Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний університет "Львівська політехніка"
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

V ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ

(19-22 вересня 2013 року, Івано-Франківськ)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Івано-Франківськ

Пам'яті
Богдана Васильовича Василишина
присвячується

19 червня 2012 року колектив Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника зазнав непоправної втрати. Раптово обірвалося життя колишнього багаторічного проректора навчального закладу, завідувача кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики, професора Богдана Васильовича Василишина.

Богдан Васильович народився 2 лютого 1941 року в селі Опришівці Станіславської (нині Івано-Франківської) області. У 1962 році закінчив фізико-математичний факультет Івано-Франківського державного педагогічного інституту. Отримавши диплом з відзнакою, того ж року був зарахований до аспірантури кафедри обчислювальної математики Київського державного університету імені Тараса Шевченка за спеціальністю "обчислювальна математика".

У 1968 році Богдан Василишин захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук на тему "Розв'язування крайових задач плоскої теорії пружності при великій кількості вузлів сітки". Після закінчення навчання в аспірантурі працював асистентом, старшим викладачем, з 1971 року – доцентом, завідувачем кафедри математики Івано-Франківського державного педагогічного інституту імені Василя Стефаника. З 1979 року – проректор з навчальної роботи. З жовтня 1993 року до листопада 2007 року Б.В. Василишин працював на посаді першого проректора Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. З 1996 р. Богдан Васильович Василишин – заслужений працівник народної освіти України. Він є автором багатьох наукових статей, підручників та навчально-методичних посібників. В останні роки життя Богдан Васильович завідував кафедрою диференціальних рівнянь і прикладної математики, був членом редколегії наукового журналу "Карпатські математичні публікації".

На кафедрі і на факультеті математики та інформатики значна частина викладачів вважає Богдана Васильовича своїм учителем і наставником. Богдан Васильович був майстерним лектором. Студенти кількох поколінь ще довго пам'ятатимуть його неперевершені лекції з математичного аналізу, чисельних методів.

До останнього моменту життя Богдана Васильовича його наполеглива праця приносила вагомі здобутки. Неоціненним внеском у розвиток факультету та університету є відкриття спеціальності "прикладна математика", отримання сертифікатів ліцензії і акредитації на здобуття освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавра, спеціаліста та магістра. Богдан Васильович Василишин був одним з ініціаторів регулярного проведення Всеукраїнської наукової конференції "Нелінійні проблеми аналізу".

Богдан Василишин був справжнім патріотом України, любив рідну мову і свій край.

Задача з контактним розривом для гіперболічної квазілінійної системи

Андрусяк Р.В.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)
Пелюшкевич О.В.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Нехай $\Omega_T^- = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < t < T, s_1(t) < x < 0\Big\}$, $\Omega_T^+ = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < t < T, 0 < x < s_2(t)\Big\}$, де s_1, s_2 – задані гладкі функції, такі що $s_1(0) = s_2(0) = 0$, $s_1(t) < 0 < s_2(t)$, $0 < t \le T$, $s_1'(0) < 0 < s_2'(0)$.

В кожній із областей будемо розглядати гіперболічну квазілінійну систему, що не зводиться до інваріантів Рімана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11}(x,t,u)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{13}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = b_1(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a_{22}(x,t,u)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + a_{23}(x,t,u)\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = b_2(x,t,u), \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = b_3(x,t,u), \end{cases} \tag{1}$$

де $u = (u_1, u_2, u_3)$– шукані функції, а a_{ij}, b_j – відомі дійснозначні функції, які неперервні в кожній із областей Ω_T^- і Ω_T^+ та допускають неперервне продовження на замикання цих областей. Доповнимо систему (1) початковими умовами

$$u(-0,0) = v^-, \quad u(+0,0) = v^+. \tag{2}$$

Припустимо, що мають місце нерівності

$$\begin{array}{ll} a_{11}(-0,0,v^-) < s_1'(0); & a_{11}(+0,0,v^+) < s_1'(0); \\ a_{22}(-0,0,v^-) > s_2'(0); & a_{22}(+0,0,v^+) > s_2'(0). \end{array}$$

Нехай розв'язок u задовольняє крайові умови

$$u_1(s_2(t),t) = K_1^+(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \tag{3}$$

$$u_2(s_1(t),t) = K_2^-(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \tag{4}$$

$$u_3(s_1(t),t) = K_3^-(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)), \tag{5}$$

$$u_3(s_2(t),t) = K_3^+(t, u_1(s_1(t),t), u_2(s_2(t),t)) \tag{6}$$

та умови спряження

$$u_1(-0,t) = K_1^-(t, u_1(+0,t), u_2(-0,t), u_3(-0,t), u_3(+0,t)), \tag{7}$$

$$u_2(+0,t) = K_2^+(t, u_1(+0,t), u_2(-0,t), u_3(-0,t), u_3(+0,t)). \tag{8}$$

Для задачі (1)–(8) доведено теорему існування і єдиності локального узагальненого розв'язку.

e-mail: ru.andrusyak@gmail.com, olpelushkevych@ukr.net

Диференціювання з регулярними значеннями в нетерових кільцях

Артемович О.Д.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Лукашенко М.П.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Нехай R – асоціативне кільце з 1. В [1] досліджувалися кільця R, які мають ненульове диференціювання d таке, що для кожного $x \in R$ або $d(x) = 0$, або $d(x)$ – оборотний елемент в R. В [2] результати попередньої роботи узагальнено на випадок, коли $x \in U$, де U – деякий ідеал Лі кільця R. Нами охарактеризовано напівпервинні праві нетерові кільця характеристики $\neq 2$ такі, що для кожного $x \in R$ $d(x) = 0$ або $d(x)$ – регулярний елемент.

[1] J. Bergen, I. N. Herstein,C. Lanski. Derivations with invertible values, Canad. J. Math., 35(1983), 300-310.
[2] J. Bergen, L. Carini. Derivations with invertible values on a Lie ideal, Canad. Math. Bull. Vol.31(1988), 103-110.

e-mail: bilochka.90@mail.ru

Геометрична реалізація гіперпросторів нечітких підмножин в польському, зв'язному та локально-зв'язному, ніде не локально-компактному просторі в ендографній та сендографній метриці

Атаманюк Б.В.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

В [1] введено поняття ендографної та сендографної метрики, подано означення гіперпростору нечітких підмножин на компактах і доведено дві теореми про їх геометричну реалізацію як гомеоморфних гільбертовому простору L_2. Автором в [2] раніше була доведена теорема про геометричну реалізацію гіперпростору нечітких підмножин для польських, зв'язних та локально-зв'язних, ніде не локально-компактних просторів. Як розширення одержаних результатів доводяться дві теореми про геометричну реалізацію гіперпростору нечітких підмножин в некомпактному випадку для ендографної та сендографної метрики, а саме: доводиться гомеоморфність обох гіперпросторів гільбертовому простору L_2.

Автором також доведена теорема про збереження спектральної рухомості категорії Мардешича при топологічному спряженні.

[1] Lili Zhang. The topological structure of fuzzy sets with sendograph metric, Topology and its Applications (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2013.05.024.

[2] Атаманюк Б.В. Гіперпростори нечітких множин. Вісник Прикарпатського університету. Серія Математика. Фізика. Випуск II. Івано-Франківськ 2001. – С. 34–45.

e-mail: bogdat@ukr.net

Про деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Баран О.Є.
(ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України)

Розглянемо функціональний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з нерівнозначними змінними вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i(k)}^2 z_{i_k}}{1}, \tag{1}$$

де $i(k)$ – мультиіндекс, $i(k)\in I=\{i(k):\ i(k)=i_1i_2\dots i_k;\ 1\le i_p\le i_{p-1};\ p=\overline{1,k};\ k\ge 1,\ i_0=N\}$, N – максимальна кількість гілок розгалуження, $c_{i(k)}$ – комплексні числа, $z=(z_1,z_2,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N$.

Задамо відображення $l: I\to\mathbb{N}$ за таким правилом: $l=l(i(k))=\sum\limits_{s=1}^{k}\delta_{i_k}^{i_s}$, де $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера. Розіб'ємо множину I на підмножини, які попарно не перетинаються: $I_1=\{i(k):\ i(k)\in I,\ l=1,\ k\ge 1\}$, $I_2=\{i(k):\ i(k)\in I,\ l-\text{парне},\ k\ge 2\}$, $I_3=\{i(k):\ i(k)\in I,\ l-\text{непарне},\ l>1,\ k\ge 3\}$.

Теорема. *Нехай для дробу (1)*
а) $N>1$ і елементи $c_{i(k)}$ задовольняють умови:

$$|c_{i(k)}\pm i\Gamma_{1,i_k}|\le\rho_{1,i_k},\ (\rho_{1,i_k}+|\Gamma_{1,i_k}|)^2\le r_1/(\beta(i_{k-1}-1)),\ \textit{якщо } i(k)\in I_1,$$

$$|c_{i(k)}\pm i\Gamma_{3,i_k}|\le\rho_{3,i_k},\ (\rho_{3,i_k}+|\Gamma_{3,i_k}|)^2\le r/\beta,\ \textit{якщо } i(k)\in I_3, \tag{2}$$

$$|c_{i(k)}\pm i\Gamma_{2,i_k}|\ge\rho_{2,i_k},\ (\rho_{2,i_k}-|\Gamma_{2,i_k}|)^2\ge (2+r_1)(1+r_1+r)/\alpha,\ \textit{якщо } i(k)\in I_2, \tag{3}$$

або
б) $N=1$ і елементи $c_{i(k)}$ задовольняють умови (2), якщо $i(k)\in I_1\cup I_3$, або (3), якщо $i(k)\in I_2$,
де $r_1=0$ при $N=1$ і $0<r_1<(1-3r)/(1+r)$ при $N>1$, $0<r<1/3$, $\Gamma_{j,s}\in\mathbb{C}$, $\rho_{j,s}>0$, $j=\overline{1,3}$, $s=\overline{1,N}$, $0<\alpha\le\beta$.

Тоді ГЛД (1) рівномірно збігається в замкненій області

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}^N:\ \alpha\le|z_s|\le\beta,\ s=\overline{1,N}\right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(z)$ і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f(z)-f_m(z)|\le MC_{N+m}^{N-1}q^{m+1},$$

де $f_m(z)$ – m-ий підхідний дріб (1), $M=1-r$ при $N=1$ і $M=\max\limits_{1\le p\le N}(r_1/r)^p$ при $N>1$, $q=\sqrt{(2+r_1)r/(1-r_1-r)}$.

e-mail: boe13@ukr.net

Спектральні властивості деяких граничних задач для диференціально-операторних рівнянь з інволюцією

Баша А.А., Баранецький Я.О.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Вивчається нелокальна задача з оператором інволюції, який входить у рівняння задачі та граничні умови задачі. Випадки ізоспектральних збурень в граничних умовах детально вивчались у [1].

Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір, $A\colon H \to H$, $A = A^* > 0$, $\sigma_p(A) = \{z_k\colon z_k \sim a(k^\alpha),\, k \in \mathbb{N},\, a, \alpha > 0\}$, $V(A) = \{v_m \in H\colon Av_m = z_m v_m\}$ – система власних функцій оператора A, що утворює ортонормовану базу в просторі H.

$$H_1 \equiv (L_2\,(0,1)\,; H),$$
$$H_2 \equiv \left\{v \in H_1, \quad D_t^2 v\,(t) \in H_1, \quad A^2 v\,(t) \in H_1\right\},$$

де D_t – сильна похідна в H_1.

Розглянемо спектральну задачу

$$-D_t^2 u\,(t) + \beta D_t\left(t - \tfrac{1}{2}\right) + D_t b\,(t)\,(u\,(t) - u\,(1-t)) + A^2 u(t) = \lambda u\,(t)\,, \quad (1)$$
$$\beta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} u(0) - u(1) = 0, \\ u'(0) - u'(1) - \beta\,(u'(0) + u'(1)) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Властивості цієї спектральної задачі описує така теорема:

Теорема. *1. Власними значеннями задачі (1), (2) є числа вигляду*

$$\lambda_{k,m} = (2\pi k)^2 + z_m^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}).$$

2. Система V власних функцій задачі (1), (2)

$$\begin{cases} v_{0,m}^0 = v_m, & n \in \mathbb{N}, \\ v_{k,m}^0 = \sqrt{2}\cos 2k\pi t v_m, & k = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}, \\ v_{k,m}^1 = \sqrt{2}\sin 2k\pi t\left(1 + 2\beta(t - \tfrac{1}{2})\right) v_m, & k = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

утворює базу Ріса в просторі H_1.

3. Біортогональна система функцій W має вигляд

$$\begin{cases} w_{0,m}^0 = v_m, & n \in \mathbb{N}, \\ w_{k,m}^0 = \sqrt{2}\cos 2k\pi t\left(1 + 2\beta(t - \tfrac{1}{2})\right) v_m, & k = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}, \\ v_{k,m}^1 = \sqrt{2}\sin 2k\pi v_m, & k = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

[1] Баранецкий Я. Е., Каленюк П. И., Нитребич З. Н. Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 229 с.

e-mail: Angelaoxyz@gmail.com, Baryarom@ukr.net

Про усереднення в багаточастотних системах диференціальних рівнянь зі сталим і лінійним запізненням

Бігун Я.Й.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Розглянуто систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x_\Delta, x_\Theta, \varphi_\Delta, \varphi_\Theta), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, x_\Delta, x_\Theta, \varphi_\Delta, \varphi_\Theta),$$

де $\tau \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $x \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$; $x_\Delta = (x_{\delta_1}, \ldots, x_{\delta_r})$, $0 \le \delta_1 < \cdots < \delta_r$, $x_{\delta_\nu}(\tau) = x(\tau - \varepsilon\delta_\nu)$, $x_\Theta = (x_{\theta_1}, \ldots, x_{\theta_q})$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q \le 1$, $x_{\theta_\nu}(\tau) = x(\theta_\nu \tau)$. Вектор-функції A і B 2π-періодичні за кожною з компонент векторів φ_Δ і φ_Θ.

Обґрунтування методу усереднення для багаточастотних систем звичайних диференціальних рівнянь з початковими і крайовими умовами дано в [1]. Для систем з постійним і лінійним запізненням така задача досліджувалась в [2] і [3] відповідно.

Усереднена система рівнянь будується шляхом усередненя за всіма швидкими змінними φ_{θ_ν} і містить ті доданки, для гармонік яких виконуються умови резонансу в системах зі сталим запізненням.

У підсумку одержано усереднену систему рівнянь

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{A}(\tau, \overline{x}_\Theta), \qquad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{B}(\tau, \overline{x}_\Theta).$$

Якщо A, B и ω достатньо гладкі функції за всіма змінними і виконується деяка умова "незастрягання"системи в малому околі резонансів, то одержано оцінку вигляду

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^\alpha, \quad 0 < \alpha \le (mq)^{-1}.$$

Доведено також існування розв'язку і обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними для багаточастотних систем рівнянь зі сталим і лінійним запізненням, якщо задано багатоточкові або інтегральні крайові умови.

[1] Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ, 2004.

[2] Бігун Я.Й. Про усереднення в багаточастотних крайових задачах із постійним запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 12 – 17.

[3] Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 462 – 471.

e-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

Задача з двома кратними вузлами за виділеною змінною для лінійних систем навантажених рівнянь із частинними похідними

Бобик І.О.
(Національний ун-т "Львівська політехніка")
Симотюк М.М.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Нехай $x = (x_1, \dots, x_p)$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $\mathrm{Mat}_N^M(\mathbb{C})$ — квадратні матриці розміру $M \times M$, елементами яких є многочлени степеня N з комплексними коефіцієнтами. Розглядаємо задачу

$$\frac{\partial^n \vec{u}}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D_x) \frac{\partial^j \vec{u}}{\partial t^j} = \vec{F}(t,x) + \sum_{j=1}^{m} B_j(D_x) \vec{u}(\tau_j, x), \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega_p, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left. \dfrac{\partial^{j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} = \vec{\varphi}_j(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega_p, \\ \left. \dfrac{\partial^{j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=T} = \vec{\varphi}_{m+j}(x), \quad j = 1, \dots, n-m, \quad x \in \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

де $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$, $A_j(\xi) \in \mathrm{Mat}_N^M(\mathbb{C})$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $B_j(\xi) \in \mathrm{Mat}_R^M(\mathbb{C})$, $j = 1, \dots, m$, $R < N$.

У праці [2] встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) для випадку, коли: а) система (1) є однорідною за порядком диференціювання, б) $\vec{F} = \vec{0}$, в) $B_j(\xi) = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, m$. У [2] використано метричний підхід [1] для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при дослідженні коректності задачі (1), (2), і показано, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених зі значень вузлів інтерполяції в умовах (2), якщо система (1) справджує певні діофантові властивості. Дана робота розвиває дослідження праць [1, 2], у ній для оцінок знизу малих знаменників застосовано апарат міри Гаусдорфа [1]. Доведено, що задача (1), (2) є однозначно розв'язною для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів системи (1), значень вузлів навантаження $\tau_1, \dots, \tau_m$ та значення правого вузла інтерполяції T в умовах (2).

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
[2] *Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матем. вісник НТШ. – 2004. – Т. 1. – С. 130–148.

e-mail: igor.bobyk@gmail.com, quaternion@ukr.net

Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Боднар Д.І.
(Тернопільський національний економічний університет)
Бубняк М.М.
(Тернопільський національний економічний університет)
Михальчук Р.І.
(Луцький національний технічний університет)

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j \in \mathbb{C}$ $\left(j = \overline{1,N}\right)$, $i_0 = N$ – фіксоване натуральне число.

Вирази $F_n = 1 + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{D}}} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}$ $(n \geq 0;\ F_0 = 1)$ та $R_n^{(q)} = 1 + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{D}}} \sum\limits_{j_k=1}^{j_{k-1}} \frac{c_{j_k}}{1}$ $(q = \overline{1,N};\ n \geq 1;\ j_0 = q;\ R_0^{(q)} = 1;\ R_n^{(0)} = 1)$ називають відповідно n-им підхідним дробом та n-м залишком q-го порядку 1-періодичного ГЛД (1).

Для дробу (1) встановлено формулу різниці підхідних дробів при $n \geq 0$, $m \geq 1$

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N)} \cdot R_n^{(N)}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_N=n+1 \\ k_j \geqslant 0 \left(j=\overline{1,N}\right)}} \prod_{j=1}^{N} \frac{c_j^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j} \left(R_{p_j-r}^{(j)} \cdot \hat{R}_{q_j-r}^{(j)}\right)},$$

де $p_j = n + m - \sum\limits_{l=j+1}^{N} k_l$, $q_j = n - \sum\limits_{l=j+1}^{N} k_l$, $\hat{R}_n^{(m)} = \begin{cases} R_n^{(m)}, & n \geq 0 \\ 1, & n = -1 \end{cases}$, використовуючи яку доведено ряд ознак його поточкової та рівномірної збіжності. Зокрема, цей дріб збігається, якщо елемент c_1 належить належить площині з розрізом $c_1 \in G = \{z \in \mathbb{C} : |arg(z + 1/4)| < \pi\}$, а сума модулів решти елементів не перевищує значення $\mu^2/4$, де $\mu = \frac{1}{2}(|1 + \sqrt{1+4c_1}| - |1 - \sqrt{1+4c_1}|)$.

Дріб (1) також збігається, якщо його елементи належать відповідним параболічним областям: $c_j \in P_j(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |z| - Re(ze^{-i\gamma}) \leq 2p_j \cos^2 \gamma/2\}$ $(-\pi < \gamma < \pi;\ p_j = (1 - j/2N)/2N;\ j = \overline{1,N})$. При накладанні додаткових умов встановлена оцінка швидкості збіжності дробу (1).

e-mail: dmytro_bonar@hotmail.com, mbubniak@list.ru

Моделювання процесу руху газоводяного контакту в процесі відбирання газу з підземних сховищ

Вавричук П.Г., Притула Н.М.
(Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Експлуатація газових свердловин з підошовною водою супроводжується деформацією поверхні газо водяного контакту з утворенням конусу води. При досягненні граничних значень депресії і дебіту вода проривається у вибій свердловини. Тому в пластах з підошовною водою відбір газу зі свердловин обмежують допустимою депресією на пласт (граничним безводним дебітом). Вода до вибою свердловини рухається за рахунок різниці тисків між гирлом свердловини та ГВК. Опір рухові води буде чинити її вага та опір середовища (пористість та проникність та тиск газу, що міститься над ГВК).

Вода буде рухатися до вибою свердловини за умови, що в області ГВК тиск газу буде меншим за тиск води. Розрахунок тиску газу розглянуто в роботах [1-3]. Тому в праці досліджується процес руху води до вибою свердловини. Рух підошовної води до вибою свердловини розглядається в плоскому безмежному пеористому середовищі товщини l. Вважаючи воду нестисливою рідиною, розподіл тиску $p(x,t)$ в цьому шарі визначається розв'язком одновимірного рівняння фільтрації

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\alpha m h\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (1)$$

На нижній границі шару тиск можна вважати сталим, рівним гідростатичному p_n. На верхній границі значення тиску розраховується на основі гідравлічної ув'язки ГЗП — вибійна зона — ГВК і також вважається сталим p_ν. Початковий розподіл тиску води у водяному шарі $p(x,0) = \rho g x,\ 0 < x < l$.

Розв'язок поставленої задачі є частковим випадком розв'язку більш загальної задачі. Значення тисків на границях рівні $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$. Початковий тиск $f(x)$. Тоді за сталих параметрів середовища задача формулюється так: знайти розв'язок рівняння (1) за крайових умов $p(0,t) = \varphi_1(t)$, $p(l,t) = \varphi_2(t)$, $p(x,0) = f(x)$. Оскільки $f(x) = \rho g x$, то за сталих граничних умов $\varphi_1 \equiv const,\ \varphi_2 \equiv const$ при $\kappa = \dfrac{k}{2\mu\alpha m}$ розв'язок буде мати вигляд

$$p(x,t) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\varphi_2 - \varphi_1}{n} exp\left(\frac{-\kappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} +$$

$$+\frac{2\rho g l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} exp\left(\frac{-\kappa n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Швидкість руху води у вертикальному напрямку визначається формулою

$$\nu = \frac{-k\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho g}{\mu},$$

де ρ – густина флюїду, g – прискорення вільного падіння. Маючи закон зміни тиску на верхній границі ГВК, швидкість підняття верхньої границі води та віддаль до ГВК, можна розрахувати час, за який вода може підійти до гирла за заданої депресії тиску у вибійній зоні. Підняття води, очевидно, за такого формулювання задачі необхідно розглядати шляхом послідовних наближень. При цьому необхідно постійно збільшувати товщину водяного шару l в залежності від швидкості підняття ГВК.

[1] П'янило Я., Гладун С., П'янило Г. Аналітичний спосіб розрахунку параметрів гідравлічної ув'язки колекторного збору газу // Вісник Національного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2011. – №652. -– С. 239–243.

[2] 2. П'янило Я., Лопух Н., Галій П. Числова модель розрахунку поля швидкостей руху газу в пластах підземних сховища на основі методу скінченних елементів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип.14, – С. 24–29.

[3] 3. Клюк Б.О., Вечерік Р.Л., Хаєцький Ю.Б., П'янило Я.Д., Притула М.Г., Притула Н.М. Підземні сховища газу в системі забезпечення ефективної експлуатації газотранспортної системи (проблеми розвитку й експлуатації) // Трубопровідний транспорт. – 2009. – №6(60), – С. 7-10.

e-mail: petro.vavrychuk@gmail.com, pnazar@litech.net

Багатоточкова нелокальна задача для факторизованого рівняння із залежними коефіцієнтами в умовах

Василишин П.Б.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Савка І.Я.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Нехай Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $T > 0$, $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $\Pi_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j\}$; $B(D_x)$ – такий диференціальний вираз, для якого існують такі $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $C_1, C_2 > 0$, що

$$(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p) \quad C_1(1+|k|)^{N_1} \leq |B(k)| \leq C_2(1+|k|)^{N_2}.$$

В області Q_p^T розглядаємо таку задачу:

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j B\left(D_x\right) \right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T, \tag{1}$$

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r(\tau) \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=t_r} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Pi_n$, комплекснозначні коефіцієнти $\mu_1, \ldots, \mu_m$ залежать від дійсного параметра τ, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$.

