\}}(t+0,t,\lambda)-H^{\{s\}}(t-0,t,\lambda)=$$
$$=-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Delta B^*_{s+1}(t)\tilde{K}^{*(k-1)}(a,t,\lambda)\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\hat{\Delta}_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}\times$$
$$\times\tilde{K}^{\{j\}}(t,b,\lambda),\quad s=\overline{1,n-2};$$

$$H^{\{n-1\}}(t+0,t,\lambda)-H^{\{n-1\}}(t-0,t,\lambda)=$$
$$=E-\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Delta B^*_{n}(t)\tilde{K}^{*(k-1)}(a,t,\lambda)\frac{\hat{W}_{\nu k}}{\hat{\Delta}_1(\lambda)}\hat{\Delta}_{\nu j}\tilde{K}^{\{j\}}(t,b,\lambda).$$

Доведення. Формула (3.179) і властивості функції Ґріна встановлюються міркуваннями, аналогічними до наведених у пункті 3.7.2 та доведеннях теорем 2.17 і 3.4. Доведемо тут лише пункт 5). Для цього розглянемо співвідношення

$$\tilde{K}^{*(k-1)}(t,x,\lambda)=\sum_{q=1}^{n}Z_q(x,\lambda)C_{qk}(t,\lambda),\quad k=\overline{1,n},$$

які випливають з того факту, що всі $\tilde{K}^{*(k-1)}(t,x,\lambda)$ є розв'язками рівняння (3.125); $Z_q(x)$, $q=\overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (3.125). Тоді, внаслідок рівності (3.128) ми маємо

$$\tilde{K}^{\{s\}*(k-1)}(a,t+0,\lambda) - \tilde{K}^{\{s\}*(k-1)}(a,t-0,\lambda) =$$
$$= \sum_{q=1}^{n} \Big(Z_q^{\{s\}}(t+0,\lambda) - Z_q^{\{s\}}(t-0,\lambda) \Big) C_{qk}(a,\lambda) =$$
$$= \sum_{q=1}^{n} \Delta B^*_{s+1}(t) Z_q(t,\lambda) C_{qk}(a,\lambda) =$$
$$= \Delta B^*_{s+1}(t) \tilde{K}^{*(k-1)}(a,t,\lambda), \quad k=\overline{1,n}, \;\; s=\overline{1,n-1},$$

звідки, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему.

Теорема 3.16. *Для $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням оператора $\hat{M}$, функції Ґріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda) = H^*(t,x,\lambda).$$

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Ґріна спряжених крайових задач

$$\hat{M}_n(Y) - \lambda Y = F_1(x), \tag{3.180}$$

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j} Y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu=\overline{1,n}, \tag{3.181}$$

$$\hat{M}^*_n(Z) - \bar{\lambda} Z = -F_2(x), \tag{3.182}$$

$$\hat{\mathfrak{V}}_\nu(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Gamma}_{\nu j} Z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Delta}_{\nu j} Z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu=\overline{1,n}, \tag{3.183}$$

відповідно, де $F_1(x)$, $F_2(x)$ – неперервні на $[a,b]$ матриці, які складаються з l однакових стовпчиків вигляду $\mathbf{f}_1(x)$ і

$\mathbf{f}_2(x)$. Ці задачі внаслідок введення прямокутних матриць $\mathcal{Y} = \left(Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}\right)^T$ і $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{n-1\}}, \ldots, Z^{\{1\}}, Z\right)^T$ зводяться до задач

$$\begin{cases} \mathcal{Y}' = \mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}_1, \\ W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} \mathcal{Z}' = -\left(\mathcal{B}^*\right)'\mathcal{Z} + \mathcal{F}_2, \\ \hat{W}_a\mathcal{Z}(a) + \hat{W}_b\mathcal{Z}(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де

$$\mathcal{F}_1(x) = (0, \ldots, 0, F_1(x))^T, \quad \mathcal{F}_2(x) = (F_2(x), 0, \ldots, 0)^T,$$

а W_a, W_b, $\hat{W}_a$, $\hat{W}_b$ – числові матриці порядку $nl \times nl$.

Оскільки добутки $\left(\mathcal{Z}^*\right)'\mathcal{Y}$ і $\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}'$ коректні, то

$$\begin{gathered} \left(\mathcal{Z}^*\mathcal{Y}\right)' = \left(\mathcal{Z}^*\right)'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}' = \\ = -\mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{F}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{B}'\mathcal{Y} + \mathcal{Z}^*\mathcal{F}_1 = \mathcal{Z}^*\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2^*\mathcal{Y}. \end{gathered}$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (3.161) і повторивши міркування з доведення теореми 2.18, можна переконатись у правильності рівності (3.160) для неоднорідних спряжених крайових задач (3.180)–(3.183). Тоді

$$\int_a^b \left(\mathcal{Z}^*(x)\mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2^*(x)\mathcal{Y}(x)\right) dx = 0.$$

Згідно з формулою (3.177)

$$\mathcal{Y}(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda)\mathcal{F}_1(t)dt, \quad \mathcal{Z}(t) = \int_a^b N(t,x,\lambda)\mathcal{F}_2(x)dx,$$

врахувавши (3.170), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка блочної матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює

$G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка блочної матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $-H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(t,x,\lambda)\mathcal{F}_2(x)dx\right)^* \mathcal{F}_1(t)dt+$$

$$+\int_a^b \mathcal{F}_2^*(x)\int_a^b M(x,t,\lambda)\mathcal{F}_1(t)dtdx =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \mathcal{F}_2^*(x)\{N^*(t,x,\lambda)+M(x,t,\lambda)\}\mathcal{F}_1(t)dxdt = 0,$$

тобто

$$\int_a^b\int_a^b \mathbf{f}_2^*(x)\left\{-H^*(t,x,\lambda)+G(x,t,\lambda)\right\}\mathbf{f}_1(t)dxdt = 0. \qquad (3.184)$$

Нехай

$$G(x,t,\lambda) = (g_{ij}(x,t,\lambda))_{i,j=1}^l, \quad H(x,t,\lambda) = (h_{ij}(x,t,\lambda))_{i,j=1}^l,$$

$\mathbf{f}_1(x) = \operatorname{colon}(f_{11},\ldots,f_{1l})$, $\mathbf{f}_2(x) = \operatorname{colon}(f_{21},\ldots,f_{2l})$, (x_0,t_0) – будь-яка точка області $a \leqslant x,\ t \leqslant b$, $x \neq t$. Довільно виберемо оточуючий її малий прямокутник Δs зі сторонами $t = t_0 \pm \Delta t$ і $x = x_0 \pm \Delta x$ і такі вектор-функції $\mathbf{f}_1(t)$ і $\mathbf{f}_2(x)$, щоб $f_{1j}(t) \equiv 0$ при $j \neq j_0$, $f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs, $f_{1,j_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs, $f_{2i}(t) \equiv 0$ при $i \neq i_0$, $f_{2,i_0}(t) \neq 0$ в Δs, $f_{2,i_0}(t) \equiv 0$ зовні Δs. Для цього вибору рівняння (3.184) буде еквівалентним до

$$\int_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t}\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_{2,i_0}(x)\left[\overline{h_{j_0,i_0}(t,x,\lambda)} - g_{i_0,j_0}(x,t,\lambda)\right] f_{1,j_0}(t)dxdt = 0,$$

і, оскільки $f_{2,i_0}(x)f_{1,j_0}(t) \neq 0$ в Δs, очевидно, вираз у квадратних дужках перетворюється в нуль десь у цій області. Нехай Δx і Δt прямують до нуля. Тоді в границі ми матимемо $\overline{h_{j_0,i_0}(t_0,x_0,\lambda)} = g_{i_0,j_0}(x_0,t_0,\lambda)$ і внаслідок довільності вибору векторів $\mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{f}_2(x)$ та точок x_0, t_0 $(x_0 \neq t_0)$ отримаємо твердження теореми.

