Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Інститут математики НАН України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет "Львівська політехніка"
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

IV ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ АНАЛІЗУ

(10-12 вересня 2008 року, Івано-Франківськ)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Івано-Франківськ

Класична розв'язність квазілінійної гіперболічної задачі з рухомими межами

Андрусяк Р.В., Бурдейна Н.О., Кирилич В.М.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

В області $G_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a_1(t) \leq x \leq a_2(t), \quad 0 \leq t \leq T\}$, де $a_k : [0,T] \to \mathbb{R}$, розглянуто гіперболічну систему квазілінійних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) \ + \ \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x}(x,t) \ = \ f_i(x,t,u), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad u = (u_1, ..., u_n)$$

з початковими

$$u(x,0) = g(x), \ g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x)), a_k(0) = a_k^0, k = 1,2, \ a_1^0 \leq x \leq a_2^0 \tag{2}$$

та граничними умовами

$$u_i(a_k(t),t) = \mu_k^i(t, \{u_s(a_{k'}(t),t)\}_{\substack{k'=1,2 \\ s \notin I_{k'}}}), \quad i \in I_k, \tag{3}$$

$$I_k = \{i | sgn[\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) - a_k'(0)] = (-1)^{k+1}\}, \quad k = 1,2, \ 0 \leq t \leq T,$$

де функції $\mu_k^i : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n - cardI_1 - cardI_2} \to \mathbb{R}$. Зауважимо, що множини I_1 та I_2 можуть перетинатись, а $I_1 \cup I_2$ не обов'язково співпадає з $\{1, ..., n\}$.

Встановлено умови на вихідні функції, при яких існують та єдині класичні локальний та глобальний розв'язки задачі (1)-(3). Зокрема, має місце теорема про локальну розв'язність.

Теорема. *Нехай*
1) $\lambda_i(x,t,u), \ f_i(x,t,u) \in \mathbb{C}^{1,0,1}(G_T \times B_{G+1}^n) \cap Lip(G_T \times B_{G+1}^n)$,
$\Big\{(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_{u_j}, (f_i)'_x, (f_i)'_{u_j}\Big\} \subset Lip(G_T \times B_{G+1}^n), i, j = \overline{1,n}$;
2) $g_i(x) \in \mathbb{C}^1([a_1^0, a_2^0]), \ g_i'(x) \in Lip([a_1^0, a_2^0]), i = \overline{1,n}$*;*
3)$a_k(t) \in \mathbb{C}^1([0,T]), a_k'(t) \in Lip([0,T]), k = 1,2$*;*
4)$\mu_k^i(t, \{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2 \\ s \notin I_{k'}}}) \ \in \ \mathbb{C}^1([0,T] \ \times \ B_{G+1}^{2n - cardI_1 - cardI_2}), \Big\{(\mu_k^i)'_t, (\mu_k^i)'_{w_k^{s'}} \ \subset \ Lip([0,T] \times B_{G+1}^{2n - cardI_1 - cardI_2})\Big\}, i \in I_k, \ k = 1,2, s \notin I_{k'}, k' = 1,2$*;*
5) виконуютьcя умови узгодження нульового та першого порядків;
6) справедлива умова

$$\lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0)) \neq a_k'(0), \quad k \ = \ 1,2 \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді для довільного достатньо малого T_0 *існує локальний класичний розв'язок задачі (1)-(3) в* G_{T_0}*, причому він єдиний в* $C_L^1(G_{T_0})$*.*

При доведенні відповідних теорем використано методику роботи [1] та метод характеристик і теорему Банаха про нерухому точку.

1. Филимонов А.М. Локальная разрешимость смешанной задачи для гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя переменными. – Рукопись деп.в ВИНИТИ, N4001-82 Деп, 72 с.

Дослідження збіжності послідовностей різних наближень двовимірних неперервних дробів

Антонова Т.М.
(Національний університет "Львівська політехніка")
Сусь О.М.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Розглядаються двовимірні неперервні дроби (ДНД) вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{0,i+j}}{b_{0,i+j}}}, \tag{1}$$

де $b_0, b_{k,j}, a_{k,j}, k = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots,$ – комплексні числа, та його n – ті наближення – скінченні ДНД вигляду

$$f_n = b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{n-i-1} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{n-i-1} \frac{a_{0,i+j}}{b_{0,i+j}}}, \tag{2}$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{n-2i-1} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{n-2i-1} \frac{a_{0,i+j}}{b_{0,i+j}}}, \tag{3}$$

$$\hat{f}_n = b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n-1}]} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{[\sqrt{n+1}]-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2i}]-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathbf{D}}\limits_{j=1}^{\sqrt{[n-2i-1]}-i} \frac{a_{0,i+j}}{b_{0,i+j}}}. \tag{4}$$

Скінченні ДНД вигляду (2) називаються звичайними, а (3), (4)– фігурними наближеннями ДНД (1).

Встановлено деякі достатні умови за яких для наближень (2),(3),(4) ДНД (1) виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n.$$

e-mail: olgas777@gmail.com

Збереження різних видів м'якості при топологічному спряженні обернених неавтономних дискретних динамічних систем

Атаманюк Б.В., Атаманюк О.Б.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

В [1] дано означення обернених неавтономних дискретних динамічних систем. Там же подано означення топологічної спряженості як такого відображення $\pi : (X, T) \to (Y, S)$ між двома динамічними системами, що виконуються дві умови: (1) вірна рівність $\pi \circ T = S \circ \pi$, (2) π - гомеоморфізм.

В [2] наведені означення різних видів м'якості: для майже нормального функтора F відображення $f : X \to Y$ називається відповідно:

(1) слабо nF-м'яким, (2) nF-м'яким зліва, (3) nF – м'яким зверху,

(4) сильно nF-м'яким, якщо для будь-якого бікомпакта Z розмірності $\dim Z < n$ і для будь-якої його замкнутої підмножини $A \subset Z$ і для будь-яких двох відображень $g : A \to X$ та (1), (3) $h : Z \to Y$, (2), (4) $h : Z \to F(Y)$, що задовольняють умову: $f \circ g = h|_A$, існує таке продовження φ відображення g, що (1), (2) $\varphi : Z \to F(X)$, (3), (4) $\varphi : F(Z) \to F(X)$, а також виконується умова: $h = F(f) \circ \varphi|_Z$. Якщо $n = \infty$, то згідно [2] nF-м'які відображення називаються F-м'якими.

Теорема. *Різні види м'якості коротких проекцій обернених неавтономних дискретних динамічних систем зберігається при топологічній спряженості.*

Зауважимо, що за допомогою теореми про композицію м'яких відображень даний результат можна поширити на наскрізні проекції динамічних систем, тобто різні види м'якості динамічної системи є інваріантами топологічної спряженості.

Авторами доведено в [3] збереження сильної поліедральної апроксимативної n-м'якості при топологічному спряженні, а в [4] – збереження шейпового інваріанта - спектральної рухомості при топологічному спряженні динамічних систем.

1. Коляда С.Ф. Топологічна динаміка: Дис. ...доктора фіз.-мат. наук. – Київ: Інститут математики НАН України, 2004. – 339 с.
2. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // УМН. – 1986. – Т. 41/6 (252).
3. Atamanyuk O.B. Atamanyuk R.B. Strong approximative polyhedral n-soft as invariant of nonautonomic diskrete dynamic system under the topological conjugation and optimization of channel routing by Bellman equations // Праці восьмої міжнародної конференції молодих вчених з прикладної фізики (11-13 червня, 2008, Київ). – 2008. – С. 79.
4. Atamanyuk O.B. Atamanyuk B.V. The movability as invariant under the topological conjugated of nonautonomic discrete dynamic systems // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (15-17 травня, 2008, Київ). – С. 492.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000
e-mail: bogdanatamaniuk@mail.ru
e-mail: oksana.atamanyuk@mail.ru

Підняття Мардешича-Рашинга, шейпове розшарування Мардешича-Рашинга та розшарування Сєрра

Атаманюк Б.В., Тороус Н.В., Тороус С.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника)

Розглянемо динамічні системи. Основні поняття можна знайти в [1].