Задача (1), (2) належить до класу некоректних за Адамаром задач, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Для випадку незалежних коефіцієнтів розв'язність нелокальних багатоточкових задач для лінійного рівняння із частинними похідними та оцінки знизу малих знаменників було встановлено за допомогою метричного підходу [1, §14]. Якщо ж коефіцієнти $\mu_1, \ldots, \mu_m$ залежні, то отримані результати не можна використати безпосередньо для задачі (1), (2). Зауважимо, що задача (1), (2) досліджена у роботі [2] для випадку двоточкових нелокальних умов ($m = 2$).

У роботі встановлено, що умови коректної розв'язності багатоточкової нелокальної задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in I$, де I – деякий фіксований відрізок дійсної прямої.

[1] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[2] Савка І. Я. Нелокальна крайова задача для рівнянь із частинними похідними, сталі коефіцієнти якої лежать на гладких кривих // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 18–33.

e-mail: s-i@ukr.net, pashavasylyshyn@rambler.ru

Спектр алгебри $H_{bs}(L_\infty)$

Василишин Т.В., Загороднюк А.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Нехай $H_{bs}(L_\infty)$ – алгебра симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному просторі $L_\infty[0,1]$. Відомо (див. [1]), що функції $R_n(x) = \int_{[0,1]}(x(t))^n\,dt$, $x(t) \in L_\infty[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ утворюють алгебраїчний базис алгебри симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(L_\infty) \subset H_{bs}(L_\infty)$ і $\mathcal{P}_s(L_\infty)$ є щільним підпростором в $H_{bs}(L_\infty)$. Звідси випливає, що кожен характер (неперервний комплекснозначний гомоморфізм) ϕ на $H_{bs}(L_\infty)$ цілком визначається своїми значеннями на R_n. Будемо позначати $\xi_n = \phi(R_n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Твердження. *Для кожного характера ϕ на $H_{bs}(L_\infty)$ існує стала $a > 0$ така, що $|\xi_n| \le a^n$ $(n \in \mathbb{N})$.*

В роботі показано, що для кожної послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, для якої існує стала $a > 0$ така, що $|\xi_n| \le a^n$ $(n \in \mathbb{N})$, існує елемент $x \in L_\infty[0,1]$ такий, що $R_n(x) = \xi_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Оскільки кожен функціонал обчислення значення в точці є характером, то звідси, враховуючи твердження 1, випливає, що такими функціоналами вичерпується спектр алгебри $H_{bs}(L_\infty)$.

[1] Gonzales M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – V.59, No2. – P. 681-697.

e-mail: taras_vasylyshyn@mail.ru, andriyzag@yahoo.com

Зведення неоднорідних дисипативних структур до скінченномірного інваріантного підмноговиду

Васюник З.І.
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

З метою дослідження двовимірних інваріантних періодичних многовидів використано теорію типу Гопфа для динамічних систем у банахових просторах.

Нехай H сепарабельний гільбертовий простір і

$$\frac{du}{dt} = -Gu + f(u) \tag{1}$$

нелінійна еволюційна (динамічна) система в H відносно параметра $t \in \mathbf{R}_+$, де $G : H \to H$ додатній оператор в H, $f : H \to H$ нелінійне відображення. Стосовно оператора $G : H \to H$ зауважуємо, що задача Коші для (1)

$$u\,|_{t=0} = u_0 \in D(G) \tag{2}$$

де $D(G) \subset H$ щільна область, для всіх $T \in \mathbf{R}_+$ має єдиний розв'язок $u \in C(\mathbf{R}_+ : D(G)) \bigcap L_2(0, T; D(G))$ [1]. Окрім того, зазначимо, що: а) відповідне відображення $S(t) : u_0 \to u(t)$ для всіх $t \in \mathbf{R}_+$ є неперервне на $D(G) \supset u_0$ саме в себе і для всіх $s, t \in \mathbf{R}_+$ має властивості півгрупи: $S(t)S(s) = S(s + t)$, $S(0) = 1$; б) півгрупа $S(t) : D(G) \to D(G), t \in \mathbf{R}_+$ має граничну позитивну інваріантну притягуючу множину $G_0 \subset D(G) \subset H$, таку що $S(t)G_0 \subset G_0$ для всіх $t \in \mathbf{R}_+$, і для довільної граничної множини $G \supset G_0$ існує таке значення $t_0 := t_0(G) \in \mathbf{R}_+$, що $S(t)G \subset G_0$ для всіх $t \geq t_0(G)$.

Вище наведені припущення є достатніми [2], щоб півгрупа $S : \mathbf{R}_+ \times D(G) \to D(G)$ мала глобальний атрактор $\bar{G}_0 \subset D(G)$ такий, що $S(t)\bar{G}_0 = \bar{G}_0$ для всіх $t \in \mathbf{R}_+$, і є постійна для деякої граничної множини $G \subset D(G)$ наступна границя: $\limsup\limits_{t\to\infty} \left\{dist(S(t)y, \bar{G}_0) : y \in G\right\} = 0$.

Розглянемо ортопроектор $P : D(G) \to D(G)$, образ якого $PD(G)$ є скінченновимірний підпростір, причому він комутує з оператором $G : D(G) \to D(G)$, так що $[G, P] = 0$. Тоді деякий вектор $u \in D(G)$ дозволяє розділення $u = (p, q) \in ImP \oplus Im(1 - P)$, для яких задача (1),(2) зводиться до [3]:

$$\begin{aligned} &dp/dt + PGp = Pf(p + q),\\ &dq/dt + (\mathbf{1} - P)Gq = (\mathbf{1} - P)f(p + q), \end{aligned} \tag{3}$$

$$p\,|_{t=0} = p_0 := Pu_0, \quad q\,|_{t=0} = q_0 := (\mathbf{1} - P)u_0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Покладемо* $u_0 := p_0+\Phi(p_0) \in M\cap G_0$ *для деякого відображення* $\Phi : ImP \to Im(\mathbf{1} - P)$. *Тоді пара* $u(t) = (p(t), q(t)) := p(t) + \Phi(p(t))$ *є розв'язок задачі Коші* (3),(4).

Асимптотична поведінка динамічної системи (1) для $t \to \infty$ повністю визначається властивостями розв'язку рівняння $dp/dt + PGp = Pf(p + \Phi(p))$ для $p \in ImP, t \in \mathbf{R}_+$, який називають інерційною формою задачі (1) і вона може бути записана як система звичайних диференційних рівнянь скінченної розмірності $\dim(ImP)$. Таким чином, у випадку існування інерційного многовиду $M \in F(P)$ задача якісної поведінки розв'язку динамічної системи (1) може бути зведена до вивчення задачі скінченної розмірності.

[1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл; [перевод с английского С.Н.Шиманова]. – Москва:Мир, 1984. – 422с.
[2] Lubashevskii I.A. Proection dynamics of highly dissipative systems / I.A.Lubashevskii, V.V.Gafiychuk // Phys. Rev. E, 1994. – V.50. – P.171-181.
[3] Ладыженская О.А. Нахождение минимального глобального аттрактора для уравнений Навье-Стокса и других уравнений в частных производных /О.А.Ладыженская // Успехи математических наук. – 1994. Т.42. – С.171-181.

e-mail: dept22@iapmm.lviv.ua

Застосування методу дискретизації в двопараметричних задачах на власні значення (про стійкість стрижнів)

Власій О.О.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Тацій Р.М.
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Дослідження стійкості стрижнів сталого перерізу при сумісній дії зосередженого і розподіленого навантажень зводиться до розв'язування наступних двопараметричних задач на власні значення:

$$y^{IV} + \alpha y'' + \beta\left[(1-x)y'\right]' = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \tag{2}$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0, \tag{3}$$

де умови (2) відповідають жорсткому закріпленню обидвох кінців стрижня, а умови (3) – випадку жорстко закріпленого нижнього та шарнірно закріпленого верхнього кінців.

В рівнянні (1)

$$\alpha = \frac{pl^2}{EI},\ \beta = \frac{ql^2}{EI},$$

де p – зосереджена сила, прикладена до верхнього кінця стрижня, q – власна вага стрижня, l – довжина стрижня, E – модуль пружності матеріалу, I – момент інерції поперечного перерізу.

Шляхом використання дискретизації (D-апроксимації) [1] встановлено, що для задач (1), (2) та (1), (3) між параметрами α і β існує лінійна залежність, причому рівняння відповідних перших віток власних значень в прямокутній системі координат $\alpha O\beta$ мають вигляд:

$$\frac{\alpha}{4\pi^2} + \frac{\beta}{74,56} = 1$$

для задачі (1), (2) та

$$\frac{\alpha}{20,16} + \frac{\beta}{52,44} = 1$$

для задачі (1), (3).

Аналогічні задачі у випадках консольного та жорстко закріпленому нижньому і шарнірно закріпленому верхньому кінцях стрижня були досліджені в [2].

[1] Узагальнені квазідиференціальні рівняння / [Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О.]. – Дрогобич: Коло, 2011.

[2] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967.

e-mail: olesyav@ukr.net

Крайова задача типу Діріхле для диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

Волянська І.І., Ільків В.С.
(Національний університет "Львівська політехніка")

В роботі розглядається крайова задача типу Діріхле для диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$Lu = \sum_{|s| \le n} a_{s_0,s_1} \frac{\partial^{2|s|} u}{\partial t^{2s_0} \partial x^{2s_1}} = 0, \tag{1}$$

$$M_l u = \frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}}\Big|_{t=0} = \varphi_l, \quad M_{n+l} u = \frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}}\Big|_{t=T} = \varphi_{n+l}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=\pi} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

де $|s| = s_0 + s_1$, $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $t \in \mathcal{T} = [0, T]$, $x \in \mathcal{X} = [0, \pi]$, $u = u(t, x)$ – шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}$ – задані функції змінної x.

Розв'язність досліджуваної задачі, у випадку багатьох просторових змінних, пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку, тому вона є некоректною за Адамаром у шкалах просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})\}_{q \in \mathbb{R}}$ та $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{T} \times \mathcal{X})\}_{q \in \mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{X})$ – гільбертовий простір функцій $\gamma = \gamma(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k \sin kx$ з комплексними γ_k і нормою

$$\|\gamma\|_{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{k}^{2q} |\gamma_k|^2\Big)^{1/2}, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1 + k^2},$$

а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{T} \times \mathcal{X})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що функції $\dfrac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r}$ для кожного $t \in [0, T]$ і $r = 0, 1, \ldots, n-1$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{X})$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u в даному просторі обчислюється за такою формулою:

$$\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{T} \times \mathcal{X})} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \Big\| \frac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \Big\|^2_{H_{q-r}(\mathcal{X})}.$$

Під розв'язком задачі (1)–(3) вважаємо функцію $u = u(t, x)$ з простору $\mathbf{H}_q^{2n}(\mathcal{T} \times \mathcal{X})$, тобто ряд $u(t, x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} u_k(t) \sin kx$, яка задовольняє рівняння (1) і умови (2) та (3), де $q \in \mathbb{R}$.

У роботі показано, що у випадку однієї просторової змінної задача Діріхле є коректною за Адамаром. Відповідні знаменники вдається оцінити сталою, тобто не виникає проблеми малих знаменників. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі (1)–(3) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{T} \times \mathcal{X})$. Доведено теореми про ін'єктивність відображення $(M_0, M_1, \ldots, M_{2n-1}) : u \mapsto (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1})$ з $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{T} \times \mathcal{X})$ на деякий декартовий добуток просторів для довільного $q \in \mathbb{R}$.

e-mail: i.volyanska@mail.ru, ilkivv@i.ua

Парні множини стійкості до збурень неперервних дробів з комплексними елементами

Гладун В.Р.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Одним із важливих питань аналітичної теорії неперервних дробів є питання їх стійкості до збурень. Відомо, що похибки підхідних дробів неперервного дробу залежать не тільки від похибок елементів дробу, але певним чином від самих елементів. Тому актуальними є задачі встановлення умов, при виконанні яких неперервні дроби є стійкими до збурень їх елементів, побудови і дослідження множин стійкості до збурень [1].

Об'єктом дослідження є числовий неперервний дріб (НД) з комплексними частинними знаменниками

$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Нехай $\{G_k\}$, $\emptyset \neq G_k \subset \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – послідовність множин елементів неперервного дробу (1), тобто $b_k \in G_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Якщо $G_{2k+1} = G_1$, $G_{2k} = G_2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то множини G_1, G_2 називають парними (спареними) множинами елементів НД (1).

Теорема. *Нехай існує стала β, $0 < \beta < 1$, така, що відносні похибки усіх частинних знаменників НД (1) задовольняють умови:*

$$|\beta_k| \leq \beta, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Множини

$$G_1 = \{z \in C : \mathrm{Re}\,(z \exp{(i\varphi)}) \geq \rho_1\},$$
$$G_2 = \{z \in C : \mathrm{Re}\,(z \exp{(-i\varphi)}) \geq \rho_2\},$$

де $-\pi < \varphi \leq \pi$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ – задані дійсні сталі, такі що

$$\rho_1\rho_2 > \sqrt{2} - 1,$$

є парними множинами відносної стійкості до збурень НД (1), причому для відносної похибки s-го підхідного дробу справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \leq \frac{\beta}{(1-\beta)\left(\sqrt{\rho_1\rho_2}\sqrt{2+\rho_1\rho_2}\right)^s}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4\rho_1\rho_2}} \frac{\left(\left(\sqrt{\rho_1\rho_2}\sqrt{2+\rho_1\rho_2}\right)^s - 1\right)}{\left(\sqrt{\rho_1\rho_2}\sqrt{2+\rho_1\rho_2} - 1\right)} + 1\right),$$

$s = 0, 1, 2, \ldots.$

[1] Боднар Д. І., Гладун В. Р. Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Математ. студії. – 2006. – № 25. – С. 207-212.

e-mail: v_hladun@yahoo.com

Зростання рядів Діріхле

Глова Т.Я.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Філевич П.В.
(ПНУ ім. Василя Стефаника)

Важливою характеристикою зростання трансцендентної цілої функції $f(z) = \sum a_n z^n$ є її порядок

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

де $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ – максимум модуля функції f. Добре відомою є класична формула Коші-Адамара

$$\rho(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln|a_n|},$$

яка дозволяє визначити порядок функції f за послідовністю $(|a_n|)$ модулів її тейлорових коефіцієнтів.

Нехай Λ – клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $S(\lambda)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it,$$

які не зводяться до експоненціального полінома. Аналогом порядку для цілих рядів Діріхле є їх R-порядок, що визначається за рівністю

$$R(F) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma},$$

де $M(\sigma,F) = \max\{|F(s)| : \operatorname{Re} s = \sigma\}$ – максимум модуля ряду F.

Однією з класичних задач теорії рядів Діріхле є наступна: за яких умов на послідовність $\lambda \in \Lambda$ для кожного цілого ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ правильна формула (аналог формули Коші-Адамара)

$$R(F) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \ln\lambda_n}{-\ln|a_n|}. \tag{1}$$

Такі умови були запропоновані багатьма авторами. Найслабшою з відомих була умова К. Танаки (1953 р.)

$$\ln n = o(\lambda_n \ln\lambda_n), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Ф.Й. Гече (1964 р.) показав, що умова (2) є в певному сенсі близькою до остаточної. Нами доведено остаточність цієї умови. Отже, правильна наступна теорема (достатня частина в ній – результат К. Танаки).

Теорема. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ була правильна формула* (1), *необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (2).

e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Необхідні умови для визначення оптимального рівноважного попиту Слуцького

Дерев'янко Т.О.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Розглянемо споживчий ринок, на якому представлено n ($n \in \mathbb{N}$) товарів з відповідними цінами p_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) та рівнем капіталу K.

Без обмеження загальності, припустимо що на ринку відбувається зміна тільки ціни p_n та капіталу K. У такому випадку, знаходження рівноважного попиту Слуцького $x = x(p_n, K)$ ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)$) зводиться до розв'язання наступної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial x_i(p_n, K)}{\partial p_n} + \lambda(p_n, x, u)\frac{\partial x_i(p_n, K)}{\partial K} = f_i(p_n, x, v),\ i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad (1)$$

в області

$$\Omega = \{(p_n, K) \in \mathbb{R}^2 | p_n > 0, K > 0\}$$

при початкових

$$x_i(p_n, K)|_{p_n = p_n^0} = \psi_i(K, w),\ i \in \{1, 2, ..., n\},\ K > 0 \qquad (2)$$

та крайових умовах

$$x_i(p_n, K)|_{K=0} = 0,\ i \in \{1, 2, ..., n\},\ p_n > 0, \qquad (3)$$

де $\lambda = \lambda(p_n, x, u)$, $f_i = f_i(p_n, x, v)$, $\psi_i = \psi_i(K, w)$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) деякі задані нелінійні функції, а $u : \Omega \to U$ (U - компакт), $v : \Omega \to V$ (V - компакт), $w : (0, +\infty) \to W$ (W - компакт) – відповідні керуючі впливи.

Для знаходження оптимального рівноважного попиту Слуцького потрібно мінімізувати функціонал

$$J(x, u, v, w) = \iint\limits_{\Omega} G(x, p_n, K) dp_n dK, \qquad (4)$$

де $G : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$ деяка задана нелінійна функція.

[1] D'Acunto B., Frunzo L. Free boundary problem for an initial cell layer in multispecies biofilm formation // Applied Mathematics Letters. – 2012. – №25, –P. 20-26.

[2] Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.

[3] Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 199 с.

[4] Мышкис А.Д., Филимонов А.М. О глобальной непрерывной разрешимости смешаной задачи для одномерних гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифф. уравнения. – 2008. – Т. 44, №3, – С. 394-407.

e-mail: taras_derevianko@ukr.net

Інтерполяційні властивості тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними операторами

Дмитришин М.І.
(Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника)

На просторах $\{L_{p_j}(\Omega)\}_{j=1}^J$, $1 < p_j < \infty$, комплексних сумовних функцій в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу C^∞ з границею $\partial\Omega$ розглядаємо регулярно еліптичні оператори A_j зі сталими коефіцієнтами [1, с. 453].

Нехай $\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)$ – тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму $\|w\|_{\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)} = \inf\limits_{w=\sum_n \otimes_j^J f_n^j} \sum_{n=1}^N \|f_n^1\|_{L_{p_1}\Omega)} \cdot \ldots \cdot \|f_n^J\|_{L_{p_J}\Omega)}$. Поповнення простору $\otimes_j^J L_{p_j}(\Omega)$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)$.

Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 < p_j < \infty$ визначимо банахові простори $\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$ цілих векторів експоненціального типу оператора A_j та їх об'єднання $\mathcal{E}_{p_j}(A_j) = \bigcup_{\nu_j>0} \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)$, на якому задамо квазінорму $|f|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} = \|f\|_{L_{p_j}\Omega)} + \inf\{\nu_j > 0 : f \in \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)\}$ [2]. Поповнення тензорного добутку $\otimes_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$ у проективній квазінормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$.

Для чисел $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau_j \le \infty$ визначимо апроксимаційні простори $\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^\alpha(A_j) = \left\{f \in L_{p_j}(\Omega) : |f|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^\alpha(A_j)} < \infty\right\}$ із квазінормою

$$|f|_{\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^\alpha(A_j)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left(t^\alpha E_{p_j}(t,f)\right)^{\tau_j} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau_j} & : \quad 0 < \tau_j < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^\alpha E_{p_j}(t,f) & : \quad \tau_j = \infty, \end{cases}$$

де $E_{p_j}(t,f) = \inf\limits_{|g|_{\mathcal{E}_{p_j}(A_j)} \le t} \|f-g\|_{L_{p_j}}$, $g \in \mathcal{E}_{p_j}(A_j)$, $f \in L_{p_j}(\Omega)$.

Для $0 < q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $0 < t < \infty$ визначимо інтерполяційний простір $\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)\right)_{\theta,q}$ [1, с. 23].

Теорема. *Нехай* $1 < p_j < \infty$, $1 \le q, q_j, \tau_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\tau_j = \theta q_j$, $\theta = \frac{1}{\alpha+1}$ *і* $\frac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{q_j} - 1\right)$ *виконується такий ізоморфізм просторів*

$$\left(\tilde{\otimes}_j^J \mathcal{E}_{p_j}(A_j), \tilde{\otimes}_j^J L_{p_j}(\Omega)\right)_{\theta,q} = \tilde{\otimes}_j^J [\mathcal{B}_{p_j,\tau_j}^\alpha(A_j)]^\theta.$$

[1] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

[2] Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах // Доп. НАН України. – 2007. – №12. – С. 16–22.

e-mail: m_dmytryshyn@hotmail.com

Теорема про додатно визначеність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Дмитришин Р.І.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД)

$$\Phi_0 + \frac{1}{b_{01} + z_{01} - \Phi_1} - \frac{a_{02}^2}{b_{02} + z_{02} - \Phi_2} - \frac{a_{03}^2}{b_{03} + z_{03} - \Phi_3} - \dots, \qquad (1)$$

де

$$\Phi_p = \frac{1}{b_{1p} + z_{1p}} - \frac{a_{2p}^2}{b_{2p} + z_{2p}} - \frac{a_{3p}^2}{b_{3p} + z_{3p}} - \dots, \quad p \geq 0,$$

a_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r \neq 1$, $r+s \geq 2$, b_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, – комплексні сталі, z_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, – комплексні змінні. Уведемо позначення

$$\beta_{rs} = \operatorname{Im} b_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r+s \geq 1,$$

$$\alpha_{rs} = \operatorname{Im} a_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2.$$

ГЛД (1) назвемо додатно визначеним, якщо для довільного натурального n і всіх дійсних ξ_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, невід'ємно визначені квадратичні форми

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s\geq 1}}^{n} \beta_{rs}\xi_{rs}^2 - 2\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s\geq 2 \\ r\neq 1}}^{n} \alpha_{rs}\xi_{rs}\xi_{r-1+\delta_{r0},s-\delta_{r0}} \geq 0,$$

де δ_{pq} – символ Кронеккера.

Справджується наступне твердження.

Теорема. *ГЛД (1) додатно визначений тоді і лише тоді, коли виконуються умови:*

а) уявна частина чисел b_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, є невід'ємна:

$$\beta_{rs} = \operatorname{Im} b_{rs} \geq 0, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r+s \geq 1;$$

б) існують дійсні числа g_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r+s \geq 1$, такі, що

$$0 \leq g_{rs} \leq 1, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r+s \geq 1,$$

і

$$\alpha_{rs}^2 = \beta_{rs}\beta_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}}(1 - g_{r+\delta_{r0}-1,s-\delta_{r0}})g_{rs}, \quad r \geq 0,\ s \geq 0,\ r \neq 1,\ r+s \geq 2,$$

де $\alpha_{rs} = \operatorname{Im} a_{rs}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r \neq 1$, $r+s \geq 2$, δ_{pq} – символ Кронеккера.

e-mail: dmytryshynr@hotmail.com

Дослідження багатоточкової параболічної псевдодиференціальної задачі Неймана

Дрінь Я.М.
(Буковинський державний фінансово-економічний університет)
Дрінь М.М.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

1. Позначення. Нехай $(t, x) \in \Pi_T \equiv (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$; $|\mu| > 1$; $0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \gamma_0$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m < 1$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m < 1$; $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m$ – відомі дійсні числа; A_k – псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом a_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le r$, B_k, $1 \le k \le m$, – ПДО з символами b_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le m$ порядків однорідності γ_k і β_k – відповідно; A – ПДО з символом $a = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k$, негладким при $\sigma = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, причому гладкість символів a_k по σ при $\sigma \neq 0$ залежить від γ_0 так: якщо $\gamma_0 \ge 1$, то символи мають скінченну гладкість [1], якщо $0 < \gamma_0 < 1$, то символи a_k є нескінченно гладкими [2] і $|D_\sigma^p d_k(\sigma)| \le c_k |\sigma|^{\lambda_k - |p|}$, де $d_k \equiv a_k$, $0 \le k \le r$, $\lambda_k \equiv \gamma_k$ або $d_k = b_k$, $1 \le k \le m$, $\lambda_k \equiv \beta_k$ відповідно, $|p| = p_1 + \cdots + p_n$; існує стала $\delta > 0$ така, що для довільних $\sigma \in \mathbb{R}^n$ вірною є нерівність: $a_{\gamma_0}(\sigma) \ge \delta |\sigma|^{\gamma_0}$.