3.7.5. Аналітична природа матриці-функції Ґріна у випадку простих полюсів. Оскільки чисельник і знаменник у формулі (3.172) є, очевидно, цілими аналітичними функціями параметра λ, функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$ оператора $\hat{M} - \lambda I$ є мероморфною функцією параметра λ; її полюсами можуть бути лише власні значення оператора $\hat{M}$.

Нехай λ_0 – простий нуль функції $\hat{\Delta}_1(\lambda)$. Тоді λ_0 може бути лише простим полюсом функції $G(x,t,\lambda)$. Повністю повторивши міркування з пункту 3.3.5, аналогічно [76, с. 48–49], отримаємо, що функцію Ґріна $G(x,t,\lambda)$ за виконання умови нормованості

$$\int_a^b \mathbf{z}_0^*(\tau)\mathbf{y}_0(\tau)d\tau = 1 \tag{3.185}$$

можна записати у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{\mathbf{y}_0(x)\mathbf{z}_0^*(t)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x,t,\lambda), \tag{3.186}$$

де $\mathbf{y}_0(x)$ – власна вектор-функція диференціального оператора $\hat{M}$, відповідна простому нулю λ_0 визначника $\hat{\Delta}_1(\lambda)$, $\mathbf{z}_0(x)$ – власна вектор-функція диференціального оператора $\hat{M}^*$, відповідна власному значенню $\bar{\lambda}_0$ цієї задачі, а функція $G_1(x,t,\lambda)$ регулярна в околі точки λ_0.

3.8. Розвинення за власними функціями

Основні результати цього підрозділу опубліковані в роботі [71].

3.8.1. Структура функції Коші та її квазіпохідних. У випадку диференціального рівняння (3.119) мають місце аналоги теорем 3.6 і 3.7.

Теорема 3.17. *Нехай $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного диференціального рів-*

няння (3.119),

$$W(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & Y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

– вронскіан цього рівняння, а $V_{ij}(t)$ *– матриця, транспонована до матриці, складеної з алгебричних доповнень у визначнику* $W(t)$ *до елементів матриці* $Y_j^{(i-1)}(t)$. *Тоді матрицю-функцію Коші* $\tilde{K}(x,t)$ *рівняння* (3.119) *і її мішані похідні в сенсі вихідного рівняння і квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння можна зобразити у вигляді*

$$\tilde{K}^{*\{j\}*(i)}(x,t) = \frac{1}{W(t)} \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(i)}(x) V_{n-j,k}(t), \quad i,j = \overline{0, n-1}. \tag{3.187}$$

Доведення. Нехай

$$R(x) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & Y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

– інтегральна матриця рівняння (3.119). Тоді $B(x,t) = R(x)R^{-1}(t)$ – еволюційний оператор, який має структуру [112]

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,t) & \cdots & \tilde{K}(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{K}^{*\{n-1\}*(n-1)}(x,t) & \cdots & \tilde{K}^{(n-1)}(x,t) \end{pmatrix}. \tag{3.188}$$

Матрицю (3.188) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,t) & \cdots & \tilde{K}(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{K}^{*\{n-1\}*(n-1)}(x,t) & \cdots & \tilde{K}^{(n-1)}(x,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & Y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} V_{11}(t) & \cdots & V_{n1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1n}(t) & \cdots & V_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

звідки випливає (3.187), що й завершує доведення теореми.

Теорема 3.18. *Нехай* $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ *– будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного рівняння* (3.119). *Позначимо через* $y_{ipqj}(x)$ *елемент, який знаходиться на перетині* p*-го рядка і* q*-го стовпця матриці* $Y_j^{(i-1)}(x)$*, тобто* $Y_j^{(i-1)}(x) = (y_{ipqj}(x))_{p,q=1}^{l}$ $(i,j=\overline{1,n})$*. Тоді матриця-функція Коші рівняння* (3.4) *і її мішані похідні в сенсі вихідного рівняння і квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння є квадратними матрицями* l*-го порядку, кожен елемент яких подається відношенням визначника, який відрізняється від вронскіана* $W(t)$ *лише одним рядком, до* $W(t)$:

$$\tilde{K}_{pq}^{*\{j\}*(i)}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_{1111}(t) & \cdots & y_{11l1}(t) & \cdots & y_{11ln}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1l11}(t) & \cdots & y_{1ll1}(t) & \cdots & y_{1lln}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n-j,q-1,11}(t) & \cdots & y_{n-j,q-1,l1}(t) & \cdots & y_{n-j,q-1,ln}(t) \\ y_{i+1,p11}(x) & \cdots & y_{i+1,pl1}(x) & \cdots & y_{i+1,pln}(x) \\ y_{n-j,q+1,11}(t) & \cdots & y_{n-j,q+1,l1}(t) & \cdots & y_{n-j,q+1,ln}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{nl11}(t) & \cdots & y_{nll1}(t) & \cdots & y_{nlln}(t) \end{vmatrix}, \tag{3.189}$$

$$i,j=\overline{0,n-1}, \quad p,q=\overline{1,l}.$$

Тут «нестандартний» рядок з залежними від x *функціями знаходиться на* $((n-j-1)l+q)$*-му місці зверху, а елемент* $\tilde{K}_{pq}^{*\{j\}*(i)}(x,t)$ *розташований на перетині* p*-го рядка і* q*-го стовпця матриці* $\tilde{K}^{*\{j\}*(i)}(x,t)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.17 має місце рівність (3.187), розпишемо її покоординатно

$$\tilde{K}_{pq}^{*\{j\}*(i)}(x,t) = \frac{1}{W(t)} \sum_{k=1}^{n}\sum_{g=1}^{l} y_{i+1,pqk}(x) A_{n-j,qgk}(t) = \frac{M_{ipqj}(x,t)}{W(t)},$$

де $M_{ipqj}(x,t)$ – визначник з чисельника правої частини формули (3.189), $A_{n-j,qgk}(t)$ – алгебричне доповнення у визначнику $W(t)$ елемента $y_{n-j,qgk}(t)$, $p,q=\overline{1,l}$, $i,j=\overline{1,n}$. Теорему доведено.

Залежний від x рядок знаходиться у визначнику з чисельника правої частини формули (3.189) на q-му місці в $(n-j)$-й смузі зверху, хоча він взятий з p-го місця в $(i+1)$-й смузі зверху у визначнику $W(x)$. Фактично, це означає, що навіть при $j\neq 0$ $\tilde{K}^{*\{j\}*(i)}(x,t)$ залежить лише від елементів матриць $Y_1(x)$, …, $Y_n(x)$, $Y_1(t)$, …, $Y_n(t)$ і їхніх похідних у сенсі вихідного рівняння (3.119).