Першому автору належить теорема 1, другому автору – теорема 2, третьому – теорема 3.

Означення 1, [2]. Відображення $f : X \to Y$ має підняття Мардешича-Рашинга для класу $K = \{C, D/D \subset C\}$ пар просторів, якщо для деякого охоплюючого відображення $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ двох ANR-просторів $\hat{X}$ та $\hat{Y}$ (тут X замкнутий в $\hat{X}$, Y замкнутий в $\hat{Y}$) і для будь-яких відкритих околів $OX \subset \hat{X}$ та $OY \subset \hat{Y}$ таких, що і будь-якого покриття $\omega \in \mathrm{cov}\,(OY)$ існують настільки тісні відкриті околи $VX \subset \hat{X}$ та $VY \subset \hat{Y}$, що виконується умова $f\,(VX) \subset VY$, і настільки дрібне покриття δ простору $V\,(Y)$ таке, що кожна пара відображень $h : C \to VY$ та $\varphi : D \to VX$, де пара $(C, D) \in K$, що є δ-узгодженою знизу відносно $\hat{f}$, має нижнє ω-апроксимативне підняття $\psi : C \to OX$, тобто таке відображення ψ, що продовжує відображення φ і буде ω-узгоджене знизу з h відносно $\hat{f}$, тобто $\left(\hat{f} \circ \psi, h\right) < \omega$. Коротше кажучи, для будь-якого ω існує δ, що з комутативності $\hat{f} \circ \varphi = h \circ i$ слідує, що існує ω-діагональ $\psi : C \to OX$.

Означення 2. Якщо в означенні 1 задано $C = D \times I$, $D = D \times \{0\}$, то маємо означення шейпового розшарування Мардешича-Рашинга. Якщо $C = B^n \times I$, $D = B^n \times \{0\}$, то маємо n-розшарування Сєрра.

Теорема 1. *Властивість відображення мати підняття Мардешича-Рашинга є інваріантом при топологічному спряженні обернених неавтономних дискретних динамічних систем.*

Теорема 2. *Шейпове розшарування Мардешича-Рашинга є інваріантом при топологічному спряженні обернених неавтономних дискретних динамічних систем.*

Теорема 3. *n-розшарування Сєрра є інваріантом при топологічному спряженні обернених неавтономних дискретних динамічних систем.*

1. Marcy Barge and Judy Kennedy. Open problems in Topology. J. van Mill and G.M. Reed (Editors). Elsevier Science Publisher B.V. North-Holland, 1990.
2. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы. УМН, Т. 41(6), 252, 1986. С. 121-161.

e-mail: bogdanatamaniuk@mail.ru

Апроксимативне підняття гомотопії як інваріант топологічної спряженості обернених неавтономних дискретних динамічних систем

Атаманюк О.Б.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядаємо обернені неавтономні дискретні динамічні системи [1].

Означення 1. (Корам, Дюваль [2]) Відображення $p : E \to B$ між метричними ANR- просторами називається апроксимативним розшаруванням Гуревича, якщо $\forall \omega \in Cov(B)$кожна комутативна діаграма $p \circ h = H \circ i$ допускає ω- діагональ $\varphi : X \times I \to E$, тобто таке відображення, що

(1) $\varphi_0 = \varphi|_{X \times \{0\}} = L$, (2) $p \circ \varphi$ буде ω- близьким до H.

Теорема 1. *Апроксимативне розшарування Гуревича є інваріантом при топологічному спряженні динамічних систем.*

Доведення. Нехай π- топологічне спряження між двома динамічними системами, тобто: 1) π- гомеоморфізм, 2) $T \circ \pi = \pi \circ p$

Доведемо, що T- теж апроксимативне розшарування Гуревича. Нехай $g : X \to Y$ та $G : X \times I \to Z$ - два довільні відображення, що комутативна діаграма $T \circ g = G \circ i$. Тоді $h = \pi^{-1} \circ g$ та $H = \pi^{-1} \circ G$, а також $\Omega \in Cov(Z)$. Тоді $\omega = \pi^{-1}(\Omega) \in Cov(B)$. Тоді за умовою існує ω- діагональ $\varphi : X \times I \to E$ така, що виконуються дві умови: 1) $\varphi_0 = h$, 2) $(p \circ \varphi, H) < \omega$.

Беремо $= \pi \circ \varphi$. Доведемо, що так знайдене Φ буде Ω- діагональ, тобто (1) $_0 = g$, (2) $(T \circ, G) < \Omega$. Справді, $_0 = \pi \circ \varphi_0 = \pi \circ h = \pi(\pi^{-1} g)$. Далі, $(T, G) = (T \circ \pi \circ \varphi, G) = (\pi \circ p \circ \varphi, G) = (\pi \circ p \circ \varphi, \pi \circ H) = \pi(p \circ \varphi, H) < \pi(\omega) = \Omega$. Теорема 1 доведена.

Означення 2. Нехай задані дві обернені неавтономні дискретні динамічні системи $E = \{E_i, q_{ij}\}$ та $B = \{B_i, r_{ij}\}$, а також морфізм $p = \{p_i\}$, що заданий як морфізм між двома зворотними спектрами.

Цей морфізм має властивість апроксимативного підняття гомотопії (АПГ) відносно довільного метричного простору X, якщо для будь-якого натурального індексу і та $\forall \varepsilon > 0$ існує натуральне $j \geq i$ та число $\delta > 0$ такі, що як тільки відображення $h_j : X \to E_j$ та $H_j : X \times I \to B_j$ задовольняють умову $\rho(p_j \circ h_j, H_j) < \delta$, то існує гомотопія $\varphi_i : X \times I \to E$ така, що виконуються дві умови:

1) $\rho(\varphi_i, q_{ij}, h_j) < \varepsilon$

2) $\rho(p_i \circ \varphi_i, r_{ij} \circ H_j) < \varepsilon$ тобто φ_i реалізує ε- діагональ для відображення $r_{ij} H_j$.

Теорема 2. *Властивість АПГ є інваріантом топологічної спряженості обернених неавтономних дискретних динамічних систем.*

1. Ingram W.T. Inverse limits and dynamical systems. Open problems in topology II. Edited by Elliet Pierl. Elsevier, Amsterdam, 2007.
2. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы.// Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып.6/252, № 3.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000
e-mail: oksana.atamanyuk@mail.ru

Обернена задача для неоднорідного еволюційного рівняння у банаховому просторі з границею Чезаро на нескінченості

Баб'як-Білецька Л.С.
(Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка)
Горбачук О.Л.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

У банаховому просторі $\mathcal{B}$ розглядається рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [\,0, \infty\,)\,, \tag{1}$$

з лінійним замкненим оператором A зі щільною областю визначення $D(A)$, де $f(t) = a_k$, $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $k \in \overline{0, n-1}$ і $f(t) = a_n$, $t_{n-1} \leqslant t < \infty$ (a_k – невідомі параметри).

Розглянемо для рівняння (1) таку задачу:

$$\begin{gathered} y(0) = y_0, \quad y(t_k) = y_k, \quad k \in \overline{1, n}, \\ (c-1) \lim_{t \to \infty} y(t) = y_\infty \quad \text{(границя за Чезаро)}, \end{gathered} \tag{2}$$

де $y_k \in D(A)$ (y_k – відомі елементи, і y_∞ заданий елемент банахового простору $\mathcal{B}$).

Теорема. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$ і $0 \notin \sigma_p(A)$ (точковий спектр оператора A). Для заданого набору елементів $(y_0, y_1, \ldots, y_n, y_\infty)$, де $y_k \in D(A)$, $k \in \overline{0, n}$, $y_\infty \in \mathcal{B}$, задача (1), (2) має розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де вектор-функція $y(t)$ є слабким розв'язком рівняння (1) (слабкий розв'язок в сенсі [1]) і задовільняє умову (2) тоді і тільки тоді, коли виконуються умови: $A(y_{k+1} - y_k) \in R(U(t_{k+1} - -t_k) - I)$, де $k \in \overline{0, n-1}$, $y_\infty \in D(A)$, $Py_n = Py_\infty$, де $R(\cdot)$ – образ оператора $(\cdot)$, I– одиничний оператор, P– проектор на підпростір $KerA$ у розкладі $\mathcal{B} = KerA \oplus \overline{R(A)}$.*

1. Lions J. L. Equations differentialles operationnelles et problemes aux limites. – Springer, 1961, 254 p.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. Ейдельман Ю.С. Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром // ДАН УРСР. сер. А. – 1983. – №4. – с. 16–19.
4. Л. С. Баб'як-Білецька, О. Л. Горбачук. Одна багатоточкова задача для неоднорідного еволюційного рівняння першого порядку у банаховому просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, №2. – с. 33–36.
5. Zaidman S. Functional analysis and differential equations in abstract spaces. – London: D.C., 1981, 226 p.