2. Основний результат. Для багатоточкової задачі

$$\partial_t u + Au = f(t, x), \mu u|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k B_k u|_{t=t_k} = \varphi(x),$$

де f: $\Pi_T \to \mathbb{R}$, φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – відомі функції (див. [1]), побудовано фундаментальний розв'язок

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x, \sigma) - a(\sigma)t\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \nu_k b_k(\sigma) \exp\{-a(\sigma) t_k\} \Big)^{-1} d\sigma,$$

встановлені степеневі оцінки його похідних, записана формула для розв'язку у вигляді суми згорток функції G з даними задачі f та φ.

Аналогічний результат вірний у випадку, коли символи ПДО, що входять в рівняння, залежать ще і від невід'ємної часової змінної t.

[1] Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1988, 51, № 5. – С. 909-934.

[2] В.В. Городецький, Я.М. Дрінь. Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів. Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 3. Математика, Чернівці, 2011 – С. 13-18.

e-mail: drin_jaroslav@i.ua

Спектральне розвинення для деякого транспортного оператора

Івасик Г.В.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглядається оператор перенесення

$$Lf = -i\mu \frac{df}{dx} + a(x) \int_{-1}^{1} b(\mu')f(x, \mu')d\mu', \quad (1)$$

де $x \in R, \mu \in [-1; 1]$. Оператор L розглядається в просторі $L^2(D), D = R \times [-1, 1]$ і є узагальненням транспортного оператора, який було розглянуто у деяких фізичних задачах (наприклад, задача про перенесення нейтронів). Оператор L є унітарно еквівалентним оператору деякої моделі Фрідріхса $T = S + V : H \to H$, де S – оператор множення на незалежну змінну, H – гільбертів простір функцій в області D з вагою $\rho(x, \mu) = \frac{1}{\mu}$.

Розглянуто еволюційне рівняння вигляду:

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = u(0), \ u(0) \in D(T). \end{cases}$$

Отже, вивчено оператор-функцію $U(t)$, задану рівністю

$$u(t) = U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma + i\theta)t} T_{\theta - i\gamma}\varphi \ d\theta. \quad (2)$$

Теорема. *Розв'язок (2) еволюційного рівняння має асимптотику*

$$u(t) = \sum e^{i\zeta_k t} \sum t^p(\varphi, e_{k,p})h_{k,p,} + O(1), \ t \to \infty,$$

де $e_{k,p}, \ h_{k,p,} \in H$ *– деякі елементи.*

Для побудови рівності Парсеваля використано метод контурного інтегрування. Використано відому формулу для стрибка резольвенти для операторів моделі Фрідріхса. Ця формула встановлена за певних умов на властивості власних функціоналів, що відповідають неперервному спектру. Неперервний спектр транспортного оператора є нескінченнократним, і перевірка необхідних умов вимагає значної роботи.

[1] Івасик Г. В., Черемних Є. В. Модель Фрідріхса для транспортного оператора, Вісник Національного університету "Львівська політехніка фіз.-мат. науки, вип.643, №643, 2009. – 30-36.

[2] Ivasyk G. V. Spectral decomposition for some transport operator. Eastern-european journal of Enterprise Technologies. – Kharkov. – 2012. – №1/4 (55). – 10-14.

e-mail: Ivasyk-G@yandex.ru

Про метод Леві побудови та дослідження фундаментальних розв'язків вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова

Івасишен С.Д.
(Національний технічний університет України "КПІ")
Мединський І.П.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Нехай n, n_1, n_2 – натуральні числа такі, що $n_1 + n_2 = n$, $n_1 \geq n_2 \geq 1$, $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 := (x_{21}, \dots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Розглядається рівняння вигляду

$$(S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де

$S := \partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}$, і $A(t, x, \partial_{x_1})$ – деякий диференціальний вираз за x_1 з коефіцієнтами залежними від t і x. Рівняння (1) називається виродженим рівнянням типу Колмогорова, якщо диференціальний вираз $\partial_t - A(t, x, \partial_{x_1})$ є параболічним за змінними t і x_1. Це рівняння є узагальненням рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова. Дослідження фундаментальних розв'язків (ФР) таких рівнянь проводиться за допомогою відповідно модифікованого методу Леві. У випадку, коли коефіцієнти рівняння (1) залежать від усіх змінних, задача побудови й дослідження ФР виявилась зовсім не простою. Різні припущення щодо коефіцієнтів, за яких мав би існувати ФР, пропонували в своїх працях М. Вебер, А. М. Ільїн, І М. Сонін, Г. П. Малицька та ін. Дещо інші умови пропонуються в працях італійських математиків (див. [1]), а також у монографії [2]. Побудований в цих працях ФР є не класичним, а в певному сенсі узагальненим. Умови, які запропоновані в [3], узагальнюють умови з [2] і дозволяють розв'язати задачу побудови і дослідження методом Леві класичного ФР для вироджених рівнянь типу Колмогорова.

Огляду, порівнянню і аналізу цих результатів і присвячена наша доповідь.

[1] Di Francesco M., Pascucci A. On a class of degenerate parabolic equations of Kolmorov type // Appl. Math. Res. Express. –2005. – № 3. – P.77-116.

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type //Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – V.152. – 390 p.

[3] Івасишен С., Мединський І. Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки і математики: зб. наук. праць. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України – 2013. – Т.1. – С. 36–38.

e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, dpm.mip@polynet.lviv.ua

Про задачу Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів

Івасишен С.Д.
(Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут")
Пасічник Г.С.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані невід'ємні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_3$; $n := n_1 + n_2 + n_1 > 1$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається, взагалі кажучи, з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Розглядається рівняння вигляду

$$\partial_t u - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} u - b \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}} (x_{1j} u) - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} u - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} u = 0,$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в якому $u = u(t, x)$, a_{js}, b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \ge \delta |\sigma_1|^2.$$

Вважається, що в рівнянні (1) при $n_3 = 0$ відсутня остання сума, а при $n_2 = 0$ відсутні дві останні суми. Такого типу рівняння є рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова відповідного невиродженого чи виродженого випадкового процесу дифузійного типу.

Для рівняння (1) знайдено явну формулу для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) Z, досліджено властивості функції Z, встановлено властивості породжених цією функцією інтегралів Пуассона функцій та узагальнених мір зі спеціальних вагових просторів, доведено коректну розв'язність задачі Коші в спеціальних вагових L_p-просторах та про зображення розв'язків у вигляді інтегралів Пуассона.

Зазначені результати для випадку $n_2 = n_3 = 0$ опубліковано в [1], а результати, що стосуються ФРЗК у випадку $n_3 = 0$, $n_2 \ge 1$, наведено в [2].

[1] Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. – 2011. – Т.1, No 1–2. – С. 13-24.

[2] Заболотько Т.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. – 2012. – Т.2, No 2–3. – С. 81–89.

e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, pasichnyk@mail.ru

Оцінки міри множини рівня функцій, які задовольняють диференціальну нерівність

Ільків В.С.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Нехай $\mu = \mu(\varepsilon, a, b; f)$ – міра Лебеґа множини рівня ε для дійсної функції $f \in \mathbf{C}^n[a,b]$, тобто $\mu = \operatorname{meas}\{x \in [a,b]\colon |f(x)| < \varepsilon\}$, і виконується диференціальна нерівність

$$\Big| L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big) f(x) \Big| \ge \delta \quad \text{на} \quad [a,b], \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \delta > 0,$$

де $L_n(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_n)$ і $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$.

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$\mu \le \min\left\{ b-a,\, \min_{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{n-j+1}}{|\lambda_{\pi_j}|} \operatorname{arth}\left(\frac{\sqrt{2^{2j-n+1}}\,\sqrt[n]{q_n \varepsilon/\delta}}{b-a} \operatorname{th} \frac{|\lambda_{\pi_j}|(b-a)}{2} \right) \right\}, \quad (1)$$

де $q_n = \prod\limits_{r=1}^{n} \dfrac{|\lambda_r|(b-a)/2}{\operatorname{th}|\lambda_r|(b-a)/2}$, а мінімум функції $\min\limits_{\pi}$ обчислюється за всіма перестановками $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ множини $\{1, \ldots, n\}$, а також слабша нерівність

$$\mu \le \min\left\{ b-a,\, n\sqrt{2^{n+1}}\,\sqrt[n]{q_n \frac{\varepsilon}{\delta}} \right\}. \quad (2)$$

Отримані оцінки (1) і (2) узагальнюють та доповнюють результати частинного випадку $L_n(\lambda) = \lambda^n$, для якого знайдено [1] точну оцінку

$$\mu \le \min\left\{ b-a,\, 4\sqrt[n]{\frac{n!}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}} \right\},$$

і значно посилюють відповідний результат з роботи [2]:

$$\mu \le \min\left\{ b-a,\, n\sqrt{2^{n+1}} e^{(b-a)\bar\lambda}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}} \right\}, \qquad \bar\lambda = \frac{|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|}{n}.$$

Знайдені нерівності (1), (2) буде використано при оцінюванні малих знаменників [3], які пов'язані з некоректними крайовими задачами для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

[1] Ilkiv V.S., Maherovska T.V. Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivative // Math. studii. – 2010. – **34**, № 1. – C. 57–64.

[2] Симотюк М.М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.

[3] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

e-mail: ilkivv@i.ua

Нелокальна крайова задача для системи диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами у багатовимірній комплексній області

Ільків В.С., Страп Н.І.
(Національний університет "Львівська політехніка")

У циліндричній області $D^p = [0,T] \times \mathcal{S}^p$, де $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $T > 0$, $p \geq 2$, розглянуто задачу з нелокальними умовами для нормальної системи диференціально-операторних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\leq n} A_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$\mu \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \varphi_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $A_{s_0,s}$ – квадратні матриці розміру m, $A_{n,0,\ldots,0} = I_m$ – одинична матриця, $\varphi_j = \varphi_j(z) = \mathrm{col}\ (\varphi_{j1}(z), \ldots, \varphi_{jm}(z))$ – задані вектор-функції розміру m, $u = u(t,z) = \mathrm{col}\ (u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z))$ – шукана вектор-функція розміру m, де $n \geq 1$, $m \geq 1$, а $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – параметр. Оператор $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ складено з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, зокрема $B_j z^k = k_j z^k$ і $B_{j_1} B_{j_2} = B_{j_2} B_{j_1}$. Степенями даних операторів є $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$, де $j = 1, \ldots, p$, і $B^s = B_1^{s_1} \cdots B_p^{s_p}$.

Розглядувана задача є некоректною за Адамаром у шкалі просторів $\{\bar{H}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)$ – простір вектор-функцій $v(z) = \mathrm{col}\ (v_1(z), \ldots, v_m(z))$, де $v_j(z) \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $j = 1, \ldots, m$, з нормою $\|v\|_{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} = \big(\sum\limits_{j=1}^m \|v_j\|_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}\big)^{1/2}$, а $H_q(\mathcal{S}^p)$ – гільбертів простір функцій $\psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k z^k$ зі скалярним добутком $(\psi, \varphi)_{H_q(\mathcal{S}^p)} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k$, де $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, $\psi_k \in \mathbb{C}$. Розв'язність цієї задачі пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Для подолання проблеми використано метричний підхід.

У роботі встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у шкалі просторів $\{\bar{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ – простір вектор-функцій $u(t,z) = \mathrm{col}\ (u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z))$ з нормою $\|u\|_{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \big(\sum\limits_{j=1}^m \|u_j\|_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)}\big)^{1/2}$, де $u_j \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$. Тут $H_q^n(\mathcal{D}^p)$ – банахів простір функцій $u(t,z)$ таких, що похідні $\partial^r u/\partial t^r$ для $t \in [0,T]$ і $r = 0, 1, \ldots, n$ належать до просторів $H_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ і неперервні за t у цих просторах. Норму у просторі $H_q^n(\mathcal{D}^p)$ визначає наступна формула: $\|u\|_{H_q^n(\mathcal{D}^p)}^2 = \sum\limits_{r=0}^n \max\limits_{[0,T]} \Big\|\dfrac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|_{H_{q-r}(\mathcal{S}^p)}^2$.

e-mail: ilkivv@i.ua, n.strap@mail.ru

Розв'язки задачі Коші для системи квазілінійних рівнянь першого порядку з гладкими компонентами

Казмерчук А.І.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

У газовій динаміці, механіці суцільних середовищ закон руху газу або рідини в окремих випадках описується гіперболічною системою квазілінійних рівнянь першого порядку. Враховуючи те, що нелокальний розв'язок таких систем має розриви, виникає потреба у введенні узагальнених розв'язків. У даній роботі вивчаються такі системи, розв'язки яких мають не більше однієї розривної компоненти.

Розглянемо систему квазілінійних рівнянь першого порядку спеціального вигляду

$$u_t^i + \varphi^i(u)_x = 0,\ i = 1, ..., N, \tag{1}$$

де для матриці потоку

$$A = \frac{\partial(\varphi^1, ..., \varphi^N)}{\partial(u^1, ..., u^N)}, \qquad a_{i1} = 0,\ i > 1.$$

існують різні класи K систем ([1], [2]), для яких ентропійний розв'язок ([3]) задачі Коші з початковою умовою

$$u^i\Big|_{t=0} = u_0^i(x),\ i = 1, ..., N \tag{2}$$

є гладким.

Теорема. *Нехай система* (1) *порядку* $N-1$ *належить класу* K, *тоді існує єдиний ентропійний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *для системи порядку* N, *причому* $u_1 \in L_{1,loc}\left([0;T] \times R^1\right)$, $u_j \in C^1\left([0;T] \times R^1\right)$, $j = 2, ..., N$.

Зауважимо, що знайдено як класи K із скінченним значенням T, так і класи K з $T = +\infty$.

[1] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М., Наука. – 1978.

[2] Казмерчук А.І., Сеньків О.Я. Розвязування задачі Коші для однієї системи квазілінійних рівнянь першого порядку засобами комп'ютерної технології. // Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1996. – Вип.2. – С. 24–29.

[3] Казмерчук А.І. До обґрунтування квазілінійних методів розв'язування квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №411. – С. 147-151.

e-mail: _kaz@rambler.ru

Існування періодичних розв'язків автономних систем звичайних диференціальних рівнянь з параметрами

Казмерчук А.І., Кузишин І.Я.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

В якісній теорії для систем звичайних диференціальних рівнянь важливим є існування періодичних розв'язків. У задачах біології та хімічної кінетики, що зводяться до таких систем з параметрами, це питання пов'язане із наявністю циклічних режимів.

Розглянемо нелінійну автономну систему диференціальних рівнянь зі збуренням у векторному вигляді: $W' = BW + g(W)$, де $W = (w_1, w_2, ..., w_N)$ – вектор невідомих функцій, $W \in \mathbb{R}^N$.

Умова I: Нехай існує невироджена квадратна матриця C порядку N, що $B = CAC^{-1}$, $g(W) = C \cdot h(C^{-1}W)$, де для матриці A: $a_{ij} = 0$ для $i < N$, $j - i \neq 1$, вектор збурення має вигляд $h(Z) = (0, 0, ..., 0, h^N(Z))$ і $h^N(Z) \in \mathbf{C^{k+1}}$, $Z = C^{-1}W$.

Умова II: Нехай існує невироджена квадратна матриця C порядку N, що $B = CAC^{-1}$, $g(W) = C \cdot h(C^{-1}W)$, для матриці A: $a_{ij} = 0$ для $i < N$, $j - i \neq 1$, вектор збурення має вигляд $h(Z) = (0, 0, ..., 0, h^N(Z))$ і $h^N(Z) = -\sum\limits_{\alpha \in \Lambda^k} \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_{\alpha,i} z_i^{\alpha}$.

Частинним випадком такої системи є система, розглянута в [1], а пізніше і система, розглянута в [2].

Теорема 1. *За умови II при* $N = 2$, *де* $h^2(Z) = -(\kappa z_2 + \lambda z_2^3 + \mu z_2^5)$, *і при* $N = 4$, *де* $h^4(Z) = -(\kappa z_2 + \lambda z_2^3 + \mu z_2^5)$, *існують періодичні розв'язки, якщо* (κ, λ, μ) *належать лінійному многовиду.*

Теорема 2. *За умови I при* $N = 4$, *де* $h^4(Z) = -(\kappa \sin y' + \lambda \sin(y')^3)$, *існує періодичний розв'язок, якщо* (κ, λ) *належать лінійному многовиду.*

Також отримано класи систем автономних диференціальних рівнянь при $N = 4$, які крім тривіальних не мають інших періодичних розв'язків при нелінійних збуреннях системи.

[1] Релей (Lord Rayleigh). On maintained vibrations // Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1883. – Ser.5, vol.15. – P. 229–235.

[2] Казмерчук А.І., Кузишин І.Я. Узагальнення задачі Релея для автономних систем звичайних диференціальних рівнянь. // Materialy VIII Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji "Wykształcenie i nauka bez granic - 2012". – 2012. – vol.33. – str. 41–43.

e-mail: _kaz@rambler.ru, jessamin6@mail.ru

Застосування двовимірних інтегральних рівнянь до розв'язування задач стаціонарної теплопровідності тіла з тепловидільним або теплопроникним дисковим включенням

Кіт Г.С., Сушко О.П.
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Розглядаються інтегральні рівняння

$$\iint\limits_S \frac{w(\xi)}{R\,(x,\xi)} d_\xi S = T(x), \quad \iint\limits_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3\,(x,\xi)} d_\xi S - h(x)\gamma(x) = q(x), \quad x \in S, \qquad (1)$$

де S – плоска однозв'язна область, обмежена гладким контуром $L(x)$, $R(x,\xi) = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}$ – відстань між точками $x(x_1,x_2)$ і $\xi(\xi_1,\xi_2)$. Перше рівняння (1) використовується при розв'язуванні задач стаціонарної теплопровідності для безмежного тіла з тепловидільним тонким включенням, при цьому функція $w(\xi)$ описує густину теплових джерел, а $T(x)$ – температуру на включенні. Друге рівняння відповідає задачі теплопровідності для тіла з теплопроникним тонким включенням, при цьому $\gamma(\xi)$ описує густину теплових диполів, $h(x)$ – теплопроникність включення, а $q(x)$ – тепловий потік на ньому.

Перше рівняння має необмежений розв'язок при довільній правій частині, а друге – обмежений. Коли область S круг або еліпс, а праві частини рівнянь (1) – поліноми степеня n по x_1 і x_2, то їхні розв'язки записуються відповідно у вигляді

$$w(x) = \psi(x)/L(x), \quad \gamma(x) = \omega(x)L(x), \qquad (2)$$

де $L(x)$ – рівняння контуру області S, а $\psi(x)$ і $\omega(x)$ – поліноми степеня n, коефіцієнти яких визначаються із системи алгебричних рівнянь.

В осесиметричному випадку ці рівняння для кругової області радіуса a мають вигляд

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty W\,(\eta)\, J_0\,(\eta r)\, d\eta = T\,(r)\,, \quad W\,(\eta) = \int\limits_0^a \rho w\,(\rho)\, J_0\,(\eta\rho)\, d\rho, \\ &\int\limits_0^\infty \eta^2 H\,(\eta)\, J_0\,(\eta r)\, d\eta - h\,(r)\,\gamma\,(r) = q\,(r)\,, \quad H\,(\eta) = \int\limits_0^a \rho\gamma\,(\rho)\, J_0\,(\eta\rho)\, d\rho. \end{aligned} \qquad (3)$$

Якщо праві частини рівнянь (3) є поліноми степеня $2n$, то їхні розв'язки мають вигляд

$$w\,(\rho) = \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \sum_{k=0}^n c_k \rho^{2k}, \quad \gamma\,(\rho) = \sqrt{a^2-\rho^2} \sum_{k=0}^n b_k \rho^{2k}. \qquad (4)$$

Робота виконана за підтримки ДФФД (проект Ф53.1/026).

e-mail: kit@iapmm.lviv.ua, sushko@email.ua

Існування зліченного числа періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними

Клевчук І.І.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Розглядається гіперболічна система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + B(\varepsilon)u + F(u,\varepsilon) \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ u \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ F(u,\varepsilon) = O(|u|^2)$ при $|u| \to 0$, функція F п'ять раз неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, матриця $B(\varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε, має пару власних значень вигляду $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon),\ \alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) > 0,\ \beta(0) > 0$, а інші власні значення λ задовольняють умову $Re\,\lambda\ <\ -2\chi < 0$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y),\ y = \sigma t - x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Підставляючи $u = \theta(y)$ у рівняння (1), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$(\sigma + a)\frac{d\theta}{dy} = B(\varepsilon)\theta + F(\theta,\varepsilon). \tag{3}$$

Рівняння (3) буде мати періодичний розв'язок періоду 2π тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{\sigma + a}[\beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\frac{\alpha'(0)}{\gamma(0)} + O(\varepsilon^{1,5})] = k, \quad k = \pm 1, \pm 2, ... \tag{4}$$

Тут $\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon)$ – коефіцієнт першого нелінійного доданка нормальної форми рівняння на многовиді, причому $\gamma(0) < 0$. Розв'язуючи рівняння (4) відносно σ, одержимо, що система (1) має зліченне число стійких граничних циклів при деяких значеннях $\sigma = \sigma_k(\varepsilon)$.

Дослідимо існування періодичних розв'язків крайової задачі

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \varepsilon\, f(w(t, x - \Delta)), \tag{5}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \tag{6}$$

де ε – малий додатний параметр, $a \neq 0,\ f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Розв'язок задачі (5), (6) будемо шукати у вигляді хвилі $w = \theta(y),\ y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Підставляючи $w = \theta(y)$ у рівняння (5), одержимо диференціальне рівняння із запізнюючим аргументом. Застосовуючи метод усереднення, можна дослідити умови існування та стійкості зліченного числа періодичних розв'язків. Як приклад розглянуто рівняння (5) з функцією $f(w) = w - w^3$.

e-mail: klevchuk@yandex.ru

Задача Коші з імпульсною дією для сингулярних параболічних систем з подвійним степеневим виродженням

Конаровська М.І.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

У шарі $\Pi^+ = \{(t,x) : t \in [0;T], x \in E_n^+\}$, $E_n^+ = E_{n-1} \times (0;+\infty)$, розглядається задача Коші з імпульсною дією для системи B-параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x) + \sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_l} + \\ + \sum_{|r|+2s<2b} a_{rs}(t,x) D_{x'}^r B_{x_n}^s u(t,x) + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\Delta_t u(t,x)|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i, x),\ 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p = T, \qquad (3)$$

де $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, – оператор Бесселя. У системі рівнянь (1) коефіцієнти A_{kj} при $|k| + 2j = 2b$ сталі, а коефіцієнти $a_{ms}(t,x)$ при $|r| + 2s < 2b$ мають особливість в деякій точці $x'_0 \in E_{n-1}$, $x'_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0,n-1})$. Порядок їх прямування до нескінченності при $x' \to x'_0$ характеризує функція

$$Q_\gamma(x' - x'_0) = \begin{cases} |x' - x'_0|^{-\gamma}, & \gamma > 0, \quad |x' - x'_0| < 1, \\ \ln \frac{1}{|x'-x'_0|}, & \gamma = 0, \quad |x' - x'_0| < 1, \\ 1, & \gamma \in E_1^+, \quad |x' - x'_0| \geq 1, \\ 0, & \gamma < 0, \quad x' \in E_{n-1}. \end{cases}$$

В імпульсних умовах (3) елементи матриці B_i сталі і

$$\Delta_t u|_{t=\tau_i} = u(\tau_i + 0, x) - u(\tau_i, x), \quad u(\tau_i, x) = \lim_{t \to \tau_i - 0} u(t,x).$$

Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків Z системи (1) та знайдено зображення розв'язку u. При виконанні певних умов на гладкість початкової функції φ та неоднорідність f встановлено оцінки розв'язку.

[1] Конаровська М.І. Задачі для параболічних систем з подвійним степеневим виродженням // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: Математика: Зб. наук. пр. – 2012. – Т.2, № 2-3. – С. 96–101.

[2] Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

e-mail: mmi_marina@mail.ru

Двосторонні оцінки розв'язків рівнянь з відхиленням аргументу

Копач М.І.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Шувар Б.А., Обшта А.Ф.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Диференціальні рівняння та інші класи операторних рівнянь із запізненням аргументу мають широке застосування при моделюванні реальних процесів у техніці, медицині, біології, економіці, фізиці, демографії та інших галузях науки і техніки. В таких моделях, що мають просторову протяжність поведінки об'єктів характеризуються не лише зміною по часу, але також часто залежить від їхнього попереднього стану. Так, наприклад, в процесах керування соціальними явищами суттєвий вплив мають ефекти інформаційного запізнення. При дослідженні поширення сигналів у каналах обернених зв'язків, що мають скінченну швидкість, яка пов'язана з інерційністю регуляторів, також потрібно враховувати запізнення.