3.8.2. Оцінка матричної функції Ґріна. Будемо вважати, не втрачаючи загальності, що $\hat{M}\mathbf{y}=0$ лише при $\mathbf{y}=0$. Дійсно, в протилежному випадку достатньо замінити $\hat{M}_n(\mathbf{y})$ виразом $\hat{M}_n(\mathbf{y})-c\mathbf{y}$, де c – довільне число, відмінне від усіх власних значень оператора $\hat{M}$. Таке число існує, бо згідно з теоремою 3.13 цей оператор має лише зліченну множину власних значень. Нехай $G(x,t,\lambda)$ – функція Ґріна оператора $\hat{M}-\lambda I$; оператор $\hat{M}$ має матрицю-функцію Ґріна $G(x,t)=G(x,t,0)$.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k=1,2,\dots$, зі спільним центром у початку координат, що мають наступні властивості: 1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає для $k\to\infty$; 2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $\mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1$ власних значень оператора $\hat{M}$ при відображенні

$$\lambda=-\rho^n \tag{3.190}$$

знаходяться для досить великих k на відстані не меншій δ від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Аналогічно пункту 2.9.1 розглядається також інтеграл

$$I_k(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{G(x,t,\lambda)}{\lambda}d\lambda;$$

застосувавши до нього теорему про лишки, отримаємо

$$I_k(x,t)=G(x,t)+\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}, \tag{3.191}$$

де $Q_\nu(x,t)$ – лишок матриці-функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який ми припускатимемо простим), а m_k – число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 3.19. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k кожен елемент матриці-функції $G(x,t,\lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)| \leqslant M\,|\lambda|^{-\frac{n-1}{n}}, \tag{3.192}$$

де M – деяка стала.

Доведення здійснюється подібно до скалярного випадку (теорема 2.19). За відповідного вибору $\arg\rho$ при відображенні (3.190) коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $2\pi/r$, що проходить у двох сусідніх областях $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного n.

1) n – непарне; $n = 2\mu - 1$. Нехай згідно з твердженням 2.5 числа ω_1, ω_2, …, ω_n (різні корені n-го степеня з -1) занумеровано так, що для $\rho \in \mathcal{S}_0$ виконується ланцюг нерівностей (2.25) (c тут дорівнює 0). Тоді згідно з формулами (2.76), (2.77), які доведені в теоремі 2.2, для $\rho \in \mathcal{S}_0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ldots, \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.193}$$

Нехай γ'_k – та частина дуги γ_k, яка знаходиться в області $\mathcal{S}_0$ і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а γ''_k – та її частина, яка теж знаходиться в цій області і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$. Оцінимо функцію $G_{ij}(x,t,\lambda)$ на дузі γ'_k, скориставшись формулами (3.172), (3.173), (3.169).

Врахувавши формули (3.171) і їх наслідки

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}^{*\{k-1\}*}(x,t,\lambda)) = \sum_{j=1}^{n} \hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j(x,\lambda))C_{jk}(t,\lambda), \quad k = \overline{1,n},$$

ми можемо записати

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{U}}_1(Y_1) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(Y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(Y_1) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(Y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}(x,t,\lambda)) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}(x,t,\lambda)) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}^{*\{n-1\}*}(x,t,\lambda)) \end{pmatrix},$$

де $Y_k = (y_{kij})_{i,j=1}^{l}$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків. Тепер, оскільки подібна рівність матиме місце і для визначників замість матриць, бо детермінант добутку матриць дорівнює добутку їхніх детермінантів, отримаємо, що $\hat{\Delta}(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_k)\right)_{\nu,k=1}^{n}, \quad C(\lambda) = \det\left(C_{\nu k}\right)_{\nu,k=1}^{n}.$$

Аналогічно, поряд з рівністю

$$P_{i,j}(-1)^{nl} \begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{U}}_1(Y_1) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(Y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(Y_1) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(Y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} (-1)^{nl+(\nu-1)l+k} \hat{\mathfrak{U}}_\nu(P_{kj}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ni1} & \cdots & y_{nil} \\ \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{111}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{11l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{n11}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{n1l}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{1,k-1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{1,k-1,l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{n,k-1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{n,k-1,l}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{1,k+1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{1,k+1,l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{n,k+1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(y_{n,k+1,l}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{1l1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{1ll}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{nl1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{nll}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} c_{1111} & \cdots & c_{1n1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1l1} & \cdots & c_{nnll} \end{pmatrix} =$$

$$= P_{i,j}(-1)^{rl}\begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}^{*\{n-1\}*}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}^{*\{n-1\}*}) \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}(-1)^{rl+(\nu-1)l+k}\hat{\mathfrak{U}}_\nu(P_{kj})\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \tilde{K}_{i1} & \cdots & \tilde{K}_{il} & \cdots & \tilde{K}_{il}^{*\{n-1\}*} \\ \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}_{11}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}_{1l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(\tilde{K}_{1l}^{*\{n-1\}*}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k-1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k-1,l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k-1,l}^{*\{n-1\}*}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k+1,1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k+1,l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_\nu(\tilde{K}_{k+1,l}^{*\{n-1\}*}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}_{l1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}_{ll}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(\tilde{K}_{ll}^{*\{n-1\}*}) \end{pmatrix}$$

$\forall i, j = \overline{1, l}$ можна розглядати й аналогічну рівність з визначниками замість матриць. Права частина цієї рівності дорівнюватиме визначнику $Q_{ij}(x, t, \lambda)$, бо є його розкладом за елементами останнього стовпця, а ліву частину можна подати як добуток $\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ni1} & \cdots & y_{nil} & P_{ij} \\ \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{111}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{11l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{n11}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{n1l}) & \hat{\mathfrak{U}}_1(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{1l1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{1ll}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{nl1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_1(y_{nll}) & \hat{\mathfrak{U}}_1(P_{lj}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{111}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{11l}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{n11}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{n1l}) & \hat{\mathfrak{U}}_n(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{1l1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{1ll}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{nl1}) & \cdots & \hat{\mathfrak{U}}_n(y_{nll}) & \hat{\mathfrak{U}}_n(P_{lj}) \end{vmatrix}. \tag{3.194}$$

Отже,

$$Q_{ij}(x, t, \lambda) = \tilde{Q}_{ij}(x, t, \lambda)C(\lambda).$$

Тоді формула (3.172) перепишеться у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^{nl} \frac{1}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \cdots & \tilde{Q}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{Q}_{n1} & \cdots & \tilde{Q}_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.195}$$

або

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = (-1)^{nl} \frac{\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i,j = \overline{1,l}. \tag{3.196}$$

Згідно з теоремами 3.17, 3.18

$$\tilde{K}^{(j)}(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(j)}(x,\lambda) Z_k(t,\lambda),$$

де кожен елемент квадратної матриці l-го порядку $Z_k(t,\lambda) = = (z_{kpq}(t,\lambda))_{p,q=1}^{l}$ є відношенням алгебричного доповнення елемента $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k-1)l+p)$-го стовпця у вронскіані

$$W(t) = \det \left(Y_j^{(i-1)} \right)_{i,j=1}^{n}$$

до самого визначника $W(t)$. Функції Y_j виберемо так, щоб вони разом зі своїми похідними для достатньо великих $|\rho|$ задовольняли співвідношення (3.142). Підставивши формули (3.142) замість $Y_k^{[\nu]}(t)$ у вираз для $W(t)$, а отже, $Z_k(t,\lambda)$, і скоротивши у кожному елементі цієї матриці чисельник і знаменник на ρ^l, ρ^{2l}, $\ldots$, $\rho^{(n-2)l}$, $\rho^{(n-1)(l-1)}$, $e^{l\rho\omega_s(t-a)}$, $s = \overline{1,n}$, $s \neq k$, $e^{(l-1)\rho\omega_k(t-a)}$, будемо мати

$$Z_k(t,\lambda) = e^{-\rho\omega_k(t-a)} \frac{1}{\rho^{n-1}} [\frac{\gamma_k}{\gamma}], \tag{3.197}$$

де

$$\gamma = \begin{vmatrix} E_l & E_l & \cdots & E_l \\ \omega_1 E_l & \omega_2 E_l & \cdots & \omega_n E_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{n-1} E_l & \omega_2^{n-1} E_l & \cdots & \omega_n^{n-1} E_l \end{vmatrix},$$

$\gamma_k = (\gamma_{kpq})_{p,q=1}^{l}$, γ_{kpq} – алгебричне доповнення елемента, що лежить на перетині $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k+1)l+p)$-го стовпця у визначнику γ, $[A] = A + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ при $|\rho| \to \infty$.