вул. Шафарика 4/15, Львів, 79032
e-mail: o_horbachuk@yahoo.com

Задача Діріхле для збуреного диференціального рівняння спеціального вигляду

Баранецький Я.О., Ярка У.Б.
(Національний університет "Львівська політехніка")
Копчук-Кашецький А.В.
(Івано-Франківський медичний університет)

Нехай H – гільбертів, сепарабельний простір, оператори $\mathrm{L}_0, \mathrm{L} : H \to H$ назвемо:
– ізоспектральними, якщо точкові спектри співпадають $\sigma_p(\mathrm{L}_0) = \sigma_p(\mathrm{L})$, а системи кореневих функцій операторів L_0, L є повними та мінімальними в просторі H;
– подібними, якщо існує автоморфізм $M : H \to H$ – такий, що $M : D(\mathrm{L}_0) \to D(\mathrm{L})$, $\mathrm{L} = M\mathrm{L}_0 M^{-1}$.

В попередніх дослідженнях авторів [1] вивчалися оператори задачі Діріхле для збурених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Доведено ізоспектральність та подібність оператора L збуреної задачі оператору L_0 породженому операцією $-D_t^2$ та умовами Діріхле. В даному повідомленні розглядається оператор задачі Діріхле, який є ізоспектральний оператору L_0 , але не є подібний до нього.

Нехай оператор L_1 породжений на множині

$$D(\mathrm{L}_1) = D(\mathrm{L}_0) \equiv \left\{ v(t) \in W_2^2(0,1) : v(0) = v(1) = 0 \right\},$$

операцією

$$L_1 u(t) \equiv \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(D_t^2 u(t) + D_t^2 u(1-t) \right).$$

Розглянемо задачу

$$Lu(t) \equiv L_0 u(t) + \gamma L_1 u(t) = f(t),\ t \in (0,1), \gamma \in R, f \in L_2(0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Позначимо через L оператор даної задачі породжений на множині $D(\mathrm{L}) = D(\mathrm{L}_0)$ операцією $L \equiv L_0 + \gamma L_1$, $\gamma \in R$.

Теорема 1. *Оператор* L *має точковий спектр* $\sigma_p(\mathrm{L}) = \sigma_p(\mathrm{L}_0)$ *та систему власних функцій* $V(\mathrm{L})$ *повну в просторі* $L_2(0,1)$.

Наслідок. *Оператор* L *ізоспектральний оператору* L_0 *в просторі* $L_2(0,1)$.

Теорема 2. *Оператор* L_1 *– необмежений в просторі* $L_2(0,1)$.

1. Каленюк П.І., Баранецький Я.О., Ярка У.Б. Збурення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – **337**. – С. 70–73.

НУ "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: ul_yarka@yahoo.com

Усереднення в задачі коливання зв'язаних об'єктів із розподіленими та зосередженими параметрами і з запізненням

Бігун Я.Й.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Розглядається коливання системи, яка описується диференціальною задачею

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}(x,t) + \varepsilon^2 f(\chi, \tau, v(t), v(\lambda t), \dot{v}(t), \dot{v}(\lambda t)), \tag{1}$$

$$(x,t) \in (0,l) \times (0, T/\varepsilon], \chi = \varepsilon x, \tau = \varepsilon t, \lambda \in (0,1), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), 0 \le x \le l;$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = v(t), 0 \le t \le T/\varepsilon;$$

$$\ddot{v}(t) + \omega^2(\tau) v(t) = b u_x(l,t) + \varepsilon \nu(\tau) + \varepsilon g(\tau, v(t), v_\lambda(t), \dot{v}(t), \dot{v}(\lambda t)), \tag{2}$$

$$v(0) = v_0, \quad \dot{v}(0) = v_1.$$

Такі задачі виникають, наприклад, у зв'язку з вибором управляючої функції при гасінні коливань газу в довгих трубопроводах[1]. Обгрунтування методу усереднення для систем із звичайними і частинними похідними та з запізнення розглядалаось в [2].

Заміною змінних $v = a\cos\varphi$, $\dot{v} = -a\omega(\tau)\sin\varphi$ система (1) зводиться до системи рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + f_0(\chi, \tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda),$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{\nu(\tau)}{\omega(\tau)}\sin\varphi - \frac{1}{2}a(1-\cos\varphi)\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} - \frac{b}{\omega}\frac{\partial u(l,\tau)}{\partial \chi}\sin\psi - \frac{1}{a}g_0(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} - \frac{\nu(\tau)\cos\varphi}{a\omega(\tau)} - \frac{1}{2\omega(\tau)}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{a\omega(\tau)}\left(b\frac{\partial u}{\partial \chi}(l,\tau) + g_0(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda)\right)$$

із відповідними початковими і крайовими умовами. Тут $g_0 = g(\tau, a\cos\varphi,$

$a_\lambda \cos\varphi_\lambda, -a\omega\sin\varphi, -a_\lambda\omega_\lambda \sin\varphi_\lambda)$. Система суттєво спрощується після усереднення за швидкими змінними φ і φ_λ. В роботі вказані умови, при виконанні яких

$$|u(x,t,\varepsilon) - \overline{u}(x,\tau,\varepsilon)| + |a(\tau,\varepsilon) - \overline{a}(\tau)| + |\varphi(\tau,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)| \le c\sqrt{\varepsilon},$$

для всіх $x \in [0,l]$, $\tau \in [0,T]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, якщо тільки ε_0 – досить мале і збігаються початкові та крайові умови для розв'язку задачі (1) та розв'язку $\overline{u}, \overline{a}, \overline{\varphi}$ усередненої задачі.

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управление колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 2005. – 45, № 10. – С. 1766–1784.
2. Бігун Я.Й. Усереднення в задачі про коливання струни і багаточастотної системи із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 14–17.

вул. Університетська 28, Чернівці, 58012
e-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

Про двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними

Боднар Д.І.

(Тернопільський національний економічний університет)

Дмитришин Р.І.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

В аналітичній теорії неперервних дробів вивчаються різні типи функціональних неперервних дробів, які використовуються для дослідження голоморфних та мероморфних функцій. Одним із двовимірних узагальнень неперервних дробів є двовимірні неперервні дроби з нерівнозначними змінними, які за своєю структурою є аналогами кратних степеневих рядів.

Розглядається двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{\Phi_0(z_1) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{g_{0k}(1-g_{0,k-1})z_2}{\Phi_k(z_1)}}, \quad \Phi_n(z_1) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \frac{g_{kn}(1-g_{k-1,n})z_1}{1}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

де $s_0 > 0,\ g_{00} = 0,\ 0 < g_{kl} < 1,\ k \geq 0,\ l \geq 0,\ k+l > 0,\ \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, який є узагальненням неперервного g-дробу

$$\frac{s_0}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g_n(1-g_{n-1})z}{1}} = \cfrac{s_0}{1 + \cfrac{g_1 z}{1 + \cfrac{g_2(1-g_1)z}{1 + \cfrac{g_3(1-g_2)z}{1 + \ddots}}}},$$

where $s_0 > 0,\ g_0 = 0,\ 0 < g_n < 1,\ n \geq 1,\ z \in \mathbb{C}$.