Починаючи з другої половини XX ст. почались інтенсивні дослідження властивостей розв'язків різних класів рівнянь та їх систем, що містять запізнення. Перші теореми про існування розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та їх поведінку були встановленні В. Файтом, А. Д. Мишкісом, С. Б. Норкіним та іншими авторами. Динамічним системам, що описуються рівняннями із запізненням, присвячена велика кількість робіт. Відмітимо, що в багатьох випадках на рівняння із запізненням аргументу можна поширити методику дослідження звичайних диференціальних рівнянь, в яких невідомі функції залежать тільки від поточного часу.

Авторами доповіді для рівняння виду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) - h(t, x(t), x(\tau(t))),$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$ є неперервною при $t \in [t_0, T]$ дійсною функцією, причому $\Delta(t) \geq 0$, $g(t, y, z)$, $h(t, y, z)$ є неперервними при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M) = \{x : |x - x_0| \leq M\}$ дійсними функціями, розв'язок якого повинен задовольняти умову $x(t) = \varphi(t)$ при $t \leq t_0$ з неперервною функцією $\varphi(t)$, встановлені теореми про існування, єдиність та двосторонні оцінки такого розв'язку. Встановлені також теореми про існування, єдиність та двосторонню апроксимацію розв'язків безтипних функціонально-диференціальних рівнянь.

Одержані результати є продовженням досліджень з [1]. Побудовані алгоритми можна розглядати як аналоги двосторонніх методів Курпеля для диференціальних рівнянь з післядією.

[1] Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи // Ів.-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.

e-mail: kopachm2009@gmai.com

Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Кузь А.М.
Пташник Б.Й.
(ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів)

В області $D^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\}$ розглянемо задачу

$$L\left(\partial/\partial t, \partial/\partial x\right)[\vec{u}] := \sum_{|s|^*=2n} \mathbf{A}_s \frac{\partial^{2n}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = 0, \quad (t,x) \in D^p, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_j[\vec{u}] &:= \alpha_j \left.\frac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \\ U_{n+j}[\vec{u}] &:= \alpha_{n+j} \left.\frac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_{n+j}(x), \\ & j \in \{1,\ldots,n\}, \end{aligned} \tag{2}$$

в якій $s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|s|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$, $\mathbf{A}_s = \|a_{q,j}^s\|_{j,q=1}^m$, $a_{q,j}^s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{(n,0,\ldots,0)} = \mathbf{E}$; система (1) – строго гіперболічна за Петровським; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, $r_q > r_l$, $q > l$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}(\varphi_j^1(x),\ldots,\varphi_j^m(x))$, $\varphi_j^q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{jk}^q \exp(i\mu_k, x)$, $q \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, – майже періодичні функції зі спектром $M_p := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{-k} = -\mu_k, d_2|k|^\sigma \leqslant |\mu_k| \leqslant d_1|k|^\sigma, d_1, d_2, \sigma > 0, k \in \mathbb{Z}^p\}$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + |\mu_{k_p}|$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1}x_1 + \cdots + \mu_{k_p}x_p$.

$\bar{H}_B^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних сум вигляду $\vec{v}(x) = \sum_{|k|\leqslant N}\vec{v}_k \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M_p$, за нормою $\|\vec{v}; \bar{H}_B^\alpha\| = \sum_{q=1}^m (\sum_{\mu_k\in M_p}|v_k^q|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha})^{1/2}$; $C^h\left([0,T], \bar{H}_B^\alpha\right)$ – простір функцій $\vec{u}(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ $d^j\vec{u}(t,\cdot)/dt^j$, $j \in \{0,1,\ldots,h\}$, належать простору $\bar{H}_B^\alpha$ і неперервні за $t \in [0,T]$ в нормі цього простору $\|\vec{u}; C^h\left([0,T], \bar{H}_B^\alpha\right)\| = \sum_{j=0}^h \max_{t\in[0,T]}\|d^j\vec{u}(t,\cdot)/dt^j; \bar{H}_B^\alpha\|$.

Для кожного $\mu_k \in M_p$ позначимо: $\lambda_{jk}, j \in \{1,\ldots,2nm\}$, – корені рівняння $\det L(\lambda, i\mu_k) = 0$, $\vec{h}_{kj}$ – ненульовий стовпець матриці $L^*(\lambda_{jk}, i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\lambda_{jk}, i\mu_k)$, $\Delta(\mu_k, T) = \det\|U_q[\vec{h}_{kj}\exp(\lambda_{jk}t)]\|_{j=1,\ldots,2nm}^{q=1,\ldots,2n}$.

Теорема. *Нехай* $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ *для всіх* $\mu_k \in M_p$ *і існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M_p$ *виконується нерівність* $|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta}$. *Якщо* $\vec{\varphi}_j(x) \in \bar{H}_B^{\eta+\alpha+2n^2m+2n(m-1)}, j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує единий розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^{2n}\left([0,T], \bar{H}_B^\alpha\right)$, *який неперервно залежить від функцій* $\vec{\varphi}_j(x)$.

Знайдена стала η така, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність $|\Delta(\mu_k, T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

e-mail: kuz.anton87@gmail.com, ptashnyk@lms.lviv.ua

Підсумовування функціональних рядів методом гібридних інтегральних пертворень типу Фур'є-Ейлера-Бесселя-(Конторовича-Лєбєдєва)

Ленюк О.М.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на на множині $I_3 = \Big\{ r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3) \cup (R_3, R_4);\ R_0 \geq 0, R_4 < \infty \Big\}$ розв'язку сепаратної системи чотирьох диференціальних рівнянь відповідно Фур'є, Ейлера, Бесселя, (Конторовича-Лєбєдєва)

$$\Big(L_j - q_j^2\Big) u_j(r) = -g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j),\ j = \overline{1,4}, \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\Big(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0\Big) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \Big(\alpha_{22}^4 d/dr + \beta_{22}^4\Big) u_4(r)\Big|_{r=R_4} = g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\Big[\Big(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k\Big) u_k(r) - \Big(\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k\Big) u_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \tag{3}$$

$$j = 1, 2; \quad k = \overline{1,3}.$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $L_1 \equiv d^2/dr^2$ [1], Ейлера $L_2 \equiv B_{\alpha_1}^* = r^2 \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \dfrac{d}{dr} + \alpha_1^2$, $2\alpha_1 + 1 > 0$ [1], Бесселя $L_3 \equiv B_{\nu_2, \alpha_2} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha_2 + 1}{r} \dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu_2^2 - \alpha_2^2}{r^2}$, $\nu_2 \geq \alpha_2 \geq -1/2$ [1], Конторовича-Лєбєдєва $L_4 \equiv B_{\alpha_3} = r^2 \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_3 + 1) r \dfrac{d}{dr} + \alpha_3^2 - \lambda^2 r^2$, $2\alpha_3 + 1 > 0$, $\lambda \in (0, \infty)$ [2].

Методом порівняння розв'язку крайової задачі (1)–(3), побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Ейлера-Бесселя-(Конторовича-Лєбєдєва) підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є-Ейлера-Бесселя-(Конторовича-Лєбєдєва).

[1] Веренич І.І., Ленюк О.М. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є-Ейлера-Бесселя на сегменті $[R_0, R_3]$ полярної вісі // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб.наук. пр. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип. 17. – С.15-31.

[2] Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.

e-mail: Lenyuk_OM@mail.ru

Задача Коші для параболічного диференціального рівняння над полем p-адичних чисел з імпульсним впливом

Лучко В.М.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Нехай p – просте число, яке буде фіксованим. Введемо у полі $\mathbb{Q}$ норму $|x|_p$ за правилом $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma}$, якщо раціональне число x подано у вигляді $x = p^{\gamma}\frac{m}{n}$, де m, n, $\gamma \in \mathbb{Z}$, m, n не діляться на p. Доповнення $\mathbb{Q}$ за p-адичною нормою утворює поле $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел. Норма $|\cdot|_p$ володіє наступними властивостями: $|x|_p = 0$ у тому випадку, коли $x = 0$; $|xy|_p = |x|_p|y|_p$; $|x+y|_p \leq \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$.

Введемо у розгляд клас $\mathfrak{M}_\gamma$ ($\gamma \geq 0$) комплекснозначних функцій $\varphi(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, які задовольняють умови: 1) $|\varphi(x)| \leq c\left(1+|x|_p^\gamma\right)$; 2) існує натуральне число $N = N(\varphi)$ таке, що для довільного $x \in \mathbb{Q}_p$ виконується $\varphi(x+x') = \varphi(x), |x'| \leq p^{-N}$.

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a\left(D^\alpha u\right)(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad t \in (\tau_0, T], \tag{1}$$

розв'язок якого будемо шукати при $t \neq \tau_i$ такий, що задовольняє умови

$$u(t,x)|_{t=\tau_0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u(\tau_i+0,x) - u(\tau_i-0,x) = B_i u(\tau_i-0,x), \tag{3}$$

де $\varphi \in \mathfrak{M}_0$, $a > 0$, $\alpha \geq 1$, B_i – сталі, $\tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_p < T$, $i = 1, ..., p$.

Теорема. *Нехай $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$, $\beta < \alpha$, вирази $1+B_i \neq 0$, $i = 1, ..., p$, тоді розв'язок задачі ((1))–((3)) подається у вигляді $u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} G(t,\tau_0,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi$, де функція Гріна $G(t,\tau_0,x)$ задачі (1)–(3) визначається як обернене перетворення Фур'є матриціанта і для неї мають місце оцінки*

$$|G(t,x)| \leq ct\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

$$\left|\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}\right| \leq c\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p\right)^{-\alpha-1}.$$

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции над полем p-адитических чисел / В.С. Владимиров // УМН. – 1988. – Т. 43, вып. 5. – С. 17-53.

[2] Кочубей А.Н. Параболические уравнения над полем p-адических чисел / А.Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, №6. – С. 1312-1330.

e-mail: vmluchko@gmail.com

Про характеристичну і спектральну матриці крайової задачі для узагальненої диференціальної системи

Мазуренко В.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядається коректна система узагальнених диференціальних рівнянь

$$JY' = [B'(x) + \lambda A'(x)]Y, \tag{1}$$

де J – косоермітова унітарна $p{\times}p$ матриця, $Y(x)$ – p-вимірна вектор-функція, $B(x), A(x)$ – ермітові $p{\times}p$ матриці-функції з елементами з класу $BV^{+}_{loc}[0,\infty)$, $B'(x), A'(x)$ – їх узагальнені похідні (міри Стільтьєса), $\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр.

Спершу вивчається крайова задача, породжена самоспряженими крайовими умовами $PY(0) + QY(b) = 0$, які визначаються неособливою J-унітарною парою матриць $(P,\, Q)$. У цьому випадку виникає дробово-лінійне перетворення, котре кожній парі $(P,\, Q)$ ставить у відповідність N-функцію $\mathcal{X}_{P,Q}(b,\lambda)$, названу характеристичною матрицею, за якою конструктивно будується матриця Ґріна крайової задачі.

Важливим наслідком теорії граничної точки і граничного круга [1], що далі поширюється на випадок системи (1), є обмеженість $\mathcal{X}_{P,Q}(b,\lambda)$ при фіксованому λ і $b \to \infty$. Звідси в свою чергу випливає рівномірна по b обмеженість спектральної матриці розподілу $\mathcal{S}_{P,Q}(b,\lambda)$, що дає підстави для граничного переходу при $b \to \infty$.

Теорема 1. *Якщо* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *то справджується співвідношення*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\mu - \lambda\right)^{-1} d\mathcal{S}_{P,Q}(\mu) = \operatorname{Im}\mathcal{X}_{P,Q}(\lambda).$$

Теорема 2. *Існує визначена на* $(-\infty,\infty)$ *неспадна, неперервна справа, ермітова матриця-функція* $\mathcal{S}(\mu)$ *така, що*

1) $\mathcal{S}(0) = 0$;

2) $\mathcal{S}(\mu) = \lim\limits_{b\to\infty} \mathcal{S}_{P,Q}(b,\mu)$ *для всіх* μ, *в яких* $\mathcal{S}(\mu)$ *неперервна;*

3) $|\operatorname{tr}\mathcal{S}(\mu)| < c(1+\mu^2),\ c > 0.$

Теорема 3. *Якщо* μ *дійсне, то*

$$\mathcal{S}(\mu) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau\to 0+} \int_0^{\mu} \operatorname{Im}\mathcal{X}(\sigma + i\tau)d\sigma.$$

Далі, якщо $\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0$ $(j = 1,2)$, *то*

$$\mathcal{X}(\lambda_1) - \mathcal{X}(\lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\mu-\lambda_1)^{-1} - (\mu-\lambda_2)^{-1}\right] d\mathcal{S}(\mu).$$

[1] Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugenhörigen Entwicklungen Willkürlicher Funktionen // Math. Ann. - 1910. - 68. - S. 220-269.

e-mail: vicmazu@yahoo.com

Про стабілізацію інтеграла Пуассона для систем рівнянь типу Колмогорова

Малицька Г.П.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Буртняк І.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядаємо систему рівнянь

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2b} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k u_r(t,x), \tag{1}$$

$\nu = 1, ..., n, n_0 > 1, n \in N, 0 \leq \tau < t \leq T, b \in N,$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu_0}(x), x \in R^{n_0}, \tag{2}$$

де

$$\partial_t w_\nu(t,x_1) = \sum_{k=0}^{2b} \sum_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k w_r(t,x_1), \tag{3}$$

рівномірно параболічна система в сенсі Петровського для $\forall t \in [0,T]$, $a_k^{r\nu}(t)$ – комплекснозначні функції, неперервні для $\forall t \in [0,T]$, $u_{\nu 0}(x)$ – інтегровна за Лебегом, обмежена функція.

Основна теорема про стабілізацію. *Якщо система (1) задовольняє умови*

1) $a_0^{r\nu} \equiv 0$,

2) похідні функції Гріна $G(t,x_1)$ *відповідної системі (1) параболічної системи (3) задовольняють умову*

$|D^m G(t,x)| \leq Ca(t)^{-1-m} \exp\{-c(\frac{|x_1|}{a(t)})^q\}, a(t) \longrightarrow \infty, t \longrightarrow \infty, C > 0, c > 0, C, c - const, q = \frac{2b}{2b-1}, a(t) > 0.$

І якщо виконується одна із наступних умов:

а) вектор-функція $u_0(x)$ *має кутове граничне середнє* l*:*

$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n_0} a_j} \int_{Rea} u_0(\xi)d\xi \longrightarrow l, a_j \longrightarrow \infty, j = 1, ..., n_0, Rea = \{x, x \in R^{n_0}, 0 \leq \epsilon_1 x_1 \leq a_1, ..., 0 \leq \epsilon_{n_0} x_{n_0} \leq a_{n_0}, a = (a_1, ..., a_{n_0}), e = (\epsilon_1, ..., \epsilon_{n_0}), \epsilon_j = -1, +1; j = 1, ...n_0\};$

б) у систему (1) входять похідні по x_1 *тільки парних порядків, а* $u_0(x)$ *має центрально симетричне середнє* l*:*

$$\frac{1}{2\prod_{j=1}^{n_0} a_j} \int_{Rea+R-ea} u_0(\xi)d\xi \longrightarrow l, a_j \longrightarrow \infty, j = 1, ..., n_0,$$

або $u_0(x)$ *має граничне середнє* l*:*

$$\frac{1}{2^{n_0}\prod_{j=1}^{n_0} a_j} \int_{-a_1}^{a^1} ... \int_{-a_{n_0}}^{a^{n_0}} u_0(\xi)d\xi \longrightarrow l, a_j \longrightarrow \infty, j = 1, ..., n_0,$$

то розв'язок задачі (1), (2) $u(t,x) \longrightarrow l$ *при* $t \longrightarrow \infty$ *рівномірно в кожному скінченному паралелепіпеді простору* R^{n_0}*.*

Алгебраїчні структури у просторі ліпшицевих функцій

Марцінків М.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглянемо ліпшицеве відображення $F : X \to Y$, де X, Y – метричні простори. Метричний простір X з додатною дійснозначною функцією $\alpha(x)$ такою, що $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \le \rho(x_1, x_2) \le \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$, для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ називають *нормованою множиною*, а функцію $\alpha(x)$ – *нормою* метричного простору. Відомо, що довільний метричний простір X є нормованим відносно норми $\alpha(x) = \rho(\theta, x)$, де θ – довільна фіксована точка простору X. Такий простір (X, α) називається *простором з відміченою точкою.* Нормована множина X з відміченою точкою θ називається *нормалізованою*, якщо $\alpha(x) = 1$, для довільних $x \in X$, $x \ne \theta$. Позначимо через $\mathcal{N}$ множину всіх повних нормалізованих множин. Через $Lip_0(X, E)$ позначимо підмножину всіх ліпшицевих відображень $F(x)$ з метричного простору (X, α) з відміченою точкою θ у нормований лінійний простір E, таких, що $|F(x)| \le L_F \alpha(x)$, де L_F – ліпшицева стала. Відомо, що для кожної нормованої множини X існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір $B(X)$ над полем K, а також ізометричне вкладення $\nu : X \to B(X)$ такі, що довільне відображення F з $Lip_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\widetilde{F} : B(X) \to E$, причому $\|\widetilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E. Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором* над метричним простором X.

Алгебраїчні структури у просторі ліпшицевих функцій частково розглядалися Н. Вівером [1, с. 110], зокрема доведена така теорема: нехай X є обмеженою повною нормованою множиною, тоді множина $*$-слабко неперервних скалярних гомоморфізмів простору $Lip(X)$ є ізометричною до X. Використовуючи відомості з [1] вдалося встановити нові факти відносно алгебраїчних структур у просторі ліпшицевих відображень. Зокрема, доведено, що: простір $B(X)' = Lip_0 X$ є підалгеброю (без одиниці) простору $Lip X$; нехай $X, Y \in \mathcal{N}$ і оператор $T : B(Y) \to B(X)$ є лінійним оператором, таким що $T^* : B(X)' \to B(Y)'$ є ізоморфізмом алгебр, тоді $T(Y) = X$; якщо T^* є ізометричним ізоморфізмом алгебр, тоді X та Y є ізометричними; нехай X – повна нормована множина, така що $\alpha(x) \ge 1$ для довільних $x \in X$, $x \ne \theta$, тоді існує замкнена підмножина X^η одиничної сфери $B(X) \cup \theta$ така, що $X^\eta \in \mathcal{N}$ і $B(X)$ є ізометрично ізоморфним до $B(X^\eta)$.

Отже, у доповіді розглядатимуться нормалізовані множини, нелінійні відображення між цими множинами, вільними банаховими просторами та їх властивості.

[1] Weaver N. Lipschitz Algebras. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999.

e-mail: mariadubey@gmail.com

Про один клас індуктивних границь

Маслюченко В.К.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)
Філіпчук О.І.
(Буковинський державний фінансово-економічний університет)

В останні роки пожвавився інтерес до дослідження множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів з значеннями у просторах, близьких до метризовних: σ-метризовних, сильно σ-метризовних просторах, просторах Мура, вичерпних просторах, тощо (див. [1-4] і вказану там літературу).

У праці [5] був введений один клас індуктивних границь $Z = [E, F]$, побудований на основі пари (E, F) нормованих просторів, таких, що F є лінійним підпростором E і тотожне вкладення $F \hookrightarrow E$ неперервне, та вказано умову, коли відповідна індуктивна границя не регулярна. Постає природне питання: з'ясувати, за яких умов індуктивні границі $[E, F]$ будуть належати до тих чи інших класів просторів, близьких до метризовних і якими можуть бути множини $C(f)$ у нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to [E, F]$. Тут ми подамо перші результати, отримані нами у цьому напрямку.

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ і $(F, \|\cdot\|_F)$ – нормовані простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел, такі, що F – лінійний підпростір E і існує така додатна константа γ, що $\|f\|_E \le \gamma\|f\|_F$ для кожного $f \in F$.

Покладемо

$$\widetilde{Z}_n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n} \times F \times \dots,$$

$$Z_n = \{z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \widetilde{Z}_n : \|z\|_n = \sup\{\|z_1\|_E, \dots, \|z_n\|_E, \|z_{n+1}\|_F, \dots\} < +\infty\}$$

і $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$. Простори $(Z_n, \|\cdot\|_n)$ є нормованими, причому тотожні вкладення $Z_n \hookrightarrow Z_{n+1}$ неперервні. Наділимо простір Z топологією індуктивної границі послідовності його підпросторів Z_n [6, с. 46]. Побудований локально опуклий простір $Z = \operatorname{lim\,ind} Z_n$ ми позначаємо символом $[E, F]$.

Теорема 1. *Нехай $B = \{f \in F : \|f\|_F \le 1\}$ – одинична куля у просторі F, причому існує елемент $g \in [B]_E \setminus F$, де $[B]_E$ – замикання множини B у просторі E. Тоді існує така послідовність точок $z^{(m)} \in Z$, що $z^{(m)} \to 0$, але $\{z^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} \not\subseteq Z_n$ для кожного номера n.*

Зауважимо, що пара $(E, F) = (C[0, 1], C^1[0, 1])$ задовольняє умову теореми 1, а пара $(E, F) = (\mathbb{K}, \{0\})$ – ні. При цьому

$$[\mathbb{K}, \{0\}] = \operatorname{lim\,ind} \mathbb{K}_n$$

– це простір фінітних послідовностей скалярів і відповідна індуктивна границя буде регулярною за теоремою Дьєдонне-Шварца [6, с. 54].

Теорема 2. *Нехай нормований простір F є замкненим підпростором нормованого простору E. Тоді $[E, F] = \lim \operatorname{ind} Z_n$ – це строга індуктивна границя і сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.*

[1] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І. Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура // УМЖ. – 2008. – **60**, №11. – С.1539-1547.

[2] Hola L., Piotrowski Z. Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – pp.149–160.

[3] Маслюченко В., Мироник О. Сукупна неперервність відображень зі значеннями в різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. – Ворохта, 20-26 лютого, 2012. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2012. – С.5-6.

[4] Філіпчук О.І. Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2010. – 124 с.

[5] Маслюченко В.К. Ограниченные множества в индуктивных пределах // Чернов. ун-т. – Черновцы, 1983. – 14с. – Деп. в УкрНИИНТИ 25.X.1983, N1204-Ук-Д83.

[6] Маслюченко В.К. Лінійні неперервні оператори. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

e-mail: v.maslyuchenko@gmail.com, o-sh@ukr.net

Про задачі зі спектральними фрактальними операторами параболічного типу

Матійчук М.І.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

При моделюванні фізичних, біологічних, технічних процесів виникають задачі з оператором дробового диференціювання.

На поверхні S' в E_n із класу Діні, яка обмежує область Ω, розглянемо параболічне рівняння

$$\Lambda(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b \Delta_x^b u = 0, \;\; b \geq 1,$$

де Δ_x – оператор Лапласа-Бельтрамі.

За допомогою фундаментального розв'язку $G(t,x)$ визначимо оператори

$$J_\Lambda^\alpha f(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int\limits_S G(t-\tau, x, \xi) f(\tau, \xi) dS_\xi,$$

$$D_\Lambda^\alpha f(t,x) = \Delta_D J_\Lambda^{1-\alpha}(t,x), \quad \alpha \in (0,1).$$

Для рівняння з модифікованим оператором дробового диференціювання в області $Q = (0,T) \times S$ розглядається задача Коші

$$Lu \equiv D_\Lambda^\alpha u - \frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - \sum_{|k| \leq [2b\alpha]} A_k(t,x) D_x^k u = f(t,x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

та двоточкова крайова задача

$$Lu + B(t)P(t)u = f(t,x), \tag{3}$$

$$u|_{t=0}\varphi(x), \quad u|_{t=T} = \psi(x) \tag{4}$$

з невідомими $(u, P(t))$.

Також розглядається задача для псевдодиференціального рівняння

$$Lu = F_{\sigma \to x}^{-1}\Big(-a(\sigma) F_{x \to \sigma} u \Big)$$

з гладким символом.

[1] Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.