За формулою Фробеніуса [19, с. 56], якщо

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

A і D – квадратні матриці, $|A| \neq 0$, то

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix},$$

$$H = D - CA^{-1}B.$$

Застосуємо $n-1$ разів формулу Фробеніуса до матриці, відповідної визначнику γ. В якості матриці A в нас щоразу фігуруватиме помножена на скаляр одинична матриця l-го порядку. Матриця H складатиметься з деякої кількості тих самих блоків, що й вихідна матриця (внаслідок властивостей блочного множення матриць і того, що обернена до одиничної матриці теж є одиничною). На підставі цього, матриця M^{-1} теж складатиметься з n^2 подібних блоків. Тому $\gamma_{kpq} = 0$ для всіх k і $p \neq q$ (внаслідок зв'язку алгебричних доповнень елементів матриці з оберненою до неї).

В той же час, повинні виконуватись співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, n-2}, \\ 1, & j = n-1, \end{cases} \qquad p = \overline{1, l}.$$

Остання система має єдиний розв'язок; з іншого боку, вона задовольняється при $\gamma_{kpp}/\gamma = -\omega_k/n$, бо $\omega_k^n = -1$. Отже, формула (3.197) набуває вигляду

$$Z_k(t, \lambda) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} e^{-\rho\omega_k(t-a)}[-\omega_k E], \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.198}$$

Розглянемо матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ при $x>t$ (у випадку $x<t$ міркування будуть аналогічними); тоді останній елемент першого рядка у визначнику (3.194) буде $\tilde{K}_{ij}(x,t,\lambda)$. Помножимо групи по l стовпців визначника $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$, починаючи з $(\mu l+1)$-го, $((\mu+1)l+1)$-го, $\ldots$, $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_{\mu+1}(t), -Z_{\mu+2}(t), \ldots, -Z_n(t)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ будуть

$$\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{g=1}^{l} y_{kig}(x)z_{kgj}(t), \tag{3.199}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{g=1}^{l}\hat{\mathfrak{U}}_{\nu b}(y_{kpg})z_{kgj}(t)-\sum_{k=\mu+1}^{n}\sum_{g=1}^{l}\hat{\mathfrak{U}}_{\nu a}(y_{kpg})z_{kgj}(t),$$
$$\nu=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,l}. \tag{3.200}$$

Підставивши вирази (3.142) в нормовані форми $\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y)$, матимемо

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{U}}_{\nu a}(Y_j)&=(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\Gamma_\nu],\\ \hat{\mathfrak{U}}_{\nu b}(Y_j)&=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu],\end{aligned} \tag{3.201}$$

звідки

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_j)=\hat{\mathfrak{U}}_{\nu a}(Y_j)+\hat{\mathfrak{U}}_{\nu b}(Y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu]+e^{\rho\omega_j(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$

$\nu,j=\overline{1,n}$. Отже, на підставі нерівностей (3.193) справджуються формули

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_s)=\begin{cases}(\rho\omega_s)^{k_\nu}[\Gamma_\nu], & s=\overline{1,\mu-1},\\ (\rho\omega_s)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu]+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\}, & s=\mu,\\ (\rho\omega_s)^{k_\nu}e^{\rho\omega_s(b-a)}[\Delta_\nu], & s=\overline{\mu+1,n}.\end{cases} \tag{3.202}$$

Підставивши їх у $\tilde{\Delta}(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=\prod_{\nu=1}^{n}\rho^{lk_\nu}\prod_{j=\mu+1}^{n}e^{l\rho\omega_j(b-a)}\sum_{s=0}^{l}[\theta_s]e^{s\rho\omega_\mu(b-a)}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}\rho^{lk_\nu}\prod_{s=\mu+1}^{n}e^{l\rho\omega_s(b-a)}\theta_l\prod_{s=1}^{l}[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_s], \tag{3.203}$$

причому тут θ_s – ті самі, що і в означенні регулярних крайових умов 3.17, а ξ_s – корені рівняння (3.154).

Врахувавши (3.142), (3.198) і (3.201), ми можемо переписати (3.199), (3.200) у вигляді

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}}P_0 = \begin{cases} [0], \ i \neq j, \\ -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{\mu} e^{\rho\omega_k(x-t)}[\omega_k], \ i = j, \end{cases}$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}P_{0p} = -\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}} \left\{ \sum_{s=1}^{\mu} e^{\rho\omega_s(b-t)}[\omega_s^{k_\nu+1}\Delta_{\nu pj}] - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_s(t-a)}[\omega_s^{k_\nu+1}\Gamma_{\nu pj}] \right\}, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,l},$$

де $\Gamma_{\nu pj}$, $\Delta_{\nu pj}$ – елементи матриць Γ_ν, Δ_ν.

Підставимо тепер (3.194), (3.142), (3.198), (3.202), (3.203), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ в (3.195) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ наступним чином. На ρ^{k_ν} розділимо $((\nu-1)l+2)$-й, $((\nu-1)l+3)$-й, $\ldots$, $(\nu l+1)$-й рядок, на $e^{\rho\omega_s(b-a)}$ – $((s-1)l+p)$-ті стовпці ($s = \overline{\mu+1,n}$, $p = \overline{1,l}$) і на $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_p]$ поділимо $((\mu-1)l+p)$-ті стовпці відповідно. Тоді формула (3.195) набуде вигляду

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^{nl}}{n\rho^{n-1}\theta_l}D,$$

де перший рядок визначника $(nl+1)$-го порядку D має вигляд

$$\Big([0], \ldots, [0], e^{\rho\omega_1(x-a)}[1], [0], \ldots, [0], e^{\rho\omega_{\mu-1}(x-a)}[1], [0], \ldots,$$

$$[0], \frac{e^{\rho\omega_\mu(x-a)}[1]}{[e^{\rho\omega_1(b-a)} - \xi_i]}, [0], \ldots, [0], e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-b)}[1], [0], \ldots, [0],$$

$$e^{\rho\omega_n(x-b)}[1], [0], \ldots, [0], P_0\Big),$$

причому відмінні від $[0]$ елементи знаходяться на останньому та $((s-1)l+i)$-тих місцях, а $((\nu-1)l+p+1)$-й рядок побудовано наступним чином:

$$\Big([\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu p1}],\ \ldots,\ [\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}],\ \ldots,\ [\omega_{\mu-1}^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}],$$
$$\frac{\omega_\mu^{k_\nu}[\Gamma_{\nu p1}+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu p1}]}{[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_1]},\ \ldots,\ \frac{\omega_\mu^{k_\nu}[\Gamma_{\nu pl}+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu pl}]}{[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_l]},$$
$$[\omega_{\mu+1}^{k_\nu}\Delta_{\nu p1}],\ \ldots,\ [\omega_n^{k_\nu}\Delta_{\nu pl}],\ P_{\nu p}\Big).$$

Можна так само, як у теоремі 2.8 (стор. 119), показати, що внаслідок регулярності крайових умов знаменник $e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[1]-$ $-[\xi_p]$ $(p=\overline{1,l})$ обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді внаслідок умов (3.193) всі елементи визначника D на дузі γ_k' обмежені зверху, бо експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' має місце нерівність

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)|\leqslant M\,|\rho|^{1-n}, \tag{3.204}$$

де M – деяка стала.

Доведемо тепер, що така сама нерівність виконується і на дугах γ_k''. Для цього достатньо у визначнику $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ помножити групи по l стовпчиків, починаючи з $((\mu-1)l+1)$-го, $(\mu l+1)$-го, ..., $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_\mu(t)$, $-Z_{\mu+1}(t)$, ..., $-Z_n(t)$ відповідно і додати до останнього стовпця. Повторивши попередні міркування, легко переконатись у правильності нерівності (3.204) і на дугах γ_k''.