Встановлено відповідність між формальним подвійним степеневим рядом

$$\sum_{k+l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} s_{kl} z_1^k z_2^l, \quad (2)$$

де $s_{kl} \in \mathbb{R},\ k \geq 0,\ l \geq 0,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$, і дробом (1), побудовано алгоритм розвинення ряду (2) у відповідний двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними (1) та встановлено необхідні і достатні умови існування такого алгоритму [1]. Крім того, досліджено збіжність дробу (1) в областях

$$Q = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 :\ |z_k| < 1,\ k = 1, 2\}\ [2],$$

$$P = \bigcup_{\alpha \in (-\pi/2;\pi/2)} \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 :\ \sum_{k=1}^{2} \left(|z_k| - \mathrm{Re}(z_k e^{-2i\alpha}) \right) < 2\cos^2 \alpha \right\}\ [3].$$

1. Боднар Д.І., Дмитришин Р.І. Двовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Доп. НАН України. – 2006. – № 2. – С. 13–18.

2. Дмитришин Р.І. Ефективна ознака збіжності деякого гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 374. Математика. – 2008. – С. 44–49.

3. Дмитришин Р.І. Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С.87–92.

Динамічна задача для еліптико-параболічних рівнянь в необмежених областях без умов на нескінченності

Бокало М.М.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з межею $\partial\Omega$, яка є C^1 многовидом розмірності $n-1$; Γ_0 — замкнена множина на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0; \nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $S = (0, T]$, $T > 0$; $p > 2$ — деяке число, $p' = p/p-1$. Покладаємо $Q = \Omega \times S$, $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times S$. Припускаємо, що $0 \in \Omega$ і для будь-якого $R > 0$ під Ω_R розуміємо зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, яка містить 0. Нехай $\Gamma_{1,R} = \Gamma_1 \cap \partial\Omega_R$, $\quad \Sigma_{1,R} = \Gamma_{1,R} \times S$.

Розглядаємо динамічну крайову задачу: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_1(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f_1(x, t) \quad \text{на} \quad Q\,, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_2(s)\, u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(s, t, u, \nabla u)\, \nu_i(s) + b(s, t, u) = f_2(s, t) \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \tag{3}$$

$$m_1(\cdot)(u(\cdot, 0) - u_1(\cdot)) = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \quad m_2(\cdot)(\gamma u(\cdot, 0) - u_2(\cdot)) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{4}$$

де $a_i\, (i = \overline{0, n}), b, f_1, f_2, u_1, u_2, m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ — деякі задані дійснозначні функції.

Накладаючи певні умови на вихідні дані, даємо означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) і досліджуємо її коректність. При цьому, зокрема, вимагається, щоби функція m_1 належала простору $L_{q^*,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а функція m_2 — $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Gamma}_1)$, де $q > 1, q^* > 1$ — деякі числа, значення яких залежать від p. Також припускаємо, що $m_1^{\frac{1}{2}} u_1 \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), m_2^{\frac{1}{2}} u_2 \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma}_1), f_1 \in L_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ f_2 \in L_{p',\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma}_1)$.

Знайдено умови на функції $a_0, a_1, ..., a_n$, b, при яких задача (1)-(4) має єдиний узагальнений розв'язок і він для будь-яких R_0, R $(0 < R_0 < R,\ R \geq 1)$ задовольняє оцінку

$$\sup_{t \in [0,T]} \Big[\int\limits_{\Gamma_{1,R_0}} m_2(s) |\gamma u(s, t)|^2\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega_{R_0}} m_1(x)\, |u(x, t)|^2\, dx \Big] + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[|u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^p \Big]\, dxdt \leq$$

$$\leq C \Big(\frac{R}{R - R_0} \Big)^s \Big[R^\mu + \int\limits_{\Omega_R} m_1(x)\, |u_1(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Gamma_{1,R}} m_2(s) |u_2(s)|^2\, d\Gamma +$$

$$+ \iint\limits_{Q_R} |f_1(x, t)|^{p'} dxdt + \iint\limits_{\Sigma_{1,R}} |f_2(s, t)|^{p'}\, d\Gamma dt \Big],$$

де C, s, μ — деякі сталі, що не залежать від u, u_0, u_1, f_1, f_2.

Зауважимо, що ми не накладаємо ніяких обмежень на поведінку розв'язку та зростання правих частин рівнянь задачі на нескінченності.

вул. Пасічна 62а, кв. 61, Львів, 79038

e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Про одну мішану задачу для нелінійного параболічного рівняння з виродженням

Бугрій О.М.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з досить гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$. Розглядається задача: знайти таку функцію $u : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^1$, яка задовольняє нелінійне вироджене параболічне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$|u|^{r-2}u_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i} + g|u|^{q(x)-2}u = f(x,t) \tag{1}$$

для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ та задовольняє однорідні крайові та початкову умови

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Від коефіцієнтів задачі вимагається виконання таких умов:

$$r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in [2, +\infty), \quad q \in L^\infty(\Omega),$$

$$1 < q_1 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \le q(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x) \equiv q_2 < +\infty,$$

$\gamma_{\max}$ і $\gamma_{\min}$ – відповідно найбільше та найменше числа серед $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$,

$$r_{\max} = \max\{r, \gamma_{\max}\}, \quad r_{\min} = \min\{r, \gamma_{\min}\},$$

$$q_{\max} = \max\{q_2, \gamma_{\max}\}, \quad q_{\min} = \min\{q_1, \gamma_{\min}\},$$

$$\frac{r_{\max}}{2} \le r_{\min}, \qquad 1 < \frac{\gamma_{\min}}{r-1} \le \frac{\gamma_{\max}}{r-1} \le 2, \qquad q_{\max} \ge \frac{\gamma_{\min}}{\gamma_{\min} - (r-1)},$$

$$a_1, \ldots, a_n > 0, \quad b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^1, \quad g > 0.$$

При накладанні додаткових умов доведено теорему існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(3). Для її доведення використано метод еліптичної регуляризації.

Розв'язок задачі (1)-(3) розуміється в сенсі певної інтегральної тотожності. Він належить до деякого простору Соболєва та узагальненого простору Лебега $L^{q(x)}(Q_{0,T})$.

Кафедра диференціальних рівнянь
Львівський національний університет ім. І. Франка
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Визначення області нестійкості пружного стрижня на маятниковому підвісі при кінематичному збуренні

Бутитер І.Б.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)
Вікович І.А.
(Національний університет "Львівська політехніка")

У мобільних машинах для хімічного захисту рослин, зокрема, в штангових обприскувачах, для зменшення амплітуди коливань навісних штанг при експлуатації викликаних кінематичним збуренням, зумовленим рельєфом грунту, широко застосовують різні маятникові підвіски [1,2]. Проблема горизонтальної стабілізації начіпних штанг обприскувачів з такими підвісками на сьогодні повністю не вирішена. Для забезпечення горизонтальної стабілізації начіпної штанги обприскувача при експлуатації необхідно оптимізувати всю його конструкцію. Зокрема, необхідно визначити оптимальне співвідношення між довжинами штанги та маятника, величинами амплітуд і частот коливань осей підвісу начіпної штанги обприскувача.

З цією метою нами розглянуто задачу про згинні коливання і стійкість пружного стрижня начіпної штанги обприскувача, жорстко з'єднаного посередині з кінематично збудженим маятником [3]. З допомогою варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського одержано систему нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язок яких подано у вигляді розкладу за степенями малого параметра з використанням подвійних рядів Фур'є і функцій Бесселя першого роду. Отримано формулу для основної області нестійкості. Показано, що головна область нестійкості коливань навісної штанги обприскувача, встановленої на одношарнірній маятниковій підвісці, виникає при співвідношенні частоти кінематичного збурення до подвоєної частоти вільних коливань маятника рівній одиниці, а параметричний резонанс можливий при великій амплітуді вертикальних коливань точки підвісу маятника.

Отримані теоретичні результати можна безпосередньо використовувати при проектуванні одношарнірних навісних штанг обприскувачів на маятникових підвісках з метою виключення резонансних коливань при експлуатації.

1. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа "маятник". – Алма-Ата: Наука, 1981. — 256 с.
2. Вікович І.А. Коливання пружної одношарнірної маятникової штанги обприскувача для хімічного захисту рослин // Вісник НУ "Львівська політехніка". "Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні". — Львів, 2003. — №37. — С. 75—80.
3. Викович И.А., Дивеев Б.М., Бутитер И.Б. Повышение устойчивости кинематически возбуждаемой навесной штанги опрыскивателя, установленной на одношарнирной маятниковой подвеске // Проблемы машиностроения. -– Харьков: ИПМ, 2006. -– Т. 9, № 2. -– С. 48-–60.