[2] Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

e-mail: katty_diff@mail.ru

Дослідження стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами

Матулка К.В., Гладун В.Р.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з додатними елементами

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $N \in \mathbb{N}$ – кількість гілок розгалуження, $i(0) = i_0 = 0$, $i(k) = i_1 i_2 ... i_k$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, $k = 1, 2, ...,$ – мультиіндекси.

ГЛД мають властивість обмеженого нагромадження похибок, що виникають в процесі їх обчислень. Аналіз оцінок похибок підхідних дробів ГЛД показує, що вони залежать не тільки від похибок елементів, але і від самих елементів. Тому актуальними є задачі вивчення умов, при виконанні яких ГЛД є стійким до збурень їх елементів та побудови множин стійкості до збурень.

Позначимо $\xi_{i(k)} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)} / a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m+1)} / a_{i(k-1)\tau}}$, де $Q_{i(k)}^{(2m+1)}$ – залишки підхідних дробів непарного порядку ГЛД (1).

Доведемо, що $\prod_{k=1}^{2s+1} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}}{a_{i(k)}}, 1 \leq s \leq m$, є многочленами від змінних $\xi_{i(k)}$, $k = \overline{1, 2s+1}$ вигляду

$$\prod_{k=1}^{2s+1} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}}{a_{i(k)}} = P_{i(2s)} \frac{Q_{i(2s+1)}^{(2m+1)}}{a_{i(2s+1)}} + R_{i(2s+1)}, s = \overline{1, m}, \tag{2}$$

де $P_{i(2s)} = P_{i(2s)} \left(\xi_{i(2)}, \xi_{i(3)}, ..., \xi_{i(2s)} \right)$, $R_{i(2s+1)} = R_{i(2s+1)} \left(\xi_{i(3)}, \xi_{i(4)}, ..., \xi_{i(2s+1)} \right)$ – многочлени від відповідних змінних, які задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} P_{i(2s)} = \dfrac{1}{a_{i(2s-1)}} \left(\dfrac{b_{i(2s)} b_{i(2s-1)}}{a_{i(2s)}} + \xi_{i(2s)} \right) P_{i(2s-2)} + \dfrac{b_{i(2s)}}{a_{i(2s)}} R_{i(2s-1)}, \\ R_{i(2s+1)} = \dfrac{1}{a_{i(2s)}} \xi_{i(2s+1)} \left(\dfrac{b_{i(2s-1)}}{a_{i(2s-1)}} P_{i(2s-2)} + R_{i(2s-1)} \right), s = \overline{1, m} \end{cases} \tag{3}$$

при початкових умовах $P_{i(0)} = 1$, $R_{i(1)} = 0$.

Використовуючи рекурентні співвідношення (3) встановлено ознаку стійкості до збурень ГЛД (1).

e-mail: katerynamatulka@gmail.com, v_hladun@yahoo.com

Асимптотика фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння з мірами на півосі

Махней О.В.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Розглянемо квазідиференціальне рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(a_{ij}y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \lambda y, \tag{1}$$

де m, n – деякі натуральні числа, $a_{00} = 1$, $a_{10} = a_{01} = 0$, $a_{i0}, a_{0j} \in L_2[a,b]$, $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, – неперервні справа функції обмеженої на $[0,\infty)$ варіації, тобто b_{ij} – міри; λ – комплексний параметр. Покладемо $\lambda = -\rho^r$, $r = n+m$, і розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2r$ секторів S_q, $q = \overline{0, 2r-1}$, які визначаються нерівностями $\frac{q\pi}{r} \le \arg\rho \le \frac{(q+1)\pi}{r}$. Квазіпохідними функції $y(x)$, що відповідають квазідиференціальному виразу з лівої частини рівняння (1), будемо називати функції $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0,r}$, які визначаються формулами

$$y^{[k]} = y^{(k)},\ \ k = \overline{0,n-1};\ \ y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+k]} = \left(y^{[n+k-1]}\right)' - \sum_{i=0}^{n} a_{ik}y^{(n-i)},\ \ k = \overline{1,m}.$$

Теорема. *За накладених вище умов рівняння* (1) *має r лінійно незалежних розв'язків $y_k(x,\rho)$, таких, що при $x \ge a \ge 0$*

$$y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu}(x,\rho), \quad k = \overline{1,r}, \quad \nu = \overline{0,r-1},$$

де функції $z_{k\nu}(x,\rho)$ обмежені в області $\rho \in S_q$, $|\rho| \ge r > 0$; числа ω_k – всі різні корені r-го степеня з -1. Функції $y_k^{[\nu]}(x,\rho)$ неперервні за сукупністю змінних x, ρ і однозначні аналітичні функції змінної ρ для кожного фіксованого значення x. Для $\rho \in S_q$, $\rho \to \infty$ мають місце формули $y_k^{[\nu]}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^\nu + O\left(1/\rho\right)\right]$ рівномірно відносно $x \in [0,\infty)$.

Отримані формули узагальнюють окремі результати роботи [1] і дозволяють досліджувати спектр відповідного квазідиференціального оператора.

[1] Фунтаков В.Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного четного порядка на полуоси $[0,\infty)$ // Изв. АН Аз. ССР. – 1960. – №6. – С. 3-21.

e-mail: makhney1@yahoo.com

Дослідження граничних циклів в системах нелінійних диференціальних рівнянь з дробовими похідними

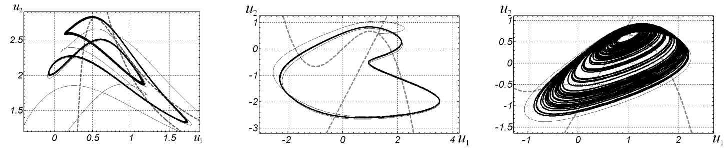
Мелешко В.В., Бойко З.В.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

З точки зору практичних застосувань динамічних систем, найбільший інтерес представляють автоколивання. Останніми роками особливу увагу привертають дробові системи такого типу, а саме системи Лотки-Вольтерра, Бонхоффера-ван-дер-Поля, Чуа, Лоренца. З формальної точки зору, образом автоколивань є атрактори – траєкторії, що притягають до себе близькі розв'язки. Періодичним автоколиванням відповідає найпростіший атрактор – граничний цикл у фазовому просторі. У стандартних системах другого порядку може існувати лише найпростіший нетривіальний атрактор – замкнута траєкторія, до якої збігаються усі найближчі траєкторії. Проведені дослідження показали, що в двокомпонентних системах з дробовими похідними різних порядків

$$\tau \cdot D_\alpha u = F(u, A),$$

де $D_\alpha u = \left(d^{\alpha_1} u_1 / dt^{\alpha_1}, d^{\alpha_2} u_2 / dt^{\alpha_2}\right)^T$ – диференціальний оператор Капуто, α_1, $\alpha_2 \in (0,\ 2)$, $u = (u_1(t), u_2(t))^T$, $F(u, A) = (f_1(u_1, u_2, A), f_2(u_1, u_2, A))^T$ – нелінійна вектор-функція, A – зовнішній параметр, $\tau = diag(\tau_1, \tau_2)$ – ситуація може бути якісно іншою.

В якості об'єктів дослідження вибрані класичні найпростіші нелінійні системи з дробовими похідними: модель брюсселятора і Бонхоффера-ван-дер-Поля. Дослідження показали, що характерні часи і порядки дробових похідних відіграють важливу роль для умов нестійкості розв'язку і нелінійної динаміки системи. Стаціонарні розв'язки в системах такого типу можуть бути нестійкими в більш широкому діапазоні параметрів, ніж у системі з цілими похідними. В результаті нестійкості в таких системах можуть виникати як прості граничні цикли, так і складні (включаючи дивні атрактори) граничні цикли з самоперетинами (рис. 1).



(a) ($б$) ($в$)

Рис. 1. Приклади граничних циклів в системі брюселятора (a) та Бонхоффера-ван-дер-Поля ($б$ та $в$) при: $\alpha_1 = 1.8$, $\alpha_2 = 0.47$, $A = 0.8$, $B = 2$ – (a); $\alpha_1 = 1.8$, $\alpha_2 = 1.2$, $B = 2$, $\tau_1 = 0.1$, $A = -2$ – ($б$), $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 0.75$, $B = 2$, $\tau_1 = 0.1$, $A = -1.145$ – ($в$).

Наближення неперервних функцій на сепарабельних дійсних нормованих просторах

Митрофанов М.А., Равський О.В.
(Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Перші ґрунтовні результати щодо апроксимації неперервних функцій отримані ще Карлом Вейєрштрассом у 1885 році для підмножин скінченновимірних просторів. Для сепарабельного дійсного банахового простору, що допускає розділяючий поліном, Я. Курцвейл у [2] апроксимував неперервні відображення рівномірно аналітичними. Пізніше (у 2001 р.) були отримані позитивні результати щодо апроксимації рівномірно неперервних функцій на банахових просторах М. Боісо та П. Гаєком у [1]. Деяке подальше узагальнення згаданих вище результатів на простори Фреше отримали М. Митрофанов та О. Равський у 2011 р. у праці [3].

У поданій роботі доповідачами показано, що на довільній непорожній підмножині сепарабельного дійсного банахового простору неперервні функції рівномірно наближаються слідами аналітичних та на довільній непорожній відкритій підмножині U сепарабельного нормованого простору неперервні функції наближаються аналітичними на U. А саме, доведено наступні теореми:

Теорема 1. *Нехай X, Y – сепарабельні дійсні банахові простори, $\varnothing \neq A \subset X$, $f : A \to Y$ – неперервна функція та $\varepsilon > 0$. Тоді існують відкрита в X множина $A_\varepsilon \supset A$ та аналітична функція $f_\varepsilon : A_\varepsilon \to Y$ такі, що $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ для всіх $x \in A$.*

Теорема 2. *Нехай X, Y – сепарабельні дійсні нормовані простори, причому простір Y банахів, Нехай A – непорожня відкрита підмножина простору X, $f : A \to Y$ – неперервна функція та $\varepsilon > 0$. Тоді існує аналітична функція $f_\varepsilon : A \to Y$ така, що $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ для всіх $x \in A$.*

[1] Boiso M. C., Hájek P. Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – V.256– P. 80–98.

[2] Kurzweil J. On approximation in real Banach spaces // Studia Math. – 1954. – V.14– P. 214–231.

[3] Митрофанов М.А., Равський О.В. Апроксимація неперервних функцій на просторах Фреше // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54. – №3. – С. 33–40.

e-mail: mishmit@rambler.ru, oravsky@mail.ru

Чисельне розв'язування нелінійної варіаційної крайової задачі та дослідження втрати стійкості числового розв'язку

Муха І.С.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Розглянемо нелінійну варіаційну крайову задачу

$$L(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_*}\left[u'_1(x)+\frac{\lambda}{2}u_2^2(x)\right]^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_*}\left[u'_2(x)+\frac{\lambda}{2}u_1^2(x)\right]^2dx-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x_*}\left(pf_1(x)u_1(x)+pf_2(x)u_2(x)\right)dx\rightarrow min \qquad (1)$$

$$u_i\left(x_0\right)=u_i\left(x_*\right)=0;\ i=1,2.$$

Ця задача є дуже спрощеною математичною моделлю процесів геометрично-нелінійного деформування тіл.

Застосуємо до розв'язання задачі (1) покрокову схему за параметром p. Лінеаризацію нелінійної варіаційної задачі на кроці здійснимо за методом Ньютона. Для розв'язування лінеаризованої варіаційної задачі використаємо метод скінченних елементів. Числову схему побудуємо так, щоб можна було змінювати не тільки крок розбиття за змінною x, але й порядок апроксимації на елементі. Проведено низку досліджень збіжності запропонованого підходу на прикладі задачі, яка має аналітичний розв'язок. Показано, що зростання параметра λ приводить до сповільнення збіжності числового процесу. Тому постає проблема втрати стійкості числового розв'язку такої задачі.

Для дослідження стійкості за Ейлером будемо виходити з другої варіації функціоналу (1). Побудуємо варіаційну проблему на власні значення за приростом Δp. Лінеаризація здійснена в околі розв'язку, отриманого на черговому кроці за параметром p. Розв'язування варіаційної проблеми на власні значення реалізовано на основі таких самих скінченно-елементних апроксимацій, як і розв'язок нелінійної задачі. Отриману в результаті цього узагальнену алгебричну проблему на власні значення розв'язано за методом ітерацій підпростору. Повна узагальнена проблема малої вимірності, яка виникає на кожній ітерації, розв'язана шляхом зведення до класичної матричної проблеми і далі застосуванням перетворення Хаусхолдера та QL-алгоритму.

[1] Муха І.С. Наближене розв'язування задач нелінійного деформування товстостінних гнучких тіл, покритих текстурою // Нелінійні проблеми аналізу: Тези доповідей VI Всеукраїнської наукової конференції. — Івано-Франківськ: Плай, 2008. — С. 72.

e-mail: imukha@franko.lviv.ua

Асимптотичний аналіз крайової задачі Сіньоріні в дворівневому густому з'єднанні

Наквасюк Ю.А.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Нехай B – об'єднання скінченної кількості гладких плоских областей, що не перетинаються та не дотикаються. Крім того, множина B строго розміщується в квадраті $\square = \{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}$. Нехай B довільним чином поділена на 2 класи: $B^{(1)} = \bigcup\limits_{k=1}^{K_1} B_k^{(1)}$ та $B^{(2)} = \bigcup\limits_{k=1}^{K_2} B_k^{(2)}$.

Розглянемо дворівневе густе з'єднання Ω_ε типу $3:2:1$, яке складається з тіла $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x' = (x_1, x_2) \in Q = (0,a) \times (0,a), \ 0 < x_3 < \gamma(x')\}$ та великої кількості тонких криволінійних циліндрів

$$G_\varepsilon^{(m)} = \bigcup_{k=1}^{K_m} G_\varepsilon^{(m)}(k), \ \ G_\varepsilon^{(m)}(k) = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} \Big\{ x : \Big(\frac{x_1}{\varepsilon} - i, \frac{x_2}{\varepsilon} - j \Big) \in B_k^{(m)}, x_3 \in (-d_m, 0] \Big\},$$

де $\gamma \in C^1(\overline{Q})$ та $\min_{x' \in \overline{Q}} \gamma(x') = \gamma_0 > 0, \quad m = 1,2, \ \varepsilon = \frac{a}{N}, \quad 0 < d_2 < d_1$.

Нехай $S_\varepsilon^{(m)} := \bigcup\limits_{k=0}^{K_m} S_\varepsilon^{(m)}(k), \quad \Gamma_\varepsilon^{(m)} := \bigcup\limits_{k=0}^{K_m} \Gamma_\varepsilon^{(m)}(k), \quad m = 1,2$, де $S_\varepsilon^{(m)}(k)$ та $\Gamma_\varepsilon^{(m)}(k)$ – об'єднання бічних поверхонь та основ $G_\varepsilon^{(m)}(k)$ відповідно.

В області Ω_ε розглядається наступна крайова задача:

$$\begin{array}{rcll}
-\Delta u_\varepsilon + k_0\, u_\varepsilon & = & f, & x \in \Omega_0, \\
-\Delta u_\varepsilon + k_m\, u_\varepsilon & = & f, & x \in G_\varepsilon^{(m)}, \ m = 1,2 \\
u_\varepsilon \le g_m, \quad \partial_\nu u_\varepsilon & \le & \varepsilon d_m, & x \in S_\varepsilon^{(m)}, \ m = 1,2 \\
(u_\varepsilon - g_m)\,(\partial_\nu u_\varepsilon - \varepsilon d_m) & = & 0, & x \in S_\varepsilon^{(m)}, \ m = 1,2 \\
u_\varepsilon & = & 0, & x \in \Gamma_\varepsilon^{(m)}, \ m = 1,2 \\
\partial_\nu u_\varepsilon & = & 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon^{(1)} \cup \Gamma_\varepsilon^{(1)} \cup S_\varepsilon^{(2)} \cup \Gamma_\varepsilon^{(2)}), \\
[u_\varepsilon]|_{x_3=0} = [\partial_{x_3} u_\varepsilon]|_{x_3=0} & = & 0, & x' \in Q,
\end{array}$$

∂_ν – зовнішня нормальна похідна, а через дужки позначено стрибок функції.

Нехай $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$, $D_1 = Q \times (-d_1, 0)$, $D_2 = Q \times (-d_2, 0)$ – паралелепіпеди, що заповнюються тонкими циліндрами першого та другого рівня, відповідно, при $\varepsilon \to 0$. Також нехай $\Xi_0 = \{x : x' \in (0,a) \times (0,a), \ \ x_3 = 0\}$, $\Xi_{d_1} = \{x : x' \in (0,a) \times (0,a), \ \ x_3 = -d_1\}$, $\Xi_{d_2} = \{x : x' \in (0,a) \times (0,a), \ \ x_3 = -d_2\}$. Функції $f \in L^2(\Omega_1)$, $d_1 \in H^1(D_1)$, $d_2 \in H^1(D_2)$, $g_1 \in H^1(D_1; \Xi_{d_1} \cup \Xi_0) = \Big\{ v \in H^1(D_1) : v\,|_{\Xi_{d_1} \cup \Xi_0} = 0 \Big\}$, $g_2 \in H^1(D_2; \Xi_{d_2} \cup \Xi_0) = \Big\{ v \in H^1(D_2) : v\,|_{\Xi_{d_2} \cup \Xi_0} = 0 \Big\}$, k_m – додатні сталі.

Вивчено асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку u_ε даної задачі при $\varepsilon \to 0$, тобто, коли число тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

e-mail: ulyokaz@ukr.net

Задача Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною порядку $\alpha, \alpha \in (1;2)$ за часовою змінною та з узагальненими функціями в початкових умовах

Пасічник О.В.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Нехай $Q_T = \{(x,t) : \ x \in R, \ t \in (0;T]\}$, де $T > 0$; $D(R)$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних в R функцій; $D'(R)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(R)$.

В Q_T розглядаємо задачу Коші для півлінійного рівняння дифузії

$$u_t^{(\alpha)}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \quad \alpha \in (1;2) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_1(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_2(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

де $u_t^{(\alpha)}$ – дробова похідна Рімана–Ліувілля порядку α (див. [1]), функції $u_1, u_2 \in D'(R)$ та мають скінченні порядки сингулярності, а функція $g(x,t,z) \quad ((x,t) \in Q_T, z \in R)$ неперервна.

Розв'язність задачі (1)-(3) досліджуємо подібно, як у роботі [2] для випадку $\alpha \in (0;1)$. Доводимо еквівалентність даної задачі та деякого інтегрального рівняння у ваговому L_1–просторі. Використовуючи оцінки із [3], встановлюємо деякі властивості вектор-функції Гріна задачі Коші. Застосовуючи ці властивості та теорему Шаудера про нерухому точку, знаходимо достатні умови щодо функцій u_1, u_2 та g, за яких узагальнена задача Коші (1)-(3) розв'язна.

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.

[2] Пасічник О. Існування розв'язку задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом з узагальненими функціями в початковій умові // Вісник Львів. ун–ту. Серія мех.–мат. 2011. Випуск 75.

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin. – 2004. – 390p.

e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

Аналог теореми Шварца для оператора кроскореляції в класі гіперфункцій

Патра М.І.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Нехай $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ – простір гіперфункцій з компактними носіями на півосі $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ (див. [1]). Для будь-якої гіперфункції $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ і для будь-якої дійсної аналітичної функції $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ означимо операцію кроскореляції наступним чином:

$$(f \star \varphi)(t) := -\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+t)dz, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

де Γ – замкнутий контур, що обходить носій f один раз в додатному напрямку в перетині області визначення аналітичної функції F та області визначення функції $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot + t)$, де $\boldsymbol{\varphi}$ – аналітичне продовження φ. У статті [2] доведено, що $f \star \varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ для довільних $f \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ і $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$.

Класична теорема Шварца [3] характеризує оператори, що комутують з оператором зсуву $T_h : \varphi(t) \longmapsto \varphi(t-h)$, як оператори згортки з деяким розподілом. У доповіді розглянемо аналог теореми Шварца для оператора кроскореляції $K_f : \mathcal{A}(\mathbb{R}_+) \ni \varphi \longmapsto f \star \varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема (аналог теореми Шварца)**.** *Нехай K – неперервне лінійне відображення простору $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ в себе, яке для всіх $h \in \mathbb{R}_+$ і $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ задовольняє умову*

$$K\tau_h\varphi = \tau_h K\varphi, \tag{1}$$

де τ_h – оператор зсуву, визначений формулою $\tau_h\varphi(t) = \varphi(t+h)$. Тоді існує така єдина гіперфункція $f \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$, що виконується умова $K\varphi = f \star \varphi$.

Навпаки, для кожної гіперфункції $f \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ оператор кроскореляції $K_f\varphi = f \star \varphi$ є неперервним лінійним відображенням простору $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ в себе, яке задовольняє умову (1).

[1] Komatsu H. An Introduction to the Theory of Generalized Functions. – Tokyo: University Publ., 2000.
[2] Patra M. I., Sharyn S. V. Operator calculus on the class of Sato's hyperfunctions // Carpathian Mathematical Publications. – 2013. – V.5, No1. – P. 114–120.
[3] Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.

e-mail: patra-m@mail.ru

Багатоточкова задача для неперервно збуреного стохастичного параболічного рівняння

Перун Г.М.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

У базовому ймовірнісному просторі (Ω, F, P) розглядається нелокальна багатоточкова за t стохастична задача [1]

$$d_t u(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k|\le 2b} a_k D_x^k u(t,x,\omega)\Big]dt + \Big[\sum_{|k|\le b} c_k D_x^k u(t,x,\omega)\Big]dw(t,\omega), \qquad (1)$$

$x \in E_n, t > 0, \omega \in \Omega,$

$$\mu u(t,x,\omega)\,|_{t=0} - \mu_1 u(t,x,\omega)|_{t=t_1} - ... - \mu_m u(t,x,\omega)\,|_{t=t_m} = \varphi(x,\omega). \qquad (2)$$

Тут $\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k D_x^k$, $\sum\limits_{|k|\le b} c_k D_x^k$ – диференціальні комплексно значні многочлени, $w(t,\omega)$ – стандартний скалярний вінерівський процес, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \in (0; +\infty)$, $m \in \{2, 3, ...\}$, $\{t_1, t_2, ..., t_m\} \in (0, T)$ – фіксовані параметри, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = T$, початкова функція $\varphi(x,\omega)$ з імовірністю 1 допускає перетворення Фур'є і обмежена за x.

При обмеженнях на дані задачі

$$Re\Big(\sum_{|k|=2b} a_k (i\sigma)^k\Big) + \frac{1}{2}\Big(\Big(Im\sum_{|k|=b} c_k (i\sigma)^k\Big)\Big)^2 \le -\delta_1|\sigma|^{2b} + \delta_2, \delta_1 > \delta_2 > 0,$$

$\sigma \in E_n$ (умова параболічності), $\mu > \sum\limits_{s=1}^{m} \mu_2 |Q(t_s,\sigma,\omega)|$ при кожному $\sigma \in E_n, \omega \in \Omega$ з імовірністю 1 існує функція Гріна задачі (1), (2)

$$G(t,x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{p=0}^{\infty} \mu^{-p-1} G_0(t + p\sum_{s=1}^{m} t_s, x, \omega),$$

з допомогою якої визначається її розв'язок.

При цьому використано позначення

$$Q(t_s,\sigma,\omega) \equiv \exp\Big\{\Big[\sum_{|k|\le 2b} a_k (i\sigma)^k - \frac{1}{2}\Big(\sum_{|k|\le b} c_k (i\sigma)^k\Big)^2\Big]t_s + \sum_{|k|\le b} c_k (i\sigma)^k w(t_s)\Big\},$$

$G_0(t,x,\omega)$ – функція Гріна стохастичного рівняння.

З врахуванням операції математичного сподівання M справджується оцінка $|MD_x^k u(t,x,\omega)| \le C_1 t^{-\frac{|k|}{2b}} |\varphi|_{C(E_n)}$.

[1] Городецький В.В., Спіжавка Д.І. Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами // Доповіді НАН України, 2009. – № 12. – С. 7–12.

e-mail: katty_diff@mail.ru

Гомоморфізми алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі

Петрів Г.М.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Нехай X – банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Функція $f : X \to \mathbb{C}$ називається аналітичною функцією обмеженого типу, якщо f обмежена на обмежених множинах і звуження f на кожен скінченновимірний підпростір $V \subset X$ є аналітичною функцією на V. Позначимо $H_b(X)$ алгебру цілих функцій обмеженого типу. Відзначимо, що $H_b(X)$ є алгеброю Фреше відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах ([1]).