Таким чином, (3.204) доведено для тієї частини дуги γ_k, що лежить у секторі $\mathcal{S}_0$. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області $\mathcal{S}_\nu$, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі $\mathcal{S}_1$. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження теореми для випадку непарного n.

2) n парне; $n=2\mu$. Завдяки тому, що

$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu]+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$
$$\hat{\mathfrak{U}}_\nu(Y_{\mu+1})=(\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\{[\Gamma_\nu]+e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\Delta_\nu]\},$$

цей випадок відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз

$$\theta_l \prod_{s=1}^{2l} [e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s],$$

де ξ_s – корені рівняння (3.156). Тут $((\mu-1)l+s)$-ті стовпці потрібно поділити на $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi_s]$ $(s=\overline{1,2l})$ відповідно. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними випадку дуги γ'_k, бо на дузі γ_k мають місце нерівності $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, $\mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0$ внаслідок того, що рівняння $\omega^{2\mu}+1=0$ містить поряд з ω_j корінь $-\omega_j$ $(j=\overline{1,n})$. Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми видно, що нерівність (3.192) залишається правильною для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho-\rho_k|<\delta$ при відображенні $\lambda=-\rho^n$.

3.8.3. Розвинення функцій з області визначення оператора $\hat{M}$.

Теорема 3.20. *Функція Ґріна $G(x,t)$ диференціального оператора $\hat{M}$, породженого регулярними крайовими умовами (3.152), розвивається в рівномірно збіжний відносно x і t з $[a,b]$ ряд*

$$G(x,t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}. \tag{3.205}$$

Доведення. Користуючись теоремою 3.19 і зауваженням до неї, отримуємо оцінки (тут R_k – радіус кола Γ_k)

$$|I_{kij}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}} R_k} 2\pi R_k = \frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\left|\frac{Q_{kij}(x,t)}{\lambda_k}\right| = \left|\frac{1}{2\pi\lambda_k}\int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} n\rho^{n-1}G_{ij}(x,t,-\rho^n)d\rho\right| \leqslant \frac{nM\delta}{|\lambda_k|},$$
$$i,j=\overline{1,l},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,t) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_k(x,t)}{\lambda_k} = 0, \tag{3.206}$$

причому рівномірно відносно x і t з $[a,b]$. Внаслідок (3.191) і (3.206) буде правильною формула (3.205), що й доводить теорему.

Теорема 3.21. *Якщо всі власні значення крайової задачі (3.117), (3.152) з регулярними крайовими умовами (3.152) є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$, то для функції Ґріна диференціального оператора $\hat{M}$ за виконання умови нормованості*

$$\int_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)\mathbf{y}_\nu(x)dx = 1 \tag{3.207}$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{y}_\nu(x)\mathbf{z}_\nu^*(t)}{\lambda_\nu}. \tag{3.208}$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,t)$ у теоремі 3.20 – лишок функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення крайової задачі (3.117), (3.152) – прості нулі функції $\hat{\Delta}(\lambda)$, то згідно з формулою (3.186) має місце рівність $-Q_\nu(x,t) = \mathbf{y}_\nu(x)\mathbf{z}_\nu^*(t)$, де $\mathbf{y}_\nu(x)$, $\mathbf{z}_\nu(t)$ – власні функції спряжених операторів $\hat{M}$ і $\hat{M}^*$, відповідні власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$ і пронормовані так, щоб виконувалось співвідношення (3.207). Теорему доведено.

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої вектор-функції $\mathbf{f}(x)$.

Теорема 3.22. *Нехай $\hat{M}$ – оператор, породжений регулярними крайовими умовами і нехай всі його власні значення є простими нулями функції $\hat{\Delta}(\lambda)$. Тоді будь-яка вектор-функція $\mathbf{f}(x)$ з області визначення оператора $\hat{M}$ розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \mathbf{y}_\nu(x), \tag{3.209}$$

де при виконанні умови (3.207)

$$\alpha_\nu = \int\limits_a^b \mathbf{z}_\nu^*(t)\mathbf{f}(t)dt,$$

а $\mathbf{y}_\nu(x)$, $\mathbf{z}_\nu(x)$ *– власні функції операторів* $\hat{M}$ *і* $\hat{M}^*$, *що відповідають власним значенням* λ_ν *і* $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $\hat{M}\mathbf{f} = \varphi'$, $\hat{M}^*\mathbf{z}_\nu = \psi_\nu'$, де $\varphi, \psi_\nu \in$ $\in BV^+\left([a,b];\mathbb{C}^l\right)$. Тоді

$$\mathbf{f}(x) = \int\limits_a^b G(x,t)d\varphi(t), \quad \mathbf{z}_\nu(x) = \int\limits_a^b H(x,t)d\psi_\nu(t), \tag{3.210}$$

де $H(x,t)$ – функція Ґріна оператора $\hat{M}^*$. Підставимо в формулу (3.210) замість функції $G(x,t)$ її розвинення (3.205). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, ми можемо його інтегрувати почленно. Отже, справджується формула (3.209), де

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b \mathbf{z}_\nu^*(t)d\varphi(t). \tag{3.211}$$

Оскільки згідно з теоремою 3.16

$$G(x,t) = H^*(t,x),$$

буде виконуватись і рівність

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b G(x,t)d\varphi(t) = \int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b H^*(t,x)d\varphi(t),$$

звідки

$$\int\limits_a^b d\psi_\nu^*(x)\int\limits_a^b G(x,t)d\varphi(t) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b H(x,t)d\psi_\nu(t)\right)^* d\varphi(x).$$

Врахувавши (3.210), отримаємо співвідношення

$$\int_a^b d\psi_\nu^*(x)\mathbf{f}(x) = \int_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)d\varphi(x). \tag{3.212}$$

З іншого боку, $\hat{M}^*\mathbf{z}_\nu = \bar{\lambda}_\nu \mathbf{z}_\nu$. Тоді

$$\psi_\nu(x) = \int_a^x \bar{\lambda}_\nu \mathbf{z}_\nu(t)dt.$$

Після підстановки останньої рівності в (3.212) отримаємо з (3.211), що

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b d\psi_\nu^*(x)\mathbf{f}(x) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b \left(\bar{\lambda}_\nu \mathbf{z}_\nu(x)\right)^* \mathbf{f}(x)dx = \int_a^b \mathbf{z}_\nu^*(x)\mathbf{f}(x)dx,$$

що й потрібно було довести.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоневич А. Б. Об общем методе построения алгебр обобщённых функций / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318, № 2. – С. 267–270.
2. Антосик П. Теория обобщённых функций : пер. с англ. / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М. : Мир, 1976. – 311 с.
3. Асадиллин Н. М. Об асимптотике решений сингулярной системы дифференциальных уравнений в окрестности особенности / Н. М. Асадиллин, А. Я. Гилимьянова // Труды Средневолжского мат. общества. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 76–77.
4. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи : пер. с англ. / Ф. Аткинсон. – М. : Мир, 1968. – 749 с.
5. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве : в 2-х т. / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – М. : Наука, 1978. – Т. 2. – 288 с.
6. Ахметов М. У. Ранговые признаки управляемости для краевой задачи линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / М. У. Ахметов, Р. Д. Сеилова // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 723–730.
7. Ахметов М. У. Управление линейными импульсными системами / М. У. Ахметов, Н. А. Перестюк, М. А. Тлеубергенова // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 3. – С. 307–314.
8. Ашордиа М. Т. Об однозначной разрешимости задачи Коши для системы обобщённых обыкновенных дифференциальных уравнений / М. Т. Ашордиа // Краевые задачи. – Пермь : ППИ. – 1986. – С. 65–70.
9. Байдак Д. А. Вопросы обоснования динамического метода и применения двусторонних оценок при исследовании малых колебаний и устойчивости равновесия упругих стержней : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.023 /

Д. А. Байдак ; Львов. гос. ун-т им. И. Франко. – Львов, 1973. – 14 с.