вул. Наукова 3-б, Львів, 79053
e-mail: tkim@iapmm.lviv.ua

вул С. Бандери 12, Львів, 79013

Багатоточкова задача для еліптичного рівняння четвертого порядку в прямокутній області

Василишин Б.В., Василишин П.Б., Токар В.Б.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

В області $D = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in [0,l]\}$ розглядається задача

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{3} a_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,4},\ a_r \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0,\ 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^s u(t,0)}{\partial x^s} = \frac{\partial^s u(t,l)}{\partial x^s}, \quad s = 0,1,2,3. \tag{3}$$

Розв'язок задачі шукається у вигляді ряду за власними функціями $V_k(x)$ задачі

$$V^{(4)}(x) = \lambda^4 V(x), \quad V^{(s)}(0) = V^{(s)}(l), s = 0,1,2,3.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)-(3) *у просторі* $C^4(D)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \sum_{r=0}^{3} a_r (k\mu_m)^r \neq 0, \quad \Delta(k,\hat{t}) = \det \| \exp(k\mu_m t_j) \| \neq 0, \quad m,j = \overline{1,4}, \tag{4}$$

де $\mu_{1,2} = \pm z,\ \mu_{3,4} = \pm iz,\ z = (\pi(1+i))/(\sqrt{2}l),\ \hat{t} = (t_1,t_2,t_3,t_4)$.

Позначимо через $A_\delta, \delta > 0$, банахів простір функцій $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k V_k(x)$, для яких скінченна норма

$$\|g\|_{A_\delta} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \exp(\delta k).$$

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (4) *і нехай існують сталі* $Q > 0$ і $\xi \in \mathbb{N}$ *такі, що виконується умова*

$$(\forall k \in \mathbb{N},\ k > K > 0) \quad \Delta(k,\hat{t}) \geq k^{-(\xi+\varepsilon)} \exp(-Qk), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{5}$$

Якщо $\varphi_j \in A_q, j = \overline{1,4},\ q > M$, *де*

$$M = \max(Q + \pi\sqrt{2}(2t_4 - t_1 - t_2)/(2l),\ Q + \pi\sqrt{2}(t_4 + t_3 - 2t_1)/(2l)),$$

то існує розв'язок задачі (1)-(3), *який належить простору* $C^4(D)$ *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x), j = \overline{1,4}$.

Встановлено, що оцінка (5) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^4$) векторів $\hat{t}$ при $\xi = 6$ і $Q = 3\sqrt{2}\pi T/l$.

1. Василишин П.Б. Багатоточкова крайова задача для еліптичного диференціального рівняння четвертого порядку // Вісник Прикарпат. ун-ту. Природн.-мат. науки. –1995. – Вип. 1. – С. 28-35.

mailto: pbw@pu.if.ua

Узагальнене інтегральне перетворення Ламберта

Вірченко Н.О.
(Національний технічний університет України "КПІ")

Інтегральне перетворення Ламберта

$$LM\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty \frac{st}{e^{st}-1} f(t)dt \tag{1}$$

знайшло широке застосування в математичній фізиці, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в астрофізиці, атомній фізиці та ін. [1].

Запровадім узагальнення інтегрального перетворення Ламберта (1) в такій формі:

$$\widetilde{LM}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty \frac{(st)^k \ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(st)^{-\gamma})}{(e^{st}-x)^\omega} f(t)dt \tag{2}$$

де $Res > 0, Reb > 0, |x| \leq 1, Rec > Rea > 0, \{\tau, \beta\} \subset R, \tau > 0, \tau - \beta < 1, \gamma > 0, \omega \geq 1; f(t) = \bigcirc(t^\delta)$ при $t \to 0, \delta > 0; f(t) = \bigcirc(t^{æ})$ при $t \to \infty, æ > 0;\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ – (τ, β)–узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [2]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (c;\tau); & \\ (c;\beta); & zt^\tau \end{array}\right]dt, \tag{3}$$

тут ${}_1\Phi_1$- функція Фокса-Райта.

У доповіді досліджено основні властивості інтегрального перетворення (2), подано застосування. Зокрема, одержано формулу обернення. Справедлива,

Теорема. *При* $\sigma > \frac{1}{2}, Re(k-r) > 0, Req > 0, Re\alpha > 0, t^r f(t) \in L(0,\infty)$ *та при виконанні умов, сформульованих вище для справедливості (2), правдива рівність:*

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\Gamma(k-r)\tilde{\zeta}(k-r;a;c;x)]^{-1}\ t^{-r}\varphi(r)dr, \tag{4}$$

де

$$\varphi(r) \equiv m_s(r) = \Gamma(k-r)\tilde{\zeta}(k-r;a;c;x) \int\limits_0^\infty t^r f(t)dt, \tag{5}$$

$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{(1-xe^{-t})^\omega}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-bt^{-\gamma})dt$ *- узагальнена функція Гурвіца-Лерча [2].*

1. Raina R.K., Chhajed P.K. Certain results involving a class of functions associated with the Hurwitz zeta function// Acta Math.Univ.Comenianal, **73,** 1. – 2004. – P.89–100.
2. Virchenko N. On the generalized confluent hypergeometric function and its application// Intern. J. Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 2006, **v.9,** N2. – P. 101–108.

вул. Полярна 11, кв. 18, Київ, 04201
e-mail: LASTIC@users.ntu-kpi.kiev.ua

Про визначення асимптотичних значень резонансних частот SH-коливань міжфазної тріщини

Войтко М.В., Куриляк Д.Б.
(Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України)

Однією з ключових проблем сучасних методів неруйнівного контролю є визначення спектра коливань тіл з дефектами [1]. Тут розглянемо задачу про визначення власних частот SH-коливань міжфазної тріщини. Для її розв'язання знайдемо значення комплексного спектрального параметра $\tilde{\omega} = k_{1(2)}c_{1(2)}$, за яких існує нетривіальний розв'язок рівняння Гельмгольца

$$u''_{xx} + u''_{yy} + k_l^2 u = 0, \tag{1}$$

де $l = 1$ для $y > 0$, $l = 2$ для $y < 0$, що задовольняє крайові умови на берегах тріщини довжиною L

$$u'_y(x, \pm 0) = 0\,,\; x \in (-L, 0), \tag{2}$$

умови спряження поля поза тріщиною, на плоскій поверхні поділу фаз:

$$\left.\begin{array}{r} u(x,+0) - u(x,-0) = 0 \\ \mu_1 u'_y(x,+0) - \mu_2 u'_y(x,-0) = 0 \end{array}\right\}, \; x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty), \tag{3}$$

а також умову обмеженості енергії та умову випромінювання.

Застосовуючи перетворення Фур'є, зводимо задачу (1)-(3) до рівняння Вінера-Хопфа, з якого, після проведення процедури факторизації і декомпозиції, отримуємо систему двох однорідних інтегральних рівнянь другого роду фредгольмового типу [2]. З цих рівнянь формуємо оператор-функцію для знаходження спектра задачі. У випадку довгих тріщин ($L >> \lambda$, λ довжина хвилі) наближене знаходження точкового спектра зводимо до визначення комплексних нулів двох трансцендентних рівнянь виду:

$$\begin{array}{c} [(1 - A_1(\tilde{\omega}))(1 - A_2(\tilde{\omega})) - A_3(\tilde{\omega})A_4(\tilde{\omega})] = 0, \\ [(1 + A_1(\tilde{\omega}))(1 + A_2(\tilde{\omega})) - A_3(\tilde{\omega})A_4(\tilde{\omega})] = 0. \end{array} \tag{4}$$

Тут параметр $\tilde{\omega}$ входить нелінійно у відомі функції $A_k(\tilde{\omega})$ [2], $k = \overline{1,4}$.