У доповіді буде досліджено гомоморфізми $H_b(X)$ в деяку скінченновимірну алгебру A. Зокрема, буде наведено приклад гомоморфізму який не є оператором "значення в точці"деякого елемента з A в сенсі функціонального числення.

Нехай A – деяка скінченновимірна алгебра. Розглянемо тензорний добуток $A \otimes X$, кожен елемент якого $\overline{a} \in A \otimes X$ можна подати у вигляді формальної суми $\sum_k a_k \otimes x_k$, де $a_k \in A$, $x_k \in X$. Проективною нормою на тензорному добутку називають норму $||\overline{a}||_\pi = \inf \sum_k ||a_k||||x_k||$, де inf береться по всіх зображеннях $\overline{a} = \sum_k a_k \otimes x_k$.

Позначимо $A \otimes_\pi X$ – поповнення $A \otimes X$ за нормою $|| \cdot ||_\pi$. Нехай $f \in H_b(X)$. Відображення $f \mapsto \overline{f}(\overline{a})$ є гомоморфізмом алгебри $H_b(X)$ в A, де $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{a}(f)$.

Нагадаємо, що довільне n-лінійне відображення $B : X \times \ldots \times X \to \mathbb{C}$ (так зване продовження Арона-Бернера) може бути продовжене до неперервного, n-лінійного відображення $\widetilde{B} : X'' \times \ldots \times X'' \to \mathbb{C}$ наступним чином:

$$\widetilde{B}(x''_1, \ldots, x''_n) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \ldots, x\alpha_n),$$

де для кожного $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, (x_{α_k}) – це напрямленість в X, збіжна в $*$-слабкій топології до x''_k ([2], [3]).

Твердження. *Нехай* $\overline{z} \in A \otimes X''$. *Тоді існує функція* $\widetilde{\overline{f}}(\overline{z}) \in H_b((A \otimes_\pi X'', A))$ *і відображення* $f \mapsto \widetilde{\overline{f}}$ *є гомоморфізмом алгебр* $H_b(X)$ *і* $H_b((A \otimes_\pi X''), A)$.

[1] Aron R.M., Cole B.J., and Gamelin T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – 415. – P. 51-93.

[2] Zagorodnyuk A., Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 134(2006), 2559-2569.

[3] Zagorodnyuk A., Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces, Contemporary Math. 435 (2007), 381-394.

galja_petriv@mail.ru

Дослідження асимптотичних властивостей неперервних розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь

Поварова О.А.
(Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут")

Для лінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x(q_j t), \tag{1}$$

де $t \in R^+ = [0; +\infty)$, $a, b_j, q_j, j = 1, 2, ...,$ – дійсні сталі, встановлено умови існування неперервних розв'язків та вивчено структуру їх множини.

Доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < a < 1,\ q_j \geq q > 1;$

2) $b = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty,\ \ \Delta = \dfrac{b}{a - a^q} < \dfrac{1}{2}.$

Тоді довільний неперервний обмежений при $t \geq 0$ *розв'язок* $x(t)$ *рівняння (1) можна представити у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

в якому функції $x_i(t),\ i = 0, 1, ...,$ *є розв'язками послідовності рівнянь*

$$x_0(t+1) = ax_0(t),$$

$$x_i(t+1) = ax_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{i-1}(q_j t),\ i = 1, 2, ...,$$

і шукаються у вигляді

$$x_0(t) = a^t \omega(t),$$

$$x_i(t) = -\sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j\ x_{i-1}(q_j(t+p)) \right],\ i = 1, 2, ...\ ,$$

де $\omega(t)-$*довільна неперервна* 1*-періодична функція.*

e-mail: olena_sivak@ukr.net

Методи декомпозиції області для задач про контакт пружних тіл з фрикційним проковзуванням

Прокопишин І.І.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Прокопишин І.А.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Розглянуто задачу про контакт кількох пружних тіл скінченних розмірів за умов фрикційного проковзування. На основі методу штрафу, здійснено слабке формулювання цієї задачі у вигляді проблеми мінімізації недиференційовного функціонала в гільбертовому просторі. За допомогою регуляризації цього функціонала, задачу зведено до нелінійного варіаційного рівняння.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано низку паралельних нестаціонарних ітераційних методів декомпозиції області (МДО), які зводять розв'язування задачі у всій області до розв'язування послідовності незалежних задач в окремих тілах. На кожній ітерації отриманих методів необхідно паралельно розв'язувати деякі лінійні варіаційні рівняння для окремих тіл, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту. Ці МДО є узагальненням методів декомпозиції області, запропонованих у працях [1, 2, 3, 4] для задач про контакт пружних тіл за відсутності тертя.

Розроблено програмне забезпечення, що реалізує отримані МДО на основі скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах для плоских контактних задач.

Числові дослідження ефективності одержаних методів здійснено для задач про контакт з проковзуванням двох ізотропних пружних тіл.

[1] Прокопишин І. І. Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
[2] Прокопишин І. І. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2010. – 163 с.
[3] Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity // Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. of ENUMATH 2009, Uppsala, July 2009. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 297–305.
[4] Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. – 2012. – 32 p. – [Електронний ресурс: http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf].

e-mail: ihor84@gmail.com, lviv.pi@gmail.com

Про асимптотичну поведінку розв'язків оберненої задачі для ультрапараболічного рівняння

Процах Н.П.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Нехай Ω і D обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega,\ y \in D,\ t \in (0,T)$, де T – фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_T = \Omega \times D \times (0,T)$, $G = \Omega \times D$.

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$
$$+c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t)f_0(t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0 \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$\int\limits_G K(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \qquad\qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

де $u(x,y,t), f_0(t)$ – невідомі функції, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\}$, ν – одинична зовнішня нормаль до S_T, а функція g задовольняє умову: існує така додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta)| \le g^0|\xi - \eta|$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi,\, \eta \in \mathbb{R}^1$.

Знайдено умови за яких існує єдина пара функцій $(u(x,y,t), f_0(t))$ така, що $u \in V_1(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G)),\ f_0 \in L^2(0,T)$, де $V_1(Q_T) = \{w :\ w,\ w_{x_i},\ w_{y_j} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,l, w|_{S_T^1} = 0,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$, яка є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Також встановлено, що за умови $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} |E'(\tau)|^2\,d\tau = 0$, для узагальненого розв'язку $(u(x,y,t), f_0(t))$ задачі (1)–(4) виконуються такі збіжності: $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(\cdot,\cdot,t); L^2(G)\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} \int\limits_G \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\,dxdydt = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} |f_0(t)|^2\,dt = 0$.

e-mail: protsakh@ukr.net

Задача Неймана для параболічного рівняння з імпульсною дією і виродженням

Пукальський І.Д.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Нехай D – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \leq n-1$. В області $Q = [\tau_0, T] \times D$ вивчається задача знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t = \tau_p$, $p \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$\partial_t u - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} u + a_0(t,x)u = f(t,x), \qquad (1)$$

умови за змінною t

$$u(\tau_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \qquad (2)$$
$$u(\tau_p + 0, x) - u(\tau_p - 0, x) = b_p(\tau_p, x)u(\tau_p - 0, x) + \varphi_p(\tau_p, x)$$

і крайову умову

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} h_k(t,x)\partial_{x_k} u + h_0(t,x)u\Big]\Big|_{\Gamma} = g(t,x), \qquad (3)$$

де $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_N < T$, $\Gamma = [0,T) \times \partial D$.

Задачу (1) – (3) досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $x \to z \in \partial D$; $a_{ij} = O(\rho^{\beta_i+\beta_j}(x;\partial D))$, $h_k = O(\rho^{\beta_i}(x,\partial D))$, $a_i = O(\rho^{-\mu_i}(x,\partial D))$, $a_0 = O(\rho^{-\mu_0}(x,\partial D))$, $h_0 = O(\rho^{-\delta}(x,\partial D))$, $\max(-a_0(t,x)) \equiv a < \infty$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\mu_i \geq 0$, $\mu_0 \geq 0$, $\delta > 0$.

При визначених умовах гладкості на коефіцієнти рівняння (1), крайової умови (3), функції φ_0, φ_p, f, g і поверхню ∂D встановлено єдиність, існування і інтегральне зображення розв'язку задачі (1) – (3).

[1] Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

[2] Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: Монографія. – Чернівці, 2010. – 248 с.

e-mail: katty_diff@mail.ru

Використання дробових похідних для аналізу нестаціонарного руху газу в трубопроводах і складних пористих середовищах

П'янило Я.
(ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Лопух Н., Браташ О., Васюник М.
(ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Васюник І.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Метою роботи є застосування дробових похідних за часом для аналізу неусталеного руху газу в трубопроводах і підземних сховищах газу.

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^l}{\partial z}\right)=2mh\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{p}{\chi}\right)+2qp_{at}\right].$$

Рух газу в трубопроводах із використанням дробових похідних порядку α за часом описується системою

$$\frac{\partial^\alpha \omega(x,t)}{\partial t^\alpha}+\frac{\partial p}{\partial x}+a\omega-bp=\Theta(x,t),\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}p(x,t)=\Psi(x,t).$$

Якщо Im оператор перетворення Лапласа-Карсона функції $f(t)$, то в зображеннях Лапласа-Карсона остання система у дробових похідних запишеться так:

$$(s^\alpha+a)\,\bar\omega+d\,\bar p/dx-b\bar p=ks^\alpha\omega(x,0)+\bar\Theta,\quad d\bar\omega/dx+s^\alpha\bar p/c^2=ks^\alpha p(x,0)/c^2+\bar\Psi.$$

Якщо $k=0$, то отримуємо похідну Рімана-Ліувіля, а для $k=1$ – похідну Капуто.

Формулювання задачі. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\partial^2 f/\partial x^2-D^\alpha_{0+}f(t)/a^2=0$$

у дробових похідних Рімана-Ліувіля

$$D^\alpha_{0+}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$$

за нульової початкової умови та $f(0,t)=\sqrt{\pi}/a\sqrt{t}$. Для $\alpha=1$ дробова похідна Рімана-Ліувіля переходить у звичайну похідну і $f(x,t)=\sqrt{\pi}\exp\left[-x^2/\left(4a^2t\right)\right]/\left(a\sqrt{t}\right)$.

Аналітичний розв'язок. Перетворення Лапласа-Карсона $\mathrm{Im}\,(f)=F(p)$ дробової похідної таке: $\mathrm{Im}\,(D^\alpha_0 f(t))=p^\alpha F(p)$ ($F(p)$ – перетворення Лапласа-Карсона функції $f(t)$). Тому в просторі Лапласа-Карсона вихідне рівняння запишеться так:

$$F''(x,s)-p^\alpha F(p)/a^2=0.$$

Його загальний розв'язок за заданих крайових умов має вигляд

$$F(x,s)=\frac{\pi}{a}\sqrt{s}e^{z_1 x}\ =\frac{\pi}{a}\sqrt{s}e^{-xs^{\alpha/2}/a}.$$

Переходячи в останній формулі до оригіналу, отримуємо точний аналітичний розв'язок сформульованої задачі.

Спектральний метод розв'язування. Приймаємо, що функції, які входять у розв'язок задачі, можна подати у вигляді ряду Фур'є-Лагерра. Для функції $f(t)$, $t\in[0,\infty)$, що розкладається у ряд за многочленами Лагерра $L_m(t)$, відповідне інтегральне подання коефіцієнтів визначається так

$$f_m=\int\limits_0^\infty e^{-t}L_m(t)f(t)dt.$$

Нехай $k(t)=t^{-\alpha}$. Функції $k(t)$ й $f(t)$ подамо рядами Фур'є за многочленами $L_m(t)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t k(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\ =\sum_{n=0}^\infty c_n\,L_n(t),$$

$$c_n\ =\sum_{m=0}^n k_m\,f_{n-m}\ =\sum_{m=0}^n k_{n-m}\,f_m.$$

Тут k_m, f_m – коефіцієнти Фур'є-Лагерра функцій $k(t)$ і $f(t)$.

Використавши подання функцій рядами за многочленами Лагерра, отримуємо рекурентне співвідношення для визначення коефіцієнтів Фур'є-Лагерра

$$f''_m(x)=c_m(x)\big/\big[a^2\Gamma(1-\alpha)\big].$$

e-mail: Pjanylo@cmm.lviv.ua

Оптимальні квадратурні формули в базисах квазіортогональних многочленів

П'янило Я.Д.
(Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Собко В.Г.
(МЕГУ імені академіка Степана Дем'янчука)

Проблема. *У даній роботі вивчаються спеціальні класи поліномів, які призначені для наближеного розв'язування крайових задач. З цією метою розглядається оператор інтегрування, який для* $f \in L_{2,\rho}[-1,1]$ *ставить у відповідність*

$$Lf(x) = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2)\,dx_2 = \int_{-1}^{x} (x - x_1)\,f(x_1)\,dx_1. \tag{1}$$

Як відомо, він не має відмінних від нуля власних значень, отже відповідна задача про побудову власних функцій для цього оператора позбавлена сенсу. Тому, замість спектральної задачі на власні значення розглядається відповідна квазіспектральна задача, грунтуючись на властивостях інтегрального оператора (1) в гільбертовому просторі $L_{2,\rho}[-1,1]$.

Квазіспектральна задача для інтегрального оператора. Для заданого $n = 1, 2, ...$ знайти такі значення параметра , при яких рівняння

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2)dx_2 = -\lambda U(x) + \tau_1 R_{n+1}(x) + \tau_2 R_{n+2}(x) + w_0 R_0(x) \tag{2}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $U = U(x) \in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ степеня $\leq n$, де τ_1, τ_2, w_0 деякі параметри, а $R_{n+1}(x)$ та $R_{n+2}(x)$ задані (і зафіксовані) ортогональні поліноми степенів рівних $n+1$ та $n+2$ відповідно.

Квазіспектральна задача для диференціального оператора. Для заданого $n = 1, 2, ...$ знайти такі значення параметра $\bar{\lambda}$, при яких рівняння

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\bar{\lambda}V(x) + \bar{\tau}_1 \frac{dR_{n+1}(x)}{dx} + \bar{\tau}_2 \frac{dR_{n+2}(x)}{dx} \tag{3}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $V = V(x) \in \tilde{L}_{2,0}[-1,1]$ степеня $\leq n$, де $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ деякі параметри. При $\bar{\lambda} = 1/\lambda$, $\bar{\tau}_1 = \tau_1/\lambda$ та $\bar{\tau}_2 = \tau_2/\lambda$ рівняння (2), (3) еквівалентні між собою.

Суму всіх доданків правої частини (2) та (3), крім першого, традиційно називають нев'язкою. У відповідності з рекомендаціями τ - методу Ланцоша [4], або a-методу Дзядика [1] для побудови нев'язок доцільно вибрати поліноми Чебишова $T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2}(x)$. Із результатів Дзядика (про порядок апроксимації розв'язків інтегральних рівнянь в рівномірній чебишовській метриці) випливає, що при розв'язуванні інтегральних рівнянь нев'язку доцільно конструювати із поліномів Чебишова першого роду, а при розв'язанні диференціальних рівнянь її вигідно брати у вигляді комбінації похідних поліномів Чебишова. В. Дзядик та його учні і послідовники розглядали апроксимацію в чебишовській метриці розв'язків звичайних диференційних рівнянь та їх систем, деяких інтегральних рівнянь та ін. [1], в яких систематично застосовувались результати теорії апроксимації функцій [2,3].

Аналогічно, коли метою є апроксимація в просторі $L_{2,\rho}[-1,1]$, то тоді нев'язку в (2) доцільно будувати із поліномів Чебишова першого роду, а в (3) - із похідних многочленів Чебишова першого роду, або, що те саме, із многочленів Чебишова другого роду. В задачах апроксимації розв'язків крайових задач використовується не тільки значення параметра λ (характеристичні значення), але і значення параметра τ, що відрізняє ці методи від класичних спектральних методів [5].

В роботі на базі многочленів Чебишева першого роду побудовано біортогональну систему поліномів, розглянуто задачу апроксимації функції в побудованому біортогональному базисі. В ході обчислювального експерименту на модельних задачах досліджено вплив параметрів методу на процес апроксимації.

[1] Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1998.

[2] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

[3] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

[4] Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд. физ. мат. литер., 1961. – 524 с.

[5] Глетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

e-mail: Pjanylo@cmm.lviv.ua

Нелокальна крайова задача для гіперболо-еліптичного рівняння в циліндричній області

Савка І.Я.
(ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Гой Т.П.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Нехай $\mathcal{D}^p = (-\alpha, \beta) \times \Omega_p$, α, β – додатні числа, Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, I – відрізок прямої $\mathbb{R}$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $||k|| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, $(t, x) \in \mathcal{D}^p$, $p \in \mathbb{N}$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір Соболєва, отриманих поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(1 + \|k\|^2\right)^q |\varphi_k|^2 \right)^{1/2};$$

$\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, – простір функцій $u(t, x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x)$ таких, що для кожного фіксованого $t \in I$ функції $\dfrac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j}$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору $\mathbf{H}_q$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою $\|u; \mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{t \in I} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; \mathbf{H}_q \right\|$.

В циліндричній області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу спряження (при $t = 0$) для мішаного рівняння гіперболо-еліптичного типу з нелокальною умовою: знайти функцію $u = u(t, x)$, яка справджує умови

$$u \in \mathbf{C}^1([-\alpha, \beta]; \mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([0, \beta]; \mathbf{H}_q) \tag{1}$$

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}_-^p, \\ u_{tt} + b^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}_+^p, \end{cases} \tag{2}$$

$$u|_{t=-\alpha} + \mu\, u|_{t=\beta} = \varphi(x), \quad x \in \Omega_p, \tag{3}$$

де a, b – додатні числа, $\mathcal{D}_-^p = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}$, $\mathcal{D}_+^p = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\Delta = \partial/\partial x_1 + \ldots + \partial/\partial x_p$, $\varphi(x)$ – задана функція.

У роботі встановлено умови єдиності та існування розв'язку задачі (1)-(3).

[1] Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, № 1. – С. 190–191.

[2] Демина Т. Н. Критерий единственности решения смешанной задачи для уравнения гиперболо-эллиптического типа в цилиндрической области // Доклады АМАН. – 2005. – Т. 7. – №2. – С. 18–20.

e-mail: s-i@ukr.net, tarasgoy@yahoo.com

Знаходження початкових умов для параболічного рівняння з відхиленням аргументу

Сергєєва Л.М.
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

Розглянемо рівняння параболічного типу з відхиленням аргументу

$$u_t(x,t) = p(t)u_{xx}(x, t+\mu),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$, де $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}, p(t) > 0$ – неперервна функція, $\mu \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Ставиться задача про знаходження вигляду початкової умови для глобального розв'язку рівняння (1) при $t = 0$.

Згідно з методом Фур'є частинний розв'язок (1) шукаємо у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тоді з (1) одержуються рівняння для $T(t)$ і $X(x)$

$$T'(t) + p(t)\lambda T(t+\mu) = 0, \tag{2}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3}$$

Як показано в [1], при виконанні умови $\lambda\beta e|\mu| < 1$ при $|p(t)| < \beta$ для рівняння (2) можна отримати рівняння без відхилення аргументу

$$T'(t) + \bar{p}(t)T(t) = 0, \tag{4}$$

всі розв'язки якого будуть глобальними розв'язками рівняння (2). При цьому $\bar{p}(t) = p(t)\lambda e^{\int_0^\mu \bar{p}(t+s)ds}$. Таке рівняння можна розв'язати наближено.

Тільки для значень параметра λ, рівних $\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2$, існує нетривіальний розв'язок рівняння (3) $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$. Цим значенням λ_n відповідають розв'язки рівняння (4)

$$T_n(t) = A_n e^{-\int_0^t \bar{p}(\tau)d\tau},\ n \in [1, N_0],$$

де N_0 – ціла частина $\frac{l}{\pi\sqrt{|\mu|\beta e}}$.

Складемо суму $u(x,t) = \sum_{n=1}^{N_0} A_n e^{-\int_0^t \bar{p}(\tau)d\tau} \sin\frac{n\pi x}{l}$. Покладаючи $t = 0$, отримаємо вигляд класу початкових умов для розв'язку (1).

[1] Самойленко А.М. Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №5. – С. 631–640.

e-mail: sergeevali@mail.ru

Двоточкова задача для рівняння з виродженими коефіцієнтами при найстарших похідних

Симотюк М.М.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)
Тимків І.Р.
(Івано-Франківський національний техн. ун-т нафти і газу)

Позначимо: Ω – коло радіуса 1, $J_n(t)$ – функція Бесселя першого роду порядку n, $n \in \mathbb{R}$, $\{\nu(k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ – послідовність додатних дійсних чисел, $\omega(\alpha, \nu(k)) = \alpha^{k^2+1/2}|k|^{\nu(k)}$, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $E_{\alpha,\nu(k)}$ – простір функцій $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ikx)$, $\varphi_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для яких $\|\varphi; E_{\alpha,\nu(k)}\|^2 = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\varphi_k|^2 \omega^2(\alpha, \nu(k)) < \infty$; $E^T_{\alpha,\nu(k)}$ – простір таких функцій $u(t,x) = \sum u_k(t) e^{ikx}$, що $t^{k^2+1/2} u_k(t) \in C^2[0,T]$ і $\|u; E^T_{\alpha,\nu(k)}\|^2 = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \|t^{k^2+1/2} u_k(t); C^2[0,T]\|^2 \omega^2(\alpha, \nu(k)) < \infty$.

Розглянемо задачу

$$t\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u^3(t,x)}{\partial t \partial x^2} + a^2 t \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} = 0, \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \ a > 0, \quad (1)$$

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t,x); E_{\alpha,\nu(k)}\| < \infty, \ u(t_1,x) = \varphi(x), \ 0 < t_1 \leq T, \ x \in \Omega. \quad (2)$$

Якщо $J_{k^2+1/2}(ak^2 t_1) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується формулою

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{k^2+1/2} \frac{J_{k^2+1/2}(ak^2 t)}{J_{k^2+1/2}(ak^2 t_1)} \varphi_k e^{ikx}. \quad (3)$$

Ряд (3) може, взагалі, розбігатися, бо величини $|J_{k^2+1/2}(ak^2 t_1)|$ можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості значень $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Теорема 1. *Нехай існують* $\alpha_1 > 0$ *та послідовність* $\{\nu_1(k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) значень* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *виконується нерівність*

$$|J_{k^2+1/2}(ak^2 t_1)| \geq \omega(\alpha_1, -\nu_1(k)). \quad (4)$$

Якщо $\varphi \in E_{\alpha t_1/\alpha_1, \nu(k)+\nu_1(k)+4}$, *то в просторі* $E^T_{\alpha,\nu(k)}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (3) *і неперервно залежить від* φ.

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in [T_0, T]$ $(0 < T_0 < T)$ *нерівність* (4) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *якщо* $\alpha_1 = a/t_1$, *а послідовність* $\{\nu_1(k) : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ *справджує умову:* $\nu_1(k) > 5k^2 + 2$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

e-mail: quaternion@ukr.net, tymkiv_if@ukr.net

Оцінки малих знаменників, які виникають в нелокальній задачі для навантаженого гіперболічного рівняння

Симотюк М.М., Хомяк Д.В.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_p^2$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $0 < t_0 < T$, $\mu \neq 0$. При дослідженні розв'язності такої нелокальної задачі для навантаженого гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_x u(t,x) = F(t,x) + u(t_0,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega^p, \tag{1}$$

$$u(0,x) - \mu u(T,x) = \varphi_1(x), \quad u_t(0,x) - \mu u_t(T,x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega^p, \tag{2}$$

виникає потреба оцінити знизу модулі виразів (які, взагалі, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$)

$$\Delta(k) = \bigl(1 - 2\mu\cos(||k||T) + \mu^2\bigr), \quad \Gamma(k) = 1 - \int_0^T G_k(t_0,\tau)d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $||k|| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, $G_k(t,\tau)$ – функція Гріна задачі $y''(t) + ||k||^2 y(t) = 0$, $y(0) - \mu y(T) = 0$, $y'(0) - \mu y'(T) = 0$.