10. Байдак Д. А. Обоснование динамического метода исследования некоторых двумерных систем / Д. А. Байдак, Л. М. Зорий // Мат. методы и физ.-мех. поля. – К. : Наукова думка, 1977. – Вып. 5. – С. 93–96.
11. Байдак Д. А. Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок / Д. А. Байдак, Л. М. Зорій // ДАН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 6. – С. 548–551.
12. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Учен. зап. МГУ. – 1951. – Вып. 148, т. 4. – С. 69–107.
13. Вибрации в технике : справочник в 6 т. / под ред. В. В. Болотина. – Т. 1. – М. : Машиностроение, 1978. – 352 с.
14. Винокуров В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Изв. РАН. Сер. Мат. – 2000. – Т. 64, № 4. – С. 47–108.
15. Винокуров В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Дифференц. уравн. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 735–751.
16. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 318 с.
17. Власій О. О. Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь / О. О. Власій // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 540. – С. 62–64.
18. Власій О. О. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах / О. О. Вла-

сій, В. В. Мазуренко // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 73–86.

19. Гантмахер Ф. Р. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. – М. : ГТТИ, 1951. – 318 с.

20. Гельфанд И. М. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве» / И. М. Гельфанд // Учен. зап. МГУ. – 1951. – Вып. 148, т. 4. – С. 224–225.

21. Головатый Ю. Д. Асимптотика собственных значений и собственных функций в задачах о колебаниях среды с сингулярным возмущением плотности / Ю. Д. Головатый, С. А. Назаров, О. А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1988. – Т. 43, вып. 5 (263). – С. 189–190.

22. Головатий Ю. Д. Оператор Шредінгера з δ'-потенціалом / Ю. Д. Головатий, С. С. Манько // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 16–21.

23. Головатий Ю. Д. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами / Ю. Д. Головатий, С. С. Манько // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 173–207.

24. Голощапова Н. И. Одномерный оператор Шрёдингера с δ- и δ'-взаимодействиями / Н. И. Голощапова, Л. Л. Оридорога // Мат. заметки. – 2008. – Т. 84, № 1. – С. 127–131.

25. Голощапова Н. И. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями / Н. И. Голощапова, В. П. Заставный, М. М. Маламуд // Мат. заметки. – 2011. – Т. 90, № 1. – С. 151–156.

26. Гомилко А. М. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений / А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1460–1469.

27. Гомилко А. М. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения / А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 384–396.

28. Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. – 2009. – № 4. – С. 19–24.

29. Горюнов А. С. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Доповіді НАН України. – 2009. – № 9. – С. 27–31.

30. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.

31. Данфорд Н. Линейные операторы : пер. с англ., в 3-х т. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : Мир, 1966. – Т. 2: Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. – 1064 с.

32. Данфорд Н. Линейные операторы : пер. с англ., в 3-х т. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – Т. 3: Спектральные операторы. – 664 с.

33. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена / В. Я. Дерр // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 1861–1872.

34. Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщёнными функциями в коэффициентах / В. Я. Дерр // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298, № 2. – С. 269–272.

35. Дерр В. Я. О применении квазидифференциальных уравнений в теории линейных многоточечных задач : автореф.

дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / В. Я. Дерр. – Свердловск, 1990. – 33 с.

36. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. – М. : Физматлит, 2004. – 272 с.

37. Егоров Ю. В. К теории обобщённых функций / Ю. В. Егоров // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5 (275). – С. 3–40.

38. Завалищин С. Т. О дифференциальных уравнениях, содержащих производные разрывных функций на импульсные / С. Т. Завалищин, Ю. В. Орлов // Дифференц. уравн. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1614–1616.

39. Завалищин С. Т. Импульсные процессы, модели и приложения / С. Т. Завалищин, Ю. В. Орлов. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

40. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навч. посібник / Ю. К. Рудавський, П. І. Каленюк, Р. М. Тацій і ін. – Львів : В-во НУ «Львівська політехніка», 2001. – 244 с.

41. Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К. Я. и др. – К. : Наукова думка, 1981. – 272 с.

42. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям : пер. с нем. / Э. Камке. – СПб : Лань, 2003. – 576 с.

43. Кац И. С. О спектральных функциях струны / И. С. Кац, М. Г. Крейн // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Аткинсон Ф. – М. : Мир, 1968. – С. 648–731.

44. Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов / Г. М. Кесельман // Изв. вузов СССР. Сер. Математика. – 1964. – № 2. – С. 82–93.

45. Кісілевич В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь : автореф. дис. ... канд.

фіз.-мат. наук : 01.01.02 / В. В. Кісілевич ; Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 1992. – 18 с.

46. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями : пер. с нем. / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.

47. Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряжённых операторов / В. Д. Кошманенко. – К. : Наукова думка, 1993. – 176 с.

48. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения / М. Г. Крейн // I – Математ. сборник. – 1947. – Т. 20 (62). – С. 431–495; II – Математ. сборник. – 1947. – Т. 21 (63). – С. 365–404.

49. Лазарян В. Я. Обобщённые функции в задачах механики / В. Я. Лазарян, С. И. Конашенко. – К. : Наукова думка, 1974. – 192 с.

50. Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения, II / А. Ю. Левин // Вестн. Ярославского ун-та. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144.

51. Левитан Б. М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

52. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 400 с.

53. Лянце В. Э. Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси / В. Э. Лянце // Линейные дифференциальные операторы / Наймарк М. А. – М. : Наука, 1969. – С. 443–498.

54. Мазуренко В. В. Про звідність дискретно-неперервної задачі до узагальненої схеми Аткінсона / В. В. Мазуренко // Доповіді НАН України. – 2001. – № 8. – С. 19–22.

55. Мазуренко В. В. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами /

В. В. Мазуренко, Р. М. Таций // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 3. – С. 328–336.

56. Манько С. С. Асимптотика спектрів диференціальних операторів другого та четвертого порядків зі сингулярними потенціалами : автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / С. С. Манько ; Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 2011. – 20 с.

57. Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі / О. В. Махней // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25.

58. Махней О. В. Узагальнений несамоспряжений оператор другого порядку на півосі // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 92–101.

59. Махней О. В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості / О. В. Махней // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 147–156.

60. Махней А. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора / А. В. Махней, Р. М. Таций // Дифференц. уравн. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1044–1051.

61. Махней О. В. Асимптотика розв'язків сингулярного квазідиференціального рівняння на скінченному проміжку / О. В. Махней // Вісник Національного університету «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки. – 2004. – № 518. – С. 38–51.

62. Махней О. В. Розвинення за власними функціями сингулярного диференціального оператора / О. В. Махней // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 4. – С. 88–94.

63. Махней О. В. Розвинення за власними вектор-функціями у випадку простих власних значень сингулярного квазідифе-

ренціального оператора / О. В. Махней, Р. М. Тацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 16–27.

64. Махней А. В. Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора / А. В. Махней, Р. М. Таций // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 179–187.

    (Makhnei A. V. Eigenfunction expansions for a singular quasi-differential operator with simple eigenvalues / A. V. Makhnei, R. M. Tatsii // Differential Equations. – 2006. – Vol. 42, No 2. – Pp. 193–201.)

65. Махней О. В. Асимптотика власних значень крайової задачі для векторного сингулярного квазідиференціального рівняння / О. В. Махней, Р. М. Тацій // Вісник Одеськ. нац. ун-ту: Матем. і мех. – 2007. – Т. 12, вип. 7. – С. 110–120.