Коли тріщина знаходиться в однорідному середовищі, то маємо: $c_1 = c_2 = c$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $A_1(\tilde{\omega}) = A_2(\tilde{\omega}) = A_3(\tilde{\omega}) = A_4(\tilde{\omega}) = A(\tilde{\omega}) = \frac{e^{i(\tilde{\omega}L/c - \pi/4)}\sqrt{L\tilde{\omega}}\,\Gamma_1[1/2, -2iL\tilde{\omega}/c]}{\pi\sqrt{2c}}$, де $\Gamma_1(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}/(t+y)dt$ – узагальнена гамма-функція.

За цих умов рівняння (4) записуємо так

$$1 - 2A(\tilde{\omega}) = 0, \quad 1 + 2A(\tilde{\omega}) = 0. \tag{5}$$

Рівняння (4), (5) використовуємо для визначення впливу параметрів середовищ на комплексні значення точкового спектра мішаної крайової задачі (1)–(3).

1. Kuryliak D.B., Nazarchuk Z.T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Science – 2008. – **43**. , doi: 10.1029/2007RS003792.
2. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т., Войтко М.В. Поле напружень за опромінення плоскою SH-хвилею тріщини на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, №4. – С. 18–30.

вул. Наукова 5, Львів, 79601
e-mail: voytko@ipm.lviv.ua

Задача Коші для ієрархії нелінійних рівнянь фон Неймана

Герасименко В.І.
(Інститут математики НАН України)

Досліджено задачу Коші для ієрархії нелінійних рівнянь фон Неймана, якою описується еволюція всіх можливих станів квантових багаточастинкових систем в термінах кореляційних операторів $g = (I, g_1, \ldots, g_n, \ldots)$ - самоспряжених операторів, визначених на просторі Фока $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$

$$\frac{d}{dt} g_n(t, Y) = -\mathcal{N}_n(Y) g_n(t, Y) -$$

$$- \sum_{\substack{\mathrm{P}:\, Y = \bigcup X_i \\ |\mathrm{P}| > 1}} \sum_{\substack{Z_1 \subset X_1 \\ Z \neq \emptyset}} \cdots \sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|} \subset X_{|\mathrm{P}|} \\ Z \neq \emptyset}} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|} |Z_r|\right)} \big(Z_1, \ldots, Z_{|\mathrm{P}|}\big) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i),$$

де використано такі позначення: оператор g_n, визначений в n-частинковому гільбертовому просторі $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$, позначено $g_n(1, \ldots, n)$, $Y \equiv (1, \ldots, n)$, $|Y| = n$ — кількість елементів множини Y, оператор $\mathcal{N}_n(Y)$ - оператор фон Неймана [1], $\sum_{\mathrm{P}}$ — сума за всіма розбиттями P множини Y на $|\mathrm{P}| > 1$ непорожніх підмножин X_i, що не перетинаються, $\sum_{Z_j \subset X_j}$ — сума по всіх непорожніх підмножинах $Z_j \subset X_j$.

Побудовано розв'язок початкової задачі для такої ієрархії рівнянь. Він зображується розкладами по кластерах частинок, еволюція яких описується кумулянтами відповідного порядку груп еволюційних операторів рівнянь фон Неймана

$$g_n(t, Y) = \sum_{\mathrm{P}:\, Y = \bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, Y_{\mathrm{P}}) \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(0, X_i), \quad n \geq 1,$$

де $Y_{\mathrm{P}} \equiv (X_1, \ldots, X_{|\mathrm{P}|})$ — множина, елементами якої є $|\mathrm{P}|$ підмножин $X_i \subset Y$ розбиття $\mathrm{P} : Y = \bigcup_i X_i$, $\sum_{\mathrm{P}:\, Y = \bigcup_i X_i}$ — сума за всіма розбиттями P множини Y на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин, що не перетинаються. Оператор $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ при кожному $|\mathrm{P}| \geq 1$ інтерпретується як кумулянт (семіінваріант) $|\mathrm{P}|$-го порядку еволюційних операторів $\mathcal{G}_{|Z|}(-t; Z)$ рівнянь фон Неймана [1] і визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, Y_{\mathrm{P}}) := \sum_{\mathrm{P}':\, Y_{\mathrm{P}} = \bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'| - 1} (|\mathrm{P}'| - 1)! \prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|Z_k|}(-t; Z_k).$$

Для початкових даних з простору послідовностей ядерних операторів доведено теорему існування та єдиності сильного та слабкого розв'язку. Обговорюється проблема зв'язку побудованого розв'язку з s-частинковими статистичними операторами, які є розв'язками ієрархії рівнянь Боголюбова [2], та з s-частинковими кореляційними операторами.

1. V.I.Gerasimenko, V.O.Shtyk. Evolution of Correlations of Quantum Many-Particle Systems. J. Stat. Mech. (3), (2008), P03007.
2. C.Cercignani, V.I.Gerasimenko, D.Ya.Petrina. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. Kluwer Acad. Publ., 1997.

вул. Терещинківська 3, Київ-4, 01601
e-mail: gerasym@imath.kiev.ua

Області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами

***Гладун В.Р.* (Національний університет "Львівська політехніка")**
***Гоєнко Н.П.* (ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)**

Об'єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) з додатними елементами

$$a_0\left(b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $N\in\mathbf{N}$ – кількість гілок розгалуження, $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ – мультиіндекс. Нехай $I_0=\{0\}$, $I_k=\{i(k):i_p=1,2,\ldots,N,\ p=1,2,\ldots,k\}$, $k=1,2,\ldots$.

Розглянемо також ГЛД $\widehat{a}_0\left(\widehat{b}_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\widehat{a}_{i(k)}}{\widehat{b}_{i(k)}}\right)^{-1}$, який вважатимемо збуреним до ГЛД (1). Нехай $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$, $\varepsilon^{(s)}$ – відносні похибки елементів $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, і підхідних дробів $f^{(s)}=a_0\left(b_0+\mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{s}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}$, $s=0,1,2,\ldots$, ГЛД (1) відповідно. Нехай області

$$\Omega_0=(0,+\infty)\times(\nu_0,+\infty)\,,\quad \Omega_{i(k)}=\Omega_k=\left(\mu_k^{(1)},\mu_k^{(2)}\right)\times\left(\nu_k^{(1)},\nu_k^{(2)}\right), \tag{2}$$

$i(k)\in I_k$, $k=1,2,\ldots$, де $\mu_k^{(1)}\geq 0$, $\mu_k^{(2)}>0$, $\mu_k^{(1)}<\mu_k^{(2)}$, $\nu_k^{(1)}>0, \nu_k^{(2)}>0$, $\nu_k^{(1)}<\nu_k^{(2)}$, є областями елементів ГЛД (1) та збуреного до нього ГЛД, тобто $\left(a_{i(k)},b_{i(k)}\right)\in\Omega_k$, $\left(\widehat{a}_{i(k)},\widehat{b}_{i(k)}\right)\in\Omega_k$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$.

Теорема. *Якщо відносні похибки елементів ГЛД задовольняють умови:* $\left|\alpha_{i(k)}\right|\leq\alpha<1$, $\left|\beta_{i(k)}\right|\leq\beta<1$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, *і існує скінченна границя*

$$\lim_{s\to+\infty}\sum_{k=1}^{s}\frac{\mu_k^{(2)}}{r_{k-1}^{(p(s,k-1))}r_k^{(p(s,k))}}\prod_{l=1}^{k-1}\left(1+\frac{\nu_{l-1}^{(1)}r_l^{(p(s,l))}}{N\mu_l^{(2)}}\right)^{-1},\ \textit{де}$$

$$r_k^{(p(s,k))}=\nu_k^{(1)}+\frac{N\mu_{k+1}^{(1)}}{\nu_{k+1}^{(2)}}+\frac{N\mu_{k+2}^{(2)}}{\nu_{k+2}^{(1)}}+\ldots+\frac{N\mu_{p(s,k)}^{(2)}}{\nu_{p(s,k)}^{(1)}},$$

$$p\,(s,k)=s+(-1)^{s+1}\left(s-k-2\left[(s-k)/2\right]\right),\quad 0\leq k\leq s,$$

то області (2) є областями відносної стійкості до збурень ГЛД (1) і для відносної похибки s *-го підхідного дробу справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right|\leq\alpha+(1+\alpha)\left(\frac{\beta}{1-\beta}+\frac{\alpha N}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{s}\frac{\mu_k^{(2)}}{r_{k-1}^{(p(s,k-1))}r_k^{(p(s,k))}}\prod_{l=1}^{k-1}\left(1+\frac{\nu_{l-1}^{(1)}r_l^{(p(s,l))}}{N\mu_l^{(2)}}\right)^{-1}\right).$$

Одержані результати застосовано до дослідження стійкості розвинень відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли N змінних у гіллясті ланцюгові дроби з додатними елементами.

e-mail: v_hladun@yahoo.com; hoyenko@lms.lviv.ua

Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для систем ЗДР другого порядку

Гнатів Л.Б.
(Національний університет "Львівська політехніка")

В роботі [1] для систем ЗДР другого порядку з похідною в правій частині запропоновані триточкові різницеві схеми (ТРС) високого порядку точності. Однак, побудова та обгрунтування цих схем проведена тільки для випадку, коли для розв'язування допоміжних задач Коші використовувався метод рядів Тейлора.