За допомогою результатів і методів метричної теорії чисел [1, 2] нами встановлено такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа, $0 < \rho \leq 1$) чисел $T > 0$ нерівність $|\Delta(k)| \geq ||k||^{-\omega}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p+1)/\rho - 1$.*

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа, $0 < \rho \leq 1$) чисел $t_0 \in (0,T)$ нерівність $|\Gamma(k)| \geq ||k||^{-\omega}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p+1)/\rho - 2$.*

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

[1] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] *Берник В.И., Мельничук Ю.В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.

e-mail: quaternion@ukr.net, khomiak.dmytro@gmail.com

Про операторне числення для згорткової алгебри ультрарозподілів класу Рум'є

Соломко А.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядаємо двоїстість виду $\langle G', G\rangle$, де $G := G(\mathbb{R}^n)$ – векторний простір всіх ультрадиференційовних у сенсі Жевре функцій з компактними носіями, $G' := G'(\mathbb{R}^n)$ – сильно спряжений простір всіх ультрарозподілів Рум'є. Нехай $G'_+ := G'(\mathbb{R}^n_+)$ – підпростір в G' ультрарозподілів з носіями в конусі $\mathbb{R}^n_+$. Якщо символом $G'^{\perp}_+$ позначити ортогональне доповнення підпростору G'_+ відносно двоїстості $\langle G', G\rangle$, то дуальним до G'_+ буде фактор-простір $G_+ := G/G'^{\perp}_+ = \{\psi := \varphi + G'^{\perp}_+ :\ \varphi \in G\}$. Зауважимо, що двоїстість $\langle G', G\rangle$ однозначно породжує дуальну пару $\langle G'_+, G_+\rangle$.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – банахів простір. Зафіксуємо число $\aleph > 1$. Для кожного $\nu \succ 0$ розглядаємо простори

$$G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X) = \left\{x : \operatorname{supp} x \subset \mathbb{R}^n_+,\ \|x\|_{G_\nu(\mathbb{R}^n_+,X)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+}\sup_{t\in\mathbb{R}^n_+}\frac{\|\partial^k x(t)\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty\right\}$$

X-значних ультрадиференційовних функцій $x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^n_+$. На просторі $G(\mathbb{R}^n_+, X) := \bigcup_{\nu\succ 0} G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X)$ можемо ввести топологію індуктивної границі $\operatorname*{limind}_{\nu\to+\infty} G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X)$. Надалі позначатимемо $G_+(X) := G(\mathbb{R}^n_+, X)$.

Визначимо n-параметричну напівгрупу $U : \mathbb{R}^n_+ \ni s \longrightarrow U_s \in L[G_+]$ зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}^n_+$ та оператор крос-кореляції $T_f : G_+ \ni \psi \to f \odot \psi \in G_+$, де $(f \odot \psi)(t) := \langle f(s), U_s\psi(t)\rangle$, $t, s \in \mathbb{R}^n_+$. Для одиничного оператора $I_X \in L[X]$ визначимо відповідно $I_X \otimes U_s \in L[G_+(X)]$ та $I_X \otimes T_f \in L[G_+(X)]$ – векторні оператори зсуву та крос-кореляції.

Нехай I_+ позначає одиничний оператор в $L[G_+]$. Розглядаємо в X векторний підпростір $\widehat{G}_A = \{\widehat{x}_A \in X,\ x \in G_+(X)\}$, де $\widehat{x}_A := \int_{\mathbb{R}^n_+}(e^{-itA} \otimes I_+)x(t)dt$ та e^{-itA} – n-параметрична напівгрупа лінійних обмежених операторів над X з генератором $-iA$. Визначимо лінійні перетворення виду

$$F_A : G_+(X) \ni x \longrightarrow \widehat{x}_A \in \widehat{G}_A, \quad I_X \otimes U : \mathbb{R}^n_+ \ni s \longrightarrow \widehat{I_X \otimes U_s} \in L[\widehat{G}_A].$$

Теорема. *Відображення виду* $\Phi_A : G'_+ \ni f \longrightarrow \widehat{f}(A) \in L[\widehat{G}_A]$, *де лінійний оператор* $\widehat{f}(A)$ *визначений формулою*

$$\widehat{f}(A) :\ \widehat{G}_A \ni \widehat{x}_A \longrightarrow \widehat{f}(A)\widehat{x}_A := \int_{\mathbb{R}^n_+}(e^{-itA} \otimes T_f)x(t)dt$$

є топологічним гомоморфізмом згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є на комутант $[\widehat{I_X \otimes U}]^C$. *Відображення* Φ_A *володіє властивістю* $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)$, $f, g \in G'_+$. *Крім того, оператор* $\widehat{\delta}(A)$ *є одиничним у просторі* $L[\widehat{G}_A]$, *де* $\delta \in G'_+$ *– функціонал Дірака.*

e-mail: ansolvas@gmail.com

Диференціальні рівняння з імпульсною дією в задачах теплопровідності

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф.
(Львівський державний університет безпеки життедіяльності)

В прямокутній системі координат $Oxyz$ розглядається нескінчена плита товщини l, тобто область, обмежена площинами $x = x_0 = 0$ і $x = x_n = l$. Ця область довільним способом поділена на n шарів площинами $x = x_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Припускається, що кожний шар наділений своїм неперервним коефіцієнтом теплопровідності $\lambda_i(x)$ та внутрішнім неперервним джерелом тепла $r_i(x), i = \overline{1, n-1}$. Крім того, припускається наявність зосереджених джерел тепла s_i, $i = \overline{1, n-1}$, на границях шарів. Вважається, що температура в плиті поширюється лише в напрямку осі Ox, тобто задача про дослідження теплообміну є одновимірною. Припускається, що між шарами існує неідеальний тепловий контакт з коефіцієнтом теплопереносу α_i в точках $x = x_i, i = \overline{1, n-1}$. Така задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння

$$\left(\lambda t'\right)' = r \tag{1}$$

при певних крайових умовах та умовах спряження

$$\begin{gathered} t(x_i + 0) - t(x_i - 0) = \frac{1}{\alpha_i}\lambda_{i-1}(x_i - 0)t'(x_i - 0), \\ \lambda_i(x_i + 0)t'(x_i + 0) - \lambda_{i-1}(x_i - 0)t'(x_i - 0) = s_i, \end{gathered} \tag{2}$$

де $t(x)$ – температура, $\lambda(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\Theta_i$, $r(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i(x)\Theta_i$, Θ_i – характеристична функція інтервалу $[x_i; x_{i+1})$ [1].

Встановлено, що з допомогою векторів та матриць

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} t \\ \lambda t' \end{pmatrix}, \ \overline{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}, \ \overline{S}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ s_i \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задача спряження (1), (2) зводиться до системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\overline{T}' = C\overline{T} + \overline{R}, \quad \overline{T}\,(x_i + 0) - \overline{T}((x_i - 0) = A_i\overline{T}\,(x_i - 0) + \overline{S}_i,$$

лінійна теорія яких достатньо повно викладена в [2].

[1] Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 660. – С. 34–38.

[2] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища школа, 1987. – 286 с.

e-mail: marta_stasiuk@yahoo.com

Про один ітераційний метод розв'язування задач теорії пластичності

Тучапський Р.І.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

У [2, 3] приведено основні закони й рівняння теорії пластичності та загальні методи розв'язування основних типів відповідних крайових задач.

Для більшості практичних задач теорії пластичності розв'язки в замкнутому вигляді отримати неможливо через нелінійність диференціальних рівнянь у частинних похідних. Тому для розв'язування задач теорії пластичності найчастіше застосовують різні варіанти методу послідовних наближень.

Фізичні рівняння теорії пластичної плинності містять не тільки компоненти напруження, але і їх прирости. У багатьох задачах теорії пластичної плинності застосовують чисельне інтегрування, відстежуючи "крок за кроком" розвиток пластичної деформації. На кожному етапі зовнішнє навантаження отримує прирости, за якими потім обчислюють відповідні прирости напружень і деформацій. На кожному етапі необхідно розв'язувати деяку нелінійну крайову задачу. В [1] метод покрокового навантаження в тривимірній постановці для задач теорії пластичної плинності поширено на тонкостінні конструкції.

У даній роботі здійснено спробу обґрунтування ітераційного методу розв'язування задачі, що виникає на кожному етапі методу покрокового навантаження для моделі ідеально пружнопластичного тіла з асоційованим законом плинності. Деякі використані прийоми мають спільні риси з відповідними прийомами, застосованими в [4] для обґрунтування схем розв'язування задач контакту пружних тіл.

[1] Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.

[2] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

[3] Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.

[4] Прокопишин І. І. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Львів, 2010. – 20 с.

e-mail: roman.tuch@gmail.com

Про одне неоднорідне рівняння коливань ідеальної стратифікованої рідини та його операторний аналог

Федак І.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

У просторі $H = L_2(-\infty;+\infty)$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) = f(x,t). \tag{1}$$

Рівняння (1) є неоднорідним рівнянням коливань ідеальної стратифікованої рідини. Відповідне йому однорідне рівняння вивчалось у роботі [1].

Замінивши $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ на довільний напівобмежений знизу самоспряжений оператор A, визначений у гільбертовому просторі H, запишемо операторний аналог рівняння (1) у вигляді

$$(A+E)\; y''(t) + Ay(t) = f(t), \tag{2}$$

де E – одиничний оператор.

У роботі [2] доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо $-1 \notin \sigma(A)$, то для довільних $f_0 \in D(A), f_1 \in D(A)$ та сильно неперервної в H функції $f(t)$ існує єдиний розв'язок рівняння (2), який задовольняє умови $y(0) = f_0, y'(0) = f_1$ і представляється у вигляді*

$$y(t) = \cos\omega(A)tf_0 + \frac{\sin\omega(A)t}{\omega(A)}f_1 + \int\limits_0^1 \frac{\sin\omega(A)(t-\tau)f(\tau)}{(A+E)\omega(A)}\; d\tau, \tag{3}$$

де $\omega(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$.

З врахуванням даної теореми та рівності (3) для довільних $f_0(x), f_1(x) \in W_2^2(-\infty,+\infty)$ та функції $f(x,t) \in L_2(-\infty,+\infty)$ при кожному фіксованому t доведено існування єдиного розв'язку рівняння (1) та отримано його представлення з допомогою інтегральних представлень оператор-функцій, які входять у (3).

[1] Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – 26, №1. – С.92 – 102.

[2] Федак И.В. О корректной разрешимости задачи Коши для неоднородного дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированной жидкости // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений: Сб. науч. тр. – Киев: Институт математики АН УССР, 1986. – С. 53-57.

e-mail: fedak_ivan@rambler.ru

Про симетрійну редукцію деяких класів диференціальних рівнянь в просторі $M(1,4)\times R(u)$ до класів чотиривимірних диференціальних рівнянь

Федорчук В.І.
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Розглянемо клас нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера виду:

$$\Box_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) \tag{1}$$

де $\Box_5 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Д'Аламбера в просторі $M(1,4)$, F – довільна гладка функція, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0,1,2,3,4$.

В роботі [1] описані класи рівнянь вигляду (1), які інваріантні відносно всіх неспряжених підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$. Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ - група поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної та математичної фізики груп ця група посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, що містить, як підгрупи, розширену групу Галілея $G(1,3)$ [2] (групу симетрії класичної фізики) і групу Пуанкаре $P(1,3)$ (групу симетрії релятивістської фізики). Побудовані класи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{t_1}), \tag{2}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{t_1}\}(t_1 = 2,3,...,10)$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. В даному повідомленні мова йтиме про симетрійну редукцію деяких з цих класів. На даний час, використовуючи одновимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$, проведено симетрійну редукцію деяких класів рівнянь (2) до класів чотиривимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

[1] Федорчук В. І. Про часткову попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2012. – Т.55, №3. – С. 35–43.

[2] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Reduction of the representations of the generalized Poincaré algebra by the Galilei algebra // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1980. – V.13, No7. – P. 2319-2330

e-mail: volfed@gmail.com

Симетрійна редукція деяких класів диференціальних рівнянь та класифікація низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$

Федорчук В.М.
(Педагогічний Університет ім. Комісії Народної Освіти, Краків)
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)
Федорчук В.І.
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

Симетрійна редукція є одним із важливих методів дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними які інваріантні відносно локальних груп Лі точкових перетворень. Для проведення симетрійної редукції таких рівнянь, в багатьох випадках використовують функціональні базиси інваріантів неспряжених підгруп груп симетрії цих рівнянь (див., наприклад [1, 2, 3]). Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ - група поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної та математичної фізики рівнянь, які інваріантні відносно групи $P(1,4)$, в просторі $M(1,3) \times R(u)$ є наступні диференціальні рівняння: рівняння ейконала, рівняння Ейлера-Лагранжа-Борна-Інфельда, однорідне рівняння Монжа – Ампера, неоднорідне рівняння Монжа – Ампера. Тут і надалі $M(1,3)$ – чотиривимірний простір Мінковського, $R(u)$ – дійсна вісь залежної змінної u. В просторі $M(1,4) \times R(u)$, важливими для теоретичної та математичної фізики рівняннями, які інваріантні відносно групи $P(1,4)$ є лінійні та нелінійні рівняння Д'Аламбера. При симетрійній редукції вищезгаданих рівнянь виявилося, що використання неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ певного рангу призводить до різного типу редукованих рівнянь. В даному повідомленні мова йтиме про одну із спроб пояснити отримання різного типу редукованих рівнянь для неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ певних рангів. Ця спроба пов'язана з класифікацією неспряжених піалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ в класи ізоморфних підалгебр.

[1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир,1989.
[3] Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея и Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991.

e-mail: vasfed@gmail.com, volfed@gmail.com

Цілі функції скінченного порядку з випадковими нулями

Філевич П.В.
(ПНУ ім. Василя Стефаника)
Захарко Ю.Б.
(ЛНУВМБТ ім. С.З. Гжицького)

Нехай $\mathcal{E}$ – клас трансцендентних цілих функцій, а $\mathcal{Z}$ – клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 \leq |\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \ldots$ і $\zeta_n \to \infty$, $n \to \infty$. Через $\mathcal{E}(\zeta)$, де $\zeta \in \mathcal{Z}$, позначимо клас функцій $f \in \mathcal{E}$, послідовність нулів яких, занумерована з урахуванням їх кратностей у порядку неспадання модулів, співпадає з послідовністю ζ. Використовуємо стандартні позначення і термінологію теорії мероморфних функцій [1]. Зокрема, для функції $f \in \mathcal{E}$ через $n(r, 0, f)$ і $M(r, f)$ позначимо лічильну функцію її нулів і максимум модуля відповідно. Покладемо $C_f = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{n(r,0,f)}{\ln M(r,f)}$. Добре відомими (і рівносильними одна одній) є наступні класичні теореми.

Теорема 1. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$. Існує стала $C(\rho) > 0$, така, що для довільної функції $f \in \mathcal{E}$ порядку ρ правильна нерівність $C_f \geq C(\rho)$.*

Теорема 2. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$, а $\zeta \in \mathcal{Z}$ – послідовність з показником збіжності ρ. Тоді для довільної функції $f \in \mathcal{E}(\zeta)$ порядку ρ правильна нерівність $C_f \geq C(\rho)$, де $C(\rho)$ – стала з теореми 1.*

Точне значення сталої $C(\rho)$ знайдено лише для $\rho \in (0; 1)$ (А. Валунд і Ж. Валірон). У цьому випадку $C(\rho) = \frac{1}{\pi} \sin \pi\rho$. Найточніші на сьогодні оцінки цієї сталої для $\rho \in (1; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$ наведено в [2]. Зокрема, правильна оцінка $C(\rho) < \rho$. Однак, як виявляється, для "більшості" функції $f \in \mathcal{E}$ порядку $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$ виконується нерівність $C_f \geq \rho$. Такий висновок дозволяє зробити наведена нижче теорема 3, в якій поряд з послідовністю $\zeta \in \mathcal{Z}$ розглядаємо випадкову послідовність $\zeta_\omega = (\zeta_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)})$, де $(\omega_n(\omega))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0, 1]$ випадкових величин.

Теорема 3. *(i) Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}$ – послідовність з показником збіжності $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$. Тоді випадкова послідовність ζ_ω майже напевно володіє наступною властивістю: для довільної функції $f \in \mathcal{E}(\zeta_\omega)$ порядку ρ правильна нерівність $C_f \geq \rho$. (ii) Для кожного $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{Z}$ існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}$ з показником збіжності ρ така, що випадкова послідовність ζ_ω майже напевно володіє такою властивістю: $C_f = \rho$ для деякої $f \in \mathcal{E}(\zeta_\omega)$.*

[1] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970.

[2] Bergweiler W. Canonical products of infinite order // J. reine angew. Math. – 1992. – V. 430. – P. 85–107.

e-mail: filevych@mail.ru, yulia.zaharko@gmail.com

Мішана задача для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь

Фірман Т.І.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

У прямокутнику $\Pi = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ розглянемо зліченну гіперболічну систему лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t)u_j(x,t) + f_i(x,t), \ \ i \in \{1,...\}, \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x), \ \ i \in \{1,...\}, \ \ \ x \in [0,l],$$

та крайовими умовами

$$u_i(0,t) = \sum_{j \in I^-} \alpha_{ij}(t)u_j(0,t) + h_i(t), \ \ i \in I^+, \qquad (2)$$

$$u_i(l,t) = \sum_{j \in I^+} \beta_{ij}(t)u_j(l,t) + r_i(t), \ \ i \in I^-,$$

де $I^+ = \{i \in \mathbb{N} | \lambda_i(x,t) > 0\}$, а $I^- = \{i \in \mathbb{N} | \lambda_i(x,t) < 0\}$.

Припустимо, що $\forall (x,t) \in \Pi$ мають місце нерівності

$$\lambda_i(x,t) \ge \lambda_j(x,t) \vee \lambda_j(x,t) \ge \lambda_i(x,t), \ \forall i,j \in \{1,...\},$$

$$\exists\, i_+, i_- \in \{1,...\} : \ \lambda_{i_+}(x,t) \ge \lambda_i(x,t) \text{ та } \lambda_{i_-}(x,t) \le \lambda_i(x,t), \ \forall i \in \{1,...\}.$$

Нехай виконуються умови погодження нульового порядку:

$$g_i(0) = \sum_{j \in I^-} \alpha_{ij}(0)g_j(0) + h_i(0), \qquad i \in I^+, \qquad (3)$$

$$g_i(l) = \sum_{j \in I^+} \beta_{ij}(0)g_j(l) + r_i(0), \qquad i \in I^-. \qquad (4)$$

При виконанні умов гладкості та обмежень вихідних функцій, для задачі (1)–(2) доведено теорему існування і єдиності узагальненого розв'язку, з використанням методики [1], [2].

[1] Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 423–442.

[2] Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій. – К.: 1993. – 69с.

e-mail: tarasfirman91@ukr.net

Мішана задача для напівлінійної гіперболічної системи в секторі з малим параметром при похідній по часу

Флюд О.В.
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

В області $V = \{(x,t) : 0 < t < T, -kt < x < kt, k > 0\}$ розглядається напівлінійна гіперболічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u,v), \\ \mu(x,t)\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u,v), \end{cases} \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u_i(-kt,t) = \gamma_i^1(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}), i \in I_2 \cup I_3, \tag{2}$$
$$u_i(kt,t) = \gamma_i^2(t,(u_s(kt,t))_{s\in I_2}), i \in I_1 \cup I_3,$$

$$v_j(-kt,t) = \psi_j(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}), j \in \{1,\dots,m\}, \tag{3}$$

де $u = (u_1,\dots,u_n)$ $v = (v_1,\dots,v_m)$, $f = (f_1,\dots,f_n)$, $g = (g_1,\dots,g_m)$, $\lambda(x,t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_n(x,t))$, $\mu(x,t) = \mathrm{diag}(\mu_1(x,t),\dots,\mu_m(x,t))$, $\mu_j \geq 0$ $(j = \overline{1,m})$. I_1, I_2, I_3 – множини індексів, що визначаються наступним чином:

$$I_1 = \{i : i \in \{1,\dots,n\}, \lambda_i(0,0) < -k\},\ I_2 = \{i : i \in \{1,\dots,n\}, \lambda_i(0,0) > k\},$$
$$I_3 = \{i : -k < \lambda_i(0,0) < k, i \in \{1,\dots,n\}\}.$$

Нехай множини I_1, I_2, I_3 містять r_1, r_2, r_3 елементів відповідно, $r_1+r_2+r_3 = n$. Будемо вважати, що функції $f : \overline{V} \times R^{n+m} \to R^n$, $g : \overline{V} \times R^{n+m} \to R^m$, $\lambda : \overline{V} \to R^n$, $\mu : \overline{V} \to R^m$, $\gamma^1 : [0,T] \times R^{r_1} \to R^{r_2+r_3}$, $\gamma^2 : [0,T] \times R^{r_2} \to R^{r_1+r_3}$, $\psi : [0,T]\times R^{r_1} \to R^m$ є неперервними, λ_i $(i = \overline{1,n})$ і μ_j $(j = \overline{1,m})$ задовольняють умову Ліпшиця за змінними x та t відповідно.

За певних умов гладкості, погодження та обмежень на зростання вихідних даних доведено неперервну залежність розв'язку мішаної задачі (1)-(3) для гіперболічної системи $n+m$ рівнянь $(n \geq 0, m \geq 0, n+m \geq 1)$ в секторі від заданих функцій, використавши методи, запропоновані в [1,2].

[1] Кирилич В.М. Обобщеная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперборлических систем квазилинейных уравнений./ В.М. Кирилич, А.М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т.30. – №1. – С.42-60.

[2] Мауленов О. О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при роизводных по времени (часть I). / О. Мауленов, А.Д. Мышкис // Изв. АН КазССР. Сер.физ.-мат. – 1983. – №3. – С.59-62.

e-mail: oflyud@yahoo.com

Про оператори на просторах узагальнених функцій нескінченної кількості змінних

Шарин С.В., Скіданюк О.С.
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Нехай $A, B \in \mathcal{L}(E)$ – лінійні неперервні оператори на локально опуклому просторі E, $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ – оператори множення на $1 \in \mathbb{R}$ та $0 \in \mathbb{R}$ відповідно. Нехай $\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} E$ – n-тий симетричний тензорний степінь простору E, поповнений в проективній тензорній топології $\mathfrak{p}$. За означенням приймемо $\otimes^0_{s,\mathfrak{p}} E := \mathbb{C}$ та $\otimes^1_{s,\mathfrak{p}} E := E$.

Визначимо оператори $A^{\otimes}, B^{\{\otimes\}} \in \mathcal{L}\Big(\bigtimes\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes^n_{s,\mathfrak{p}} E\Big)$ наступним чином

$$\begin{aligned} A^{\otimes} &:= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\otimes n} : \quad q = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \quad \longmapsto \quad A^{\otimes} q := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} A^{\otimes n} q_n, \\ B^{\{\otimes\}} &:= \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} B^{\{\otimes\}_n} : \quad q = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n \quad \longmapsto \quad B^{\{\otimes\}} q := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} B^{\{\otimes\}_n} q_n, \end{aligned}$$

де $A^{\otimes 0} := \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$, $B^{\{\otimes\}_0} := \mathbf{0}_{\mathbb{C}}$, і для кожного $n \in \mathbb{N}$ оператори $A^{\otimes n} \in \mathcal{L}\big(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} E\big)$ та $B^{\{\otimes\}_n} \in \mathcal{L}\big(\otimes^n_{s,\mathfrak{p}} E\big)$ визначені як лінійне і неперервне розширення відображення $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longmapsto Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_n$ та $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \longmapsto \sum_{i=1}^n {}^n_i B(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$ відповідно, де

$${}^n_j B : x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \longmapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_{j-1} \otimes Bx_j \otimes x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_n$$

та $x_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$.

У доповіді ми обговоримо як розширити оператори $A^{\otimes}$ та $B^{\{\otimes\}}$ на простір поліноміальних узагальнених функцій (див. [1]).

Нехай S_+ – простір Шварца швидко спадних нескінченно диференційовних функцій на $[0, \infty)$. У випадку $E = S_+$ ми покажемо зв'язок між операторами народження та знищення, похідною Ґросса (див. [2]) та оператором $D^{\{\otimes\}}$, де D – оператор диференціювання на S_+.

[1] Lopushansky O.V., Sharyn S.V. Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ // Topology. –2009. – V.48, No.2–4. – P. 80–90.