66. Махней О. В. Функція Ґріна крайової задачі для векторного сингулярного диференціального рівняння / О. В. Махней // Вісник Прикарпатського університету: Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 38–45.

67. Махней О. В. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння / О. В. Махней, Р. М. Тацій // Математичні студії. – 2008. – Т. 29, № 2. – С. 165–174.

68. Махней А. В. Функция Грина краевой задачи для векторного квазидифференциального уравнения с мерами и ее свойства / А. В. Махней, Р. М. Таций // Актуальные проблемы математики : сб. научн. трудов. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2008. – С. 120–133.

69. Махней А. В. Асимптотика собственных значений краевой задачи для векторного сингулярного дифференциального уравнения / А. В. Махней, Р. М. Таций // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 788–796.

(Makhnei A. V. Asymptotics of the eigenvalues of a boundary value problem for a vector singular differential equation / A. V. Makhnei, R. M. Tatsii // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45, No 6. – Pp. 805–813.)

70. Махней О. В. Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння / О. В. Махней // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки. – 2009. – № 643. – С. 64–72.

71. Махней О. В. Розвинення за власними вектор-функціями у випадку простих власних значень сингулярного диференціального оператора / О. В. Махней, Р. М. Тацій // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 94–105.

72. Микитюк Я. В. Операторы со спектральными особенностями : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Я. В. Микитюк ; Ин-т прикладной математики и механики АН УССР. – Донецк, 1981. – 16 с.

73. Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ / В. П. Михайлов // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144, № 5. – С. 981–984.

74. Молибога В. Н. О сингулярной задаче Штурма-Лиувилля / В. Н. Молибога // Матеріали IX-ої Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. – К. : НТУУ «КПІ», 2002. – С. 139.

75. Мышкис А. Д. Системы с толчками в заданные моменты времени / А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // Мат. сб. – 1967. – Т. 74, № 2. – С. 202–208.

76. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

77. Нижник Л. П. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева / Л. П. Нижник // Функц. ан. и его прил. – 2006. – Т. 40, № 2. – С. 74–79.

78. Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием / Л. П. Нижник // Функц. ан. и его прил. – 2003. – Т. 37,

№ 1. – С. 85–88.

79. Образцов И. Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем / И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов. – М. : Машиностроение, 1973. – 659 с.

80. Перестюк Н. А. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота и нулевыми элементами спектра / Н. А. Перестюк, В. Н. Бобочко // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 12–17.

81. Перестюк Н. А. Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания / Н. А. Перестюк, Е. В. Остапенко // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 8. – С. 1112–1118.

82. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977. – 444 с.

83. Радзиевский Г. В. Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения / Г. В. Радзиевский // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 811–836.

84. Радзиевский Г. В. Асимптотика собственных значений регулярной краевой задачи / Г. В. Радзиевский // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 4. – С. 483–519.

85. Радыно Н. Я. О решениях линейных дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, содержащих медленно растущие распределения / Н. Я. Радыно // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. н. – 1999. – № 1. – С. 18–22.

86. Решаемые модели в квантовой механике : пер. с англ. / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден. – М. : Мир, 1991. – 566 с.

87. Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряжённые расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Ф. С. Рофе-Бекетов // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184, № 5. – С. 1034–1037.

88. Рыхлов В. С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром / В. С. Рыхлов // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 96–108.

89. Савчук А. М. О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80, вып 6. – С. 864–884.

90. Савчук А. М. Метод отображений в обратных задачах Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук // Дифференц. уравн. и динам. системы. Труды Моск. инст. им. В. А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 243–248.

91. Савчук А. М. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Функц. анализ и его прил. – 2010. – Т. 44, вып 4. – С. 34–53.

92. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К. : Наукова думка, 1987. – 287 с.

93. Самойленко А. М. Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / Самойленко А. М., А. А. Бойчук // Укр. мат. ж. – 1992. – Т. 44, № 4. – С. 564–568.

94. Самойленко А. М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, М. Илолов // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 319, № 1. – С. 63–67.

95. Самойленко А. М. Проблема «биений» в импульсных системах : препр. / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, С. И. Трофимчук ; АН УССР. Ин-т мат. – 1990. – № 11. – С. 1–46.

96. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравне-

ния : в 2 т. ; пер. с итал. / Дж. Сансоне. – М. : Изд-во иностр. л-ры, 1953. – Т. 1. – 348 с.

97. Сесекин А. Н. О множествах разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений / А. Н. Сесекин // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 6. – С. 83–89.

98. Сесекин А. Н. О нелинейных дифференциальных уравнениях в классе функций ограниченной вариации / А. Н. Сесекин // Дифференц. уравн. – 1989. – Т. 25, № 11. – С. 56–61.

99. Сесекин А. Н. О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последействием / А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова // Автомат. и телемех. – 2009. – № 4. – С. 31–40.

100. Слюсарчук В. Е. Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / В. Е. Слюсарчук // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 7. – С. 954–964.

101. Стасюк М. Ф. До дослідження коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів / М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // ДАН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 43–47.

102. Стасюк М. Ф. Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами / М. Ф. Стасюк // ДАН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 33–36.

103. Стасюк М. Ф. Структура решений обобщенного квазидифференциального уравнения 2-го порядка / М. Ф. Стасюк, Р. М. Таций // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1984. – № 182. – С. 120–122.

104. Стасюк М. Ф. Корректные дифференциальные системы с мерами / М. Ф. Стасюк, Р. М. Таций // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – № 222. – С. 89–90.

105. Стасюк М. Ф. Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра / М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1990. – № 242. – С. 91–92.

106. Стасюк М. Ф. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами – узагальненими функціями вищих порядків / М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1991. – № 251. – С. 111–113.

107. Стасюк М. Ф. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами / М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Фізико-математичні науки. – 2006. – № 566. – С. 33–40.

108. Сторож О. Г. Асимптотические формулы для собственных значений оператора, родственного дифференциальному, нечётного порядка / О. Г. Сторож // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 4. – С. 744–746.

109. Сторож О. Г. Розклад за власними функціями скінченновимірних самоспряжених збурень сингулярних диференціальних операторів / О. Г. Сторож // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 51–54.

110. Сторож О. Г. Деякі спектральні властивості диференціально-граничних операторів парного порядку в просторі вектор-функцій / О. Г. Сторож, О. Б. Шувар // Мат. мет. і фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 7–15.

111. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин. – Петроград, 1917. – 308 с.

112. Таций Р. М. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения / Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

113. Тацій Р. М. Про порядок узагальнених функцій в пра-

вих частинах квазідиференціальних рівнянь / Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок // ДАН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 1. – С. 16–19.

114. Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами : автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Р. М. Тацій ; Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

115. Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння : препр. / Р. М. Тацій ; АН України ІППММ ; № 2-94. – Львів, 1994. – С. 1–54.

116. Тацій Р. М. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич // Вісник ДУ «Львівська політехніка»: Прикладна математика. – 1996. – № 229. – С. 165–170.

117. Тацій Р. М. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич // Вісник ДУ «Львівська політехніка»: Прикладна математика. – 1998. – № 346. – С. 120–124.

118. Тацій Р. М. Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич // Вісник ДУ «Львівська політехніка»: Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 163–173.

119. Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку / Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 43–53.

120. Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку / Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко // Математичні студії. – 2001. – Т. 16, № 1. – С. 61–75.

121. Тацій Р. М. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич

// Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 518. – С. 30–35.

122. Тацій Р. М. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування / Р. М. Тацій, О. О. Власій // Доповіді НАН України. – 2007. – № 9. – С. 17–20.

123. Тацій Р. М. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2009. – № 10. – С. 7–37.

124. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич : Коло, 2011. – 301 с.

125. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.

126. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

127. Халанай А. Качественная теория импульсных систем : пер. с рум. / А. Халанай, Д. Векслер. – М. : Мир, 1971. – 312 с.

128. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями / А. П. Хромов // Матем. сборник. – 1966. – Т. 70, № 3. – С. 310–329.

129. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій, М. Живічинські // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 18–27.

130. Чуйко С. М. Обобщённый оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием / С. М. Чуйко // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 1132–1135.

131. Шин Д. Теорема существования квази-дифференциального уравнения n-го порядка / Д. Шин // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 515–518.

132. Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu$, $I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$ / Д. Шин // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 519–522.

133. Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве / Д. Шин // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18, № 8. – С. 523–526.

134. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка / Д. Шин // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49), № 3. – С. 479–527.

135. Шувар О. Б. Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі вектор-функцій / О. Б. Шувар // Вісник НУ «Львівська політехніка»: Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 54–57.

136. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

137. Albeverio S. Singular pertubations of differential operators and solvable Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge : Univ. Press, 2000.

138. Antosik P. Products of measures and functions of finite variations / P. Antosik, J. Ligeza // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, September 29 – October 6, 1975. – Sofia, 1979. – P. 20–26.

139. Aragona I. On the $\bar{\partial}$-Neumann Problem for Generalized Functions / I. Aragona, I. F. Colombo // J. of math. anal. and appl. – 1985. – 110. – P. 179–199.

140. Birkhoff G. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter /

G. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 219–231.

141. Birkhoff G. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations / G. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 373–395.

142. Colombeau J. F. New generalized functions and multifunction of distributions / J. F. Colombeau. – Amsterdam : Elsevier Science Publishers, 1989. – 372 p.

143. Everitt W. N. On some properties of matrices associated with linear ordinary quasi-differential equations / W. N. Everitt, D. Jennifer // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. – 1984. – Vol. 96. – P. 211–220.

144. Everitt W. N. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line / W. N. Everitt, A. Zettl // Proc. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 64, № 3. – P. 524–544.

145. Fang H. The existence of periodic solutions of impulsive differential equations of mixed type / H. Fang // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2000. – Vol. 21, № 3. – P. 291–296.

146. Goloschapova N. On the negative spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions / N. Goloschapova, L. Oridoroga // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – V. 67. – P. 1–14.

147. Golovaty Yu. D. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials / Yu. D. Golovaty, R. O. Hryniv // J. Phys. A: Math. Theory. – 2010. – V. 43, № 15. – 155204 (14 p).

148. Hildebrandt T. H. On systems of linear differentio-Stiltjes-integral equations / T. H. Hildebrandt // Illinois Journ. Math. – 1959. – Vol. 3, № 3. – P. 352–373.

149. Hobson E. W. On a general convergence theorem and the theory of the representation of a function by series of normal

functions / E. W. Hobson // Proc. of the London Math. Soc. – 1908. – Vol. 6, № 2. – P. 349–395.

150. Hryniv R. O. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials / R. O. Hryniv, Y. V. Mykytyuk // Journal of Functional Analysis. – 2006. – Vol. 238. – P. 27-–57.

151. Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems / C. Frayer, R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, P. A. Perry // Inverse Problems. – 2009. – V. 25, № 11. – 115007 (25 p).

152. Kneser A. Die Integraleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik / A. Kneser. – Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges, 1922. – 292 s.

153. Konechnaya N. N. On a class of operators related to second-order differential equations / N. N. Konechnaya, K. A. Mirzoev // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2006. – Vol. 13, № 1. – Pp. 55—63.

154. Kostenko A. S. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set / A. S. Kostenko, M. M. Malamud // J. Differ. Equations. – 2010. – V. 241, № 2. – P. 253–304.

155. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czech. Math. J. – 1957. – Vol. 7, № 3. – P. 418–449.

156. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czech. Math. J. – 1958. – Vol. 8, № 3. – P. 360–388.

157. Ligeza J. Cauchy's problem for system of linear differential equations with distributional coefficients / J. Ligeza // Coloq. math. – 1975. – Vol. 33, № 2. – P. 295–303.

158. Ligeza J. On distributional solution of some systems of linear differential equations / J. Ligeza // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, № 1. – P. 37–41.

159. Ligeza J. The existence and uniqueness of distributional solutions of some systems of non-linear differential equations / J. Ligeza // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, № 1. – P. 30–36.

160. Ligeza J. Generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombean algebra / J. Ligeza // Math. Bochem. – 1993. – Vol. 118, № 2. – P. 123–146.

161. Makhney O. V. The structure of Cauchy function of a vector quasidifferential equation / O. V. Makhney, R. M. Tatsiy // Matematychni Studii. – 2004. – V. 21, № 2. – P. 221–224.

162. Mikhailets V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topol. – 2008. – V. 14, № 2. – P. 184–200.

163. Mikhailets V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topol. – 2009. – V. 15, № 1. – P. 31–40.

164. Ogurisu O. On the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator with point interactions / O. Ogurisu // Lett. Math. Phys. – 2008. – V. 85. – P. 129–133.

165. Pandit S. G. Differential systems with impulsive perturbations / S. G. Pandit // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 86, № 2. – P. 553–560.

166. Pandit S. G. Differential systems involving impulses / S. G. Pandit, S. Deo // Lect. Notes Math. – 1982. – Vol. 954.

167. Schwabik S. Differential and Integral Equations / S. Schwabik, M. Tvrdy, O. Vejvoda. – Praha: Akademia, 1979. – 249 p.

168. Schwabic S. Generalized differential equations. Fundamental results / S. Schwabic. – Praha: Akademie, 1985. – 103 p. (Rozprapy Ceskoslovenske akademie ved: Rada matemat. a prirod. ved, 1985, № 6).

169. Schwabic S. Generalized differential equations. Special results / S. Schwabic. – Praha: Akademie, 1989. – 79 p. (Rozprapy Ceskoslovenske akademie ved: Rada matemat. a prirod. ved, 1989, № 3).

170. Šeba P. Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – V. 24, № 1. – P. 111–120.

171. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden. – 2nd revised ed. – Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.

172. Stone M. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff / M. Stone // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – Vol. 28. – P. 695–761.

173. Tamarkine J. D. Sur quelques points de la théory des équations differentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier / J. D. Tamarkine // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1912. – Vol. 34. – P. 345–382.

174. Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators / A. Zettl // Rocky Mount. J. Math. – 1975. – Vol. 5, № 3. – P. 453–474.

175. Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory / A. Zettl, W. N. Everitt // Nieuw arch. wisk. – 1979. – Vol. 27, № 3. – P. 363–397.

176. Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential / A. V. Zolotaryuk // Adv. Sci. Lett. – 2008. – V. 1. – P. 187–191.

177. Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunneling across the δ'-potential / A. V. Zolotaryuk // Phys. Lett. A. – 2010. – V. 374, № 15–16. – P. 1636–1641.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Олександр Володимирович Махней
Роман Мар'янович Тацій

СИНГУЛЯРНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Дизайн обкладинки *Олеся Тацій*
Технічний редактор *Олександр Махней*

Підписано до друку 13.02.2012. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Гарнітура CM Roman. Умовн. друк. арк. 22,5.
Тираж 100. Зам. № 43 від 13.02.2012.

Видавництво «Сімик»
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. Незалежності, 46/111,
тел.: (03422) 3-25-91, e-mail: symyk@com.if.ua.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта
Видавничої справи серія ІФ № 11 від 27.03.2001 року.

Віддруковано: Приватний підприємець Голіней О. М.
76000, м. Івано-Франківськ,
вул. Галицька, 128,
тел.: (0342) 58-04-32.