У цій роботі побудовано ТРС порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$- ціла частина, m - задане натуральне число) для систем ЗДР з умовами Діріхле

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right] = -\mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dx}\right), \quad x \in (0,1), \quad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{u}(1) = \boldsymbol{\mu}_2, \tag{1}$$

де матриця $K(x) = [k_{rs}(x)]_{r,s=1}^{n}$ і вектор-функція $\mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right) = \left\{f_r\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right)\right\}_{r=1}^{n}$ задовольняють умови

$$\begin{aligned} &K(x) = K^*(x), \quad k_{rs}(x) \in Q^1[0,1], \\ &c_1 \|\mathbf{u}\|^2 \le (K(x)\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le c_2 \|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall x \in [0,1],\ \mathbf{u} \in R^n, \quad c_1 > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &f_{r\mathbf{u}\xi}(x) \equiv f_r\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right) \in Q^0[0,1] \quad \forall \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \in R^n, \\ &f_{rx}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) \equiv f_r\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right) \in C(R^{2n}) \quad \forall x \in [0,1], \end{aligned} \tag{3}$$

$$\left|f_r\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right) - f_{0r}(x)\right| \le C_r\left(\sum_{p=1}^{n} |u_p|\right)\left[\, g_r(x) + |\xi_r|\,\right] \quad \forall x \in [0,1],\ \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi} \in R^n, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}\right) - \mathbf{f}\left(x, \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}\right), \mathbf{u} - \mathbf{v}\right) \\ &\qquad \le c_3\left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|^2\right) \quad \forall x \in [0,1],\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in R^n, \end{aligned} \tag{5}$$

$$0 \le c_3 < \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} c_1. \tag{6}$$

Тут $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — скалярний добуток в R^n, $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ — норма вектора, $Q^p[0,1]$ — клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно зі скінченним числом точок розриву першого роду, C_r — невід'ємна, неперервна функція, $f_{0r}(x) \in L_2(0,1), g_r(x) \in L_1(0,1), c_1, c_2, c_3$ — сталі.

Алгоритмічна реалізація запропонованих ТРС для кожного вузла сітки вимагає розв'язування двох нелінійних задач Коші на $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і $[x_j, x_{j+1}]$ (назад) за допомогою загальних однокрокових чисельних методів порядку точності $\bar{m}$.

В даній роботі отримано оцінку точності як по відношенню до розв'язку $\mathbf{u}(x)$ так і потоку $K\left(x\right)\dfrac{d\mathbf{u}}{dx}$.

1. Гнатів Л.Б., Кутнів М.В. Модифіковані триточкові різницеві схеми високого порядку точності для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з монотонним оператором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 32–42.

вул. Туркменська 13/2, Львів
e-mail: lyubomyr.gnativ@gmail.com

Сингулярно збурена спектральна задача Штурма-Ліувілля на зірковому графі з несамоспряженою граничною задачею

Головатий Ю.Д., Грабчак Г.Є.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай Γ – зірковий граф в $\mathbb{R}^2$, ребра (промені) γ якого – прямолінійні відрізки, що прилягають до вершини a – центру зірки. Центр помістимо в початок координат. Множину кінцевих точок променів, позначимо через $\partial\Gamma$. Через Γ_ε позначимо підрозбиття графа Γ точками перетину його ребер з колом радіуса ε з центром a. Це коло вирізає з Γ зірковий підграф s_ε з ребрами довжиною ε.

Ми вивчаємо асимптотику спектра крайової задачі

$$u_\varepsilon'' + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{на ребрах} \quad \Gamma; \quad \sum\nolimits_\gamma \frac{du_\varepsilon}{d\gamma}(a) = 0; \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma. \tag{1}$$

Крім цього в точках підрозбиття задано умови неперервності розв'язку і його перших похідних. Неперервність розв'язку задано ще й у вершині a. Тут λ^ε – спектральний параметр; $\frac{du_\varepsilon}{d\gamma}(a)$ – граничне значення в точці a похідної функції u_ε вздовж γ в напрямку від a; $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon^{-2} q_\varepsilon$, де ρ – гладка, обмежена, додатна на ребрах графа Γ функція; $q_\varepsilon \equiv 0$ всюди на Γ_ε, крім зірки s_ε, на якій вона має зображення $q_\varepsilon(x) = q(\varepsilon^{-1}x)$. Функція $q = q(\xi)$ – додатна, гладка і обмежена на ребрах графа $s \subset \mathbb{R}^2_\xi$ – образі s_ε при перетворенні $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Вважаємо, що у вершинах Γ_ε функція ρ_ε дорівнює нулю (відсутність приєднаних точкових мас). Задача (1) описує власні коливання в'язки струн із досить важким незакріпленим з'єднанням і є модельною для дослідження аналогічної задачі на загальному графі, реалізованому в $\mathbb{R}^3$. В [1] досліджено аналогічну задачу для струнних сіток в $\mathbb{R}^3$ з менш важкими з'єднаннями в незакріплених вузлах.

Досліджено асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень і власних функцій задачі (1), специфікою якої є багатократність власних значень. Побудовано граничну при $\varepsilon \to 0$ задачу, вивчено її спектральні властивості. Її спектром є об'єднання спектрів незбурених задач Діріхле на ребрах Γ та задачі Неймана на зірці s. Іншою особливістю є те, що, попри самоспряженість у відповідному гільбертовому просторі на Γ_ε збуреної задачі (1), гранична задача є несамоспряженою: наявні приєднані функції. Побудовано і обґрунтовано асимптотики власних значень і власних функцій задачі (1) при $\varepsilon \to 0$ у загальному випадку збурення кратного власного значення граничної задачі. Наведено приклади збурення власних значень різної алгебраїчної кратності, встановлено оцінки їх геометричної кратності, досліджено структуру кореневих підпросторів. Показано, що у жордановому зображенні граничного оператора довжина жорданових ланцюгів не перевищує 2, що дозволяє висловити гіпотезу про справедливість цього для задач на графах-деревах. Також показано, що довжина ланцюгів може бути більшою за 2, якщо крім променів Γ має петлі.

1. Головатий Ю. Д., Грабчак Г. Є. Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілля на геометричному графі зі збуренням густини в околі вузлів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С.66–83.

e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua; h_hrabchak@franko.lviv.ua

Про коректну розв'язність задачі Діріхле для еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі

Горбачук М.Л., Горбачук В.І.

(Інститут математики НАН України)

Розглядається задача

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$y^{(i)}(0) = f_i \in \mathfrak{H}^{p-i}(A), \quad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{2}$$

де B - позитивний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}^n(A)$ - шкала просторів Соболєва, побудована за оператором $A = B^{1/2}$.

Встановлюється, що множина розв'язків однорідної задачі (1)-(2) ($f_i = 0$, $i = 0, 1, ..., m-1$) утворює нескінченновимірний простір, а кожен розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції із значеннями у просторі цілих векторів оператора A. Проте у класі вектор-функцій, для яких на нескінченності виконується оцінка

$$\|y(t)\| \le e^{\omega t},$$

де $\omega < -\omega(A)$, $\omega(A)$ - тип півгрупи $\left\{e^{-tA}\right\}_{t \ge 0}$, однорідна задача (1)-(2) має лише тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$. У цьому класі неоднорідна задача (1)-(2) однозначно розв'язна, а її розв'язок $y(t)$ є таким, що $y^{(i)} \in C([0, \infty), \mathfrak{H}^{p-i})$.