[2] Ji U.C., Obata N. Generalized white noise operator fields and quantum white noise derivatives // Séminaires & Congrès. –2007. – V.16. – P. 17–33.

e-mail: sharyn.sergii@gmail.com, ssashas81@gmail.com

Вплив нестаціонарних об'ємних і поверхневих джерел тепла на розподіл температури й напружень в циліндрі, теплофізичні властивості приповерхневого шару якого змінюються з часом

Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я., Середницька Х.І.
(ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України)

Характерною особливістю сучасних елементів конструкцій є їх неоднорідність та можлива зміна фізико-механічних властивостей в часі за впливу різноманітних фізичних полів, зокрема електромагнітного випромінювання [1], які в багатьох випадках можуть спричинювати нагрівання як у всьому об'ємі тіла, так і в його приповерхневій області.

Розглядаємо довгий суцільний циліндр, який охолоджується зовнішнім середовищем, за нагрівання об'ємними джерелами тепла як заданої змінної інтенсивності, так і лінійно залежної від температури, а також поверхневими джерелами. Вплив приповерхневого шару на фізико-механічну поведінку циліндра задаємо через некласичні нестаціонарні граничні умови його контакту з довкіллям, що містять похідну за часом від температури, зі змінними в часі теплофізичними параметрами. Для таких некласичних крайових задач розвинуто аналітично-числовий метод [1], з побудовою спеціальної структури розв'язку і зведенням вихідної задачі до інтегро-диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами з інтегральним оператором типу Вольтерри, для розв'язання якого адаптовано схему сплайн-апроксимацій. Термонапружений стан циліндра досліджено залежно від режимів нагрівання циліндра джерелами тепла, а також від змінних теплофізичних параметрів приповерхневого шару. Здійснено порівняльний аналіз нагрівання різними видами джерел за різних законів зміни теплофізичних параметрів. Виявлено, що за допомогою підбирання змінних зведених теплофізичних параметрів приповерхневого шару та циліндра можна частково компенсувати дію залежних від часу джерел тепла і забезпечити підтримування розподілів температури чи напружень близьких до заданих, зокрема досягнути рівноваги між охолодженням циліндра довкіллям та нагріванням джерелами. У разі лінійно залежних від температури джерел тепла визначено співвідношення критичних значень теплофізичних параметрів, за заданої інтенсивності тепловиділення, для яких починається режим теплової нестійкості циліндра.

[1] Панін С.В., Мартиняк Р.М., Швець Р.М., Яцків О.І., Бобик Б.Я. Термонапружений стан циліндра зі змінними теплофізичними властивостями приповерхневого шару за нагріву об'ємними джерелами тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – Т. 55, №3. – С. 139-152.

e-mail: viktsya@gmail.com

New extensions of the modified k-cKP hierarchy

Chvartatskyi O.I.
(Max Planck Institute for Dynamics and Self-Organization)
(Ivan Franko National University of Lviv)
Sydorenko Yu.M.
(Ivan Franko National University of Lviv)

We propose new extensions of the modified k-cKP hierarchy [1]. This new hierarchy arises as an essential generalization of the modified k-cKP hierarchy [2, 3, 4] and also generalizes BKP hierarchies obtained in [5, 6, 7]. In particular, the proposed hierarchy includes generalizations of the Kaup-Broer system:

$$u_{t_2} + u_{xx} - 2(uv)_x = 0,\ -v_{t_2} + 2u_x + v_{xx} + 2vv_x = 0, \tag{1}$$

with the scalar functions $u = u(x, t_2)$ and $v = v(x, t_2)$ and extensions of the following system

$$\begin{array}{r}\alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top \mathbf{q}_x + 3u\mathbf{q}_x,\\ \alpha_3 u_{t_3} = u_{xxx} - 3(u\mathbf{q}_x \mathcal{M}_0 \mathbf{q}^\top)_x + 6uu_x, \alpha_3 \in \mathbb{R}.\end{array} \tag{2}$$

with $1 \times m$-vector-valued function $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t_3)$, scalar function $u = u(x, t_3)$ and skew-symmetric real-valued $m \times m$-constant matrix $\mathcal{M}_0$. From system (2) one can recover KdV equation ($\mathbf{q} = 0$) and vector version of the modified KdV equation ($u = 0$). We also consider solution generating technique for the equations (using a kind of binary Darboux transformations [8]) that the proposed hierarchy contains.

[1] Chvartatskyi O.I. and Sydorenko Yu.M. Additional reductions in the k-constrained modified KP hierarchy // submitted to Nonlinear Oscillations http://arxiv.org/abs/1303.6509

[2] Kundu A., Strampp W. and Oevel W. Gauge Transformations of Constrained KP Flows: New Integrable Hierarchies // J. Math. Phys. – 1995. – V.36. – P. 2972-2984

[3] Oevel W. and Carillo S. Squared Eigenfunction Symmetries for Soliton Equations // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – V.217 – P. 161-199.

[4] Sidorenko Yu. Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – V.43, Part 1 –P. 352–357.

[5] Loris I. and Willox R. Symmetry reduction of the BKP hierarchy // J. Math. Phys. – 1999. – V.40 –P. 1420-1431

[6] He J., Wu Zh. and Cheng Yi. Gauge transformations for the constrained CKP and BKP hierarchies // J. Math. Phys. – 2007. – V.48, No11. – P. 113519-1 – 113519-16.

[7] Wu H.-X., Liu X.-J. and Zeng Y.-B. Two New Multi-component BKP Hierarchies // Comm. Theor. Phys. – 2009. –V.51 – P. 193-204.

[8] Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

e-mail: alex.chvartatskyy@gmail.com, y_sydorenko@franko.lviv.ua

Problem for degenerate hyperbolic system in curvilinear sector

Filimonov A. M.
(Moscow State University of Railway Engineering)
Kyrylych V. M.
(Ivan Franko National University of Lviv)

In curvilinear sector $V_T = \{x, t: \ 0 < t < T, \ s_1(t) < x < s_2(t), \ s_i(0) = 0, \ i = 1, 2\}$ hyperbolic system is considered

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i(x,t,u,v) \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v) \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) = f_i(x,t,u,v), \ i \in \{1, \ldots, m\}, \quad (1)$$

$$\varepsilon \mu_j(x,t,u,v) \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad (2)$$

(ε – small parameter, $\mu_j > 0$ in it's domain of existence) with boundary conditions

$$u_i(s_1(t),t) = \gamma_i^1(t, u(s_1(t),t), v(s_1(t),t)), \ i \in I_+ = \{i | sgn(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \quad (3)$$

$$u_i(s_2(t),t) = \gamma_i^2(t, u(s_2(t),t), v(s_2(t),t)), \ i \in I_- = \{i | sgn(\lambda_i(0,0,0,0)) = -1\}, \quad (4)$$

$$v_j(s_1(t),t) = \beta_j(t), \ j \in \{1, \ldots, n\}. \quad (5)$$

The way of reduction of the system (1)–(2) to the system of the nonlinear integral-operating second order Volterra's equations without an increasing of input data to the class C^2 is proposed. We cannot apply the method of expandable system because the system (1) was written in the Schauder's canonical form.

Theorems of local and global, general and classical solvabilities of the problem (1)–(5) were proved according to respective smoothness of initial data and their monotonicity and constance of sign.

We applied the methodology of the works [1]-[3] for proof of theorems of existence and uniqueness of the solution of the problem (1)–(5).

[1] Courant R., Lax P. On nonlinear partial differential equations with two independent variables // Comm. Pure. Appl. Math. – 1949. – Vol. 2. – P. 255–273.

[2] Мауленов О., Мышкис А. Д. О смешанной задаче для полулинейной гиперболической системы на отрезке с малыми параметрами при производных по времени (часть III) // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1985. – № 1. – С. 65–68.

[3] Кирилич В. М., Филимонов А. М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.

e-mail: afilimonov@yandex.ru, vkyrylych@ukr.net

On the validity of the nonlinear Boltzmann equation with hard sphere collisions

Gerasimenko V.I.
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv)

As is known the collective behavior of many-particle systems can be effectively described within the framework of a one-particle marginal distribution function governed by the nonlinear kinetic equation in a suitable scaling limit of underlying dynamics. At present the considerable advance in the rigorous derivation of the Boltzmann kinetic equation of a system of hard spheres in the scaling Boltzmann–Grad limit is observed.

We develop two new approaches to the description of the kinetic evolution of many-particle systems with hard sphere collisions. In particular, a formalism for the description of the evolution of infinitely many hard spheres within the framework of marginal observables [1] in the Boltzmann–Grad scaling limit is considered. Another approach to the description of the kinetic evolution of hard spheres is based on the generalized Enskog kinetic equation [2] and the construction of its scaling asymptotic behavior [3].

One of the advantage of such approaches is the possibility to construct the nonlinear kinetic equations in scaling limits, involving correlations at initial time which can characterize the condensed states of a hard sphere system.

We emphasize also that the approach to the derivation of the Boltzmann equation from underlying dynamics governed by the generalized Enskog kinetic equation enables to construct the higher-order corrections to the Boltzmann–Grad evolution of many-particle systems with hard sphere collisions.

[1] Gerasimenko V.I. Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit // Kinet. Relat. Models. – 2011. – V.4, No1. – P. 385-399.
[2] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. Hard sphere dynamics and the Enskog equation // Kinet. Relat. Models. – 2012. – V.5, No3. – P. 459-484.
[3] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. The Boltzmann–Grad asymptotics of the solution of the generalized Enskog equation // Proc. II National Seminar "Ukrainian School of Group Analysis: Achievements and Horizons", 2012. – P. 4-12.

e-mail: gerasym@imath.kiev.ua

The Lie–algebraic structure of two–dimensional nonlinear differential–difference systems

Hentosh O.Ye.
(Pidstryhach IAPMM, NAS of Ukraine)

By means of the general approach [1] for constructing an operator Lie algebra with a nondegenerated invariant scalar product from an associative algebra one obtain the Lie algebra $\mathcal{G}$ of shift operators in the forms

$$\mathcal{A} = \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}}^{j\ll\infty} A_j T^j, \quad A_j \in C^\infty(\mathbb{Z}; g), \tag{1}$$

where g is the Lie algebra of shift operators, T and $\mathcal{E}$ are usual shift operators, acting by the rules

$$T^j a(n,m) = a(n+j,m)T^j, \quad \mathcal{E}^i a(n,m) = a(n,m+i)\mathcal{E}^i$$

for any $a \in C^\infty(\mathbb{Z}^2; \mathbb{R})$, and $A_j := \sum_{i\in\mathbb{Z}}^{i\ll\infty} a_{j,i}\mathcal{E}^j$, with the standard commutator [1] and the scalar product

$$(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathcal{A}\mathcal{B}), \quad \mathrm{Tr}\,\mathcal{A} := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \tau(A_0) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} a_{0,0},$$

where $\mathcal{A},\ \mathcal{B} \in \mathcal{G}$. On the dual space $\mathcal{G}^*$ to the Lie algebra $\mathcal{G}$ the Casimir functionals $\gamma_k := \frac{p}{k+p}\mathrm{Tr}\,\ell^{\frac{k+p}{p}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, and the $\mathcal{R}$–deformed Lie–Poisson bracket [1] generate the hierarchy of commuting one with each other Lax type flows

$$\frac{d}{dt_k}\ell = [(\ell^{\frac{k}{p}})_+,\ \ell], \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

where the index "+" designates a projection of the corresponding operator on the Lie subalgebra, consisting of the elements $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}^{j\ll\infty} A_j T^j$, at the point $\ell := T^p + \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{j<p} \hat{u}_j T^j \in \mathcal{G}^*$, $\hat{u}_j \in C^\infty(\mathbb{Z}; g)$. It is shown that the evolution equations (2), reduced on some orbits of the Lie algebra coadjoint action, give us Lax representations for two–dimensional discretizations of $(2+1)$–dimensional nonlinear dynamical systems.

The central extension [1] of the Lie algebra $\mathcal{G}$, which can be applied to construct Lax representations for $(3+1)$–dimensional differential–difference systems, are considered also.

The Dorfman-Fokas operand approach [2] are developed for studying the bi–Hamiltonian structure of the mentioned above differential–difference systems.

[1] Hentosh O., Prytula M., Prykarpatsky A. Differential–geometric and Lie–algebraic foundations of studying integrable nonlinear dynamical systems on functional manifolds. – Lviv: National University Publishing, 2006. (in Ukrainian)

[2] Dorfman I.Ya., Fokas A.S. Hamiltonian theory over noncommutative rings and integrability in multidimensions // J. Math. Phys. – 1992. – V.33, No7. – P. 2504–2514.

e-mail: ohen@ua.fm

Analytic vectors of a symmetric operator and quasi-analytic vectors of dissipative operator

Horbachuk O.L.
(Pidstryhach IAPMM, NAS of Ukraine)

A linear closed symmetric operator on a separable Hilbert space H is called simple if it has not an invariant subspace in which this operator is self-adjoint.

Theorem 1. *The symmetric operator A is simple if the set of analytic vectors of operator A coincide with $\{0\}$.*

The operator A is called dissipative if

$$Im(Ax, x) \geq 0 \text{ for any } x \in D(A)$$

(see [1]). A dissipative operator is maximal dissipative if it has no dissipative extensions.

Vector $x \in D(A^k) \qquad (k = 1, 2, ...)$ is called quasi-analytic for the operator A if the set

$$C_{||A^k x||}[a, b] \qquad (-\infty < A < B < +\infty)$$

(see [1]) of infinitely differentiable function $f(z)$ on $[a, b]$ which possess the property

$$\exists C > 0, \quad \exists \alpha > 0 : |f^{(k)}(z)| \leq C z^k ||A^k x||, \quad k = 1, 2, ...$$

form a quasi-analytic class (see [2] or [3]).

Theorem 2. *If the set of quasi-analytic vectors of dissipative operator A is dense in H, then this operator is maximal dissipative.*

The inverse theorem is not true.

Theorem 3. *If the operator A is maximal dissipative, then Gevrey class $B > 1$ is dense in H*

$$(\quad \overline{C_{n^{nB}}(A)} = H \quad for \quad B > 1 \quad).$$

[1] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференцыально-операторных уравнений. – Київ: Наукова думка, 1984. – 284с.
[2] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – Київ: Наукова думка, 1990. – 600 с.
[3] Shylov G.E. Mathematical analysis, Special Cours. – Moscow: Fismathgis, 1960.

e-mail: ohorbachuk@yahoo.com

Problem with integral conditions for differential-operator equation

Petro Kalenyuk [1,2]***, Ihor Kohut*** [1]***, Grzegorz Kuduk*** [2]***, Zinoviy Nytrebych*** [1]
([1] Lviv Polytechnic National University, Ukraine)
([2] University of Rzeszów, Poland)

Let A be a given linear operator acting in the linear space H and for this operator arbitrary powers A^n, $n = 2, 3, \dots$, be also defined in H. Denote by $x(\lambda)$ the eigenvector of the operator A, which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}$.

We consider the problem

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} + \sum_{j=1}^{n} a_j(A)\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\right] U(t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

$$\int_0^T t^k U(t)dt = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

where $\varphi_k \in H$, $T > 0$, $U\colon (0, T) \to H$ is an unknown vector-function, $a_j(A)$ are abstract operators whose symbols are $a_j(\lambda)$ depending analytically on $\lambda \in \Lambda$.

Let for $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ function $M_m(t, \lambda)$ be a solution of the equation

$$\frac{d^n M_m}{dt^n} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda)\frac{d^{n-j} M_m}{dt^{n-j}} = 0, \tag{3}$$

and satisfies the conditions

$$\int_0^T t^k M_m(t, \lambda)dt = \delta_{km}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{4}$$

where δ_{km} is the Kronecker delta.

Denote by P the set of such $\lambda \in \mathbb{C}$, for which there exists the system of solutions $M_0(t, \lambda), \dots, M_{n-1}(t, \lambda)$ of the problem (3), (4), and suppose that P is not empty.

Let the vectors φ_k belong to $L \subset H$, i.e. there exist depending on φ_k linear operators $R_{\varphi_k}(\lambda) : H \to H$ and measures $\mu_{\varphi_k}(\lambda)$, where $\lambda \in \Lambda^\star$, $\Lambda^\star = \mathbb{C}\backslash P$, such that $\varphi_k = \int_{\Lambda^\star} R_{\varphi_k}(\lambda)x(\lambda)d\mu_{\varphi_k}(\lambda)$.

By means of the differential-symbol method [1], we construct a solution of problem (1), (2) in the form

$$U(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \int\limits_{\Lambda^\star} R_{\varphi_m}(\lambda)\{M_m(t, \lambda)x(\lambda)\}d\mu_{\varphi_m}(\lambda).$$

[1] *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. – Lviv: Publishing house of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

e-mail: pkalenyuk@gmail.com

ONE INVERSE PROBLEM TO FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION IN BOUNDED DOMAIN

Lopushanskyj A.O.
(Rzeszów University, Poland)
Lopushanska H.P.
(Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine)

Let $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$, $C_+[0,T]$ be a class of continuous in $[0,T]$ functions v such that $\inf\limits_{t\in[0,T]} v(t) > 0$, $C_\beta(0,T] = \{v \in C(0,T] \bigm| t^\beta v \in C[0,T], \inf\limits_{t\in(0,T]} t^\beta |v(t)| > 0\}$, $C_{2,\beta}(Q_0)$ be a class of continuous functions $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_0$, equal to zero for $t \geq T$ and with continuous functions v_{xx} and regularized fractional derivative $D_t^\beta v$ of the order $\beta \in (0,2)$ in Q_0.

We study the inverse boundary value problem of the determination of the pare of functions $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta := C_{2,\beta}(Q_0) \times C_+[0,T]$ satisfying the equation

$$D_t^\beta u - a(t) u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T] \tag{1}$$

and the conditions

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l] \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

$$a(t) u_x(0,t) = F_3(t), \quad t \in [0,T] \tag{5}$$

where F_0-F_3 are given functions, the condition (5) is absent in the case $\beta \in (0,1]$.

Theorem 1. *Under suppositions*
$F_0 \in C(\overline{Q}_0)$, $F_i \in C[0,l]$, $\quad F_i(0) = F_i(l) = 0, \quad i = 1,2, \quad F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$;
$F_0(x,t) > 0$, $(x,t) \in Q_0$, $\quad F_i(x) \geq 0$, $x \in [0,l]$, $i = 1,2$, $\quad F_3(t) > 0, \quad t \in (0,T]$,
or
$F_0(x,t) < 0$, $(x,t) \in Q_0$, $\quad F_i(x) \leq 0, \quad x \in [0,l], \quad i = 1,2, \quad F_3(t) < 0, t \in (0,T]$;
$||F_1||_{C[0,l]} := \max\limits_{x\in[0,l]} |F_1(x)| > 0$

the solution $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ *of the problem* (1)-(5) *exists.*

We get the representation of the function u by means of the Green vector-function of the problem (1)-(4), the function $a(t)$ is finding as the solution of the nonlinear integral Volterra type equation. The existence of the Green vector-function of the first boundary value problem to the equation (1) is proving.

Theorem 2. *Under supposition* $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ *the solution* $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ *of the problem* (1)-(5) *is unique.*

e-mail: alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

Galerlkin method in the investigation of nonlinear oscillations of elastic beam including dissipation

Pukach P.Ya.
(Lviv Polytechnic National University)
Kuzio I.V.
(Lviv Polytechnic National University)
Sokil M.B.
(Lviv Polytechnic National University)

We investigate the solution of the problem on nonlinear transverse vibrations of elastic body subject to the action of dissipative forces in a bounded domain. Such problems have many applications in various technical systems, such as vibration of pipelines, railway lines, drill columns, bridges, electrical wires, optical fiber etc. For the nonlinear oscillations model considered, there is no general analytical methodologies of determining dynamical characteristics of the oscillation process. Thus we propose using the qualitative methods of nonlinear boundary value problems theory to obtain the well-posedness conditions for the problem's local solution in time variable. The methodology of the qualitative study of nonlinear oscillations under the action of dissipative forces is based on the general principles of the nonlinear boundary value problems theory, such as monotony method and Galerkin method.

Let $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, where $T < +\infty$, $l < +\infty$, $\tau \in (0, T)$. In the domain Q_T, for nonlinear equation

$$u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + c|u|^{p-2}u = f(x, t), \quad p > 2 \tag{1}$$

we shall consider the mixed problem with initial conditions

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0. \tag{3}$$

In equation (1), function $u(x, t)$ is a cross motion of the beam section with x coordinate at arbitrary time moment t; $a > 0$, $b > 0$ are constants which can be expressed through geometrical and physico-mechanical parameters of the beam, constant $c > 0$ describes the nonlinear elastic forces acting in the system, $f(x, t)$ is the external driving force. Boundary conditions (3) correspond to the model of a beam with fixed pivoting supports on the ends $x = 0$ and $x = l$.

We investigate the oscillating system modeled by problem (1)-(3) and obtain the conditions of existence of a local solution. We show the possibility of applying the Galerkin method to solving the problem.

Main result: under some conditions on functions $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ one can specify $T_0 < +\infty$ depending on the coefficients, the right-hand side of the equation and the initial data, such that the generalized solution $u(x, t)$ of problem (1)-(3) in the domain Q_{T_0} exists. The blow-up mode of oscillation is considered separately.

e-mail: ppukach@i.ua

On linear subspaces in zeros of complex poloynomials on Banach spaces

Zagorodnyuk A.V.
(Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk)
Verkalets N.B.
(Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk)

Let X be a complex Banach space, $\mathcal{P}(X)$ the algebra of all continuous complex valued polynomials on X and $\mathcal{P}(^nX)$ be a subspace of $\mathcal{P}(X)$ of $n-$homogneous polynomials. Since every polynomial $P \in \mathcal{P}(X)$ admits a unique (up to a multiplicative constant) factorization in $\mathcal{P}(X)$, $P = P_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{m_k}$ into irreducible polynomials $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $\deg P_j > 0$, $j = 1, \ldots, k$ we can denote the *radical* of P, $\mathrm{Rad}(P) = P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$.

In the general case, let $J = (P_1, \ldots, P_k)$ be the ideal generated by $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{P}(X)$, that is

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i : \; Q_i \in \mathcal{P}(X) \right\}, \tag{1}$$

then the set $\mathrm{Rad}J$ is called the radical of J, if $P_k \in J$ for some positive integer k implies $P \in \mathrm{Rad}J$. For a given ideal $J \subset \mathcal{P}(X)$, $V(J)$ denotes the *zero* of J, that is, the common set of zeros of all polynomials in J.

Let G be a subset of X. Then $I(G)$ denotes the null of G, that is, the set of all polynomials in $\mathcal{P}(X)$ which vanish on G.

An ideals of the form (1) is called *finitely generated* in $\mathcal{P}(X)$. The following theorem is an analogue of the well known Hilbert Nullstellensatz for the infinite-dimension case.

Theorem. *Let J be a finitely generated in $\mathcal{P}(X)$. Then $I[V(J)] = RadJ$.*

This theorem imply, in particular that every irreducible polynomial in $\mathcal{P}(X)$ is defined (up to a multiplicative constant) by its zeros.

In this report will be consider questions related to extensions of their zeros. Here will be use the fact in [1] that zero of every homogeneous polynomial on a complex infinite-dimensional Banach space X contains an infinite-dimensional linear subspace. Also, will be use the well known Aron-Berner extension of polynomials in $\mathcal{P}(X)$ to the second dual X'' an the fact that the extension operator $P \rightsquigarrow \widetilde{P}$ is a topological homomorphism of algebras $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{P}(X'')$. Also we will consider zeros of *diagonal* polynomials on spaces with bases.

[1] A.Plichko and A. Zagorodnyuk, On automatic continuity and tree problems of *The Scottish book* concerning the boundedness of polynomial functionals, J. Math. Anal. Appl. – **220** – No.2 – P. 477–494.

e-mail: andriyzag@yahoo.com, nadyaverkalets@rambler.ru

Іменний покажчик

Нелінійні проблеми аналізу: V Всеукраїнська наукова конференція.
Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Плай, 2013. – 90 с.

Здано у видавництво 04.09.2013 р. Підписано до друку 09.09.2013 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Computer Modern.
Ум. друк. арк. 5.23. Обл. вид. арк. 5.42. Тир. 110.

Віддруковано у видавництві "Плай" ЦІТ
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ, вул. С. Бандери, 1.
Тел.: 71-56-22, e-mail: vdvcit@pu.if.ua.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру від
12. 12. 2006 р. Серія ДК 2718.