Відмітимо, що зазначені результати навіть у випадку $m = 1$ уточнюють результати попередників, що стосуються розв'язності задачі Діріхле для еліптичного диференціального рівняння другого порядку у банаховому просторі.

вул. Плеханова 6, кв. 158, Київ, 02002

e-mail: imath@horbach.kiev.ua

Двоточкова задача для одного класу параболічних псевдодиференціальних рівнянь

Городецький В.В.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)
Дрінь Я.М.
(Чернівецький торговельно-економічний інститут)

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню нелокальних багатоточкових крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. Це зумовлено тим, що багато задач практики моделюється крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами (теорія фізики плазми, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль у прямокутних хвилеводах, обернені задачі для рівняння теплопровідності тощо). За останні 40 років нелокальні задачі задачі для рівнянь із частинними похідними вивчали в різних аспектах багато вчених (О.О.Дезін, В.М.Борок, В.К.Романко, О.А.Самарський та ін.), виділяючи переважно випадки коректно поставлених задач. Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі (зокрема, двоточкова задача) у всьому просторі та в циліндричній області досліджені в [1].

У даній роботі вивчається двоточкова задача для рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де $A = F^{-1}[aF]$ – псевдодиференціальний оператор (ПДО), побудований за сталим однорідним символом, недиференційовним у точці 0, який задовольняє умови параболічності [2]. Теорія ПДО з негладкими однорідними символами має важливі застосування в теорії випадкових процесів, теорії фракталів, квантовій теорії поля, теорії турбулентності. Тут досліджені властивості фундаментального розв'язку двоточкової задачі для вказаного рівняння, встановлено коректну розв'язність такої задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу розподілів.

1. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
2. Дрінь Я.М. Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198 – 203.

вул. Гете 5, кв. 3, Чернівці, 58000
e-mail: drin@chtei.cv.ua

Двоточкова задача для одного класу еволюційних сингулярних рівнянь

Городецький В.В., Мироник В.І.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай $\mathbb{R}_+^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $\Omega_+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+^n$, T – фіксоване додатне число, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\mathcal{D}_x^k = \mathcal{D}_{x_1}^{k_1} \cdots \mathcal{D}_{x_n}^{k_n}$, якщо $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – фіксовані числа з множини $(1; +\infty) \setminus \{2, 3, 4, ...\}$, $\nu_1, ..., \nu_n$ - фіксовані числа з множини $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\}$; $p_{0,i} := 2\nu_i + 1$, $\gamma_{0,i} := 1 + [\gamma_i] + p_{0,i}$, $M_i(x_i) = 1 + |x_i|$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Символом $\Phi(\mathbb{R}^n)$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, які задовольняють нерівності $|\mathcal{D}_x^k \varphi(x)| \equiv \left| \frac{\partial^{|k|} \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^{k_1} \dots \partial {x_n}^{k_n}} \right| \le \frac{c_k}{M_1(x_1)^{\gamma_{0,1}+k_1} \dots M_n(x_n)^{\gamma_{0,n}+k_n}}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

$\Phi(\mathbb{R}^n)$ – повний досконалий зліченно нормований простір [1].

Символом $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ позначатимемо сукупність усіх парних по кожній змінній функцій з простору $\Phi(\mathbb{R}^n)$ з відповідною топологією. На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначене перетворення Бесселя F_B. Перетворення F_B взаємно однозначно і взаємно неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ на $\overset{\circ}{\Psi}(\mathbb{R}^n) := F_B[\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)]$. Символом $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Нехай $a_1(x_1), \dots, a_n(x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, – невід'ємні, неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, однорідні порядку $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ відповідно, які задовольняють певні умови. Тоді у просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ визначений, є лінійним і неперервним псевдо-Бесселевий оператор $A = F_B^{-1}[a_1(\xi_1) \dots a_n(\xi_n) F_B]$.

Нехай $f(x) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} c_k x^k, k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Введемо позначення: $\psi(x) \equiv (f(A)\varphi)(x) := \sum\limits_{|k|=0} c_k (A^k \varphi)(x)$, $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, . Якщо при цьому $\psi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$, то говоритимемо, що в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ задано псевдо-Бесселевий оператор нескінченного порядку $f(A) := A_f$.

Розглянемо двоточкову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \ (t, x) \in \Omega_+, \tag{1}$$

$$\mu_1 u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t, \cdot)|_{t=T} = \varphi, \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

(μ_1, μ_2 – фіксовані параметри; $\mu_1 > \mu_2 > 0$). Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T), \overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))$ задачі (1), (2) має вигляд: $u(t,x) = \varphi(x) * G(t,T,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$.

Символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n))'$, які є згортувачами в просторі $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbb{R}^n)$.

Тут встановлюється коректна розв'язність двоточкової задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + f(A)u = 0$ у випадку, коли крайова умова є узагальненою функцією скінченного порядку.

Теорема. *Двоточкова задача коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$. Розв'язок подається у вигляді згортки$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x)$, $\varphi \in (\overset{\circ}{\Phi}_*(\mathbb{R}^n))'$, $(t,x) \in \Omega_+$, де G – ФРЗД рівняння (1).*

1. Городецький В.В., Ленюк О.М. Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами // Доповіді НАН України. – 2007. – N8. – С.11-15.

e-mail: vadmyron@yandex.ru

Збіжність одного агрегаційно-ітеративного методу

Гошко З.О., Кутень А.С.
(Національний університет "Львівська політехніка")
Шувар О.Б.
(Експресбанк)

Для дослідження збіжності агрегаційно-ітеративних методів, які охоплюють однопараметричні та багатопараметричні методи ітеративного агрегування, в одному винятковому випадку, відомому як однопараметричний метод, який характеризується вибором a_n за формулою $a_n = Ax_n/(\varphi, x_n)$, де φ – лінійний функціонал, встановлені в [1, с. 155–156] умови збіжності, серед яких фігурують вимоги додатності A та b і нерівність $\rho(A) < 1$.

Для апроксимації розв'язку лінійного рівняння $x = Ax+b$ у банаховому просторі E, на основі запропонованої в [2] методики досліджуємо агрегаційно-ітеративний алгоритм вигляду

$$x_{n+1} = Ax_n + b + a_n(y_n - y_{n+1}),$$

$$y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} - SAx_n - Sb + \alpha_n(y_n - y_{n+1}) + \Lambda Sx_n,$$

де оператори $a_n : E' \to E$, $\alpha_n : E' \to E'$, $S : E \to E'$, задані, взагалі кажучи, довільним способом, задовольняють умову $Sa_n + \alpha_n = \Lambda\,(n = 0, 1, ...)$, а для початкових наближень $x_0 \in E$, $y_0 \in E'$ маємо $Sx_0 + y_0 = \theta'$. Тут θ' – нульовий елемент в E', E' – банахів простір, який може не співпадати з E. Встановлені достатні умови збіжності алгоритму, які не містять вимог про знакосталість A та b і не потребують, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(A)$ оператора A. Досліджуваний алгоритм як в однопараметричному так і в загальному випадку можна трактувати з погляду проекційно-ітеративних методів. Однак, за вибору a_n, наприклад, за згаданою однопараметричною формулою досліджуваний алгоритм, на відміну від досліджених в [3, 4] проекційно-ітеративних методів, задає спосіб вибору проекційного оператора на кожному кроці ітеративного процесу.

1. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. – М.: Мир. – 1985. – 263 с.
2. Шувар Б.А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования. Вестник Львовского политехнического института. – Львов: 1989. – С. 140–142.
3. Лучка А.Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – 127 с.
4. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук.думка, 1968. – 243 с.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: mymailbox_123@mail.ru

Обернена задача для параболічного рівняння з довільним слабким виродженням в області з вільною межею

Гринців Н.М.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Обернені задачі для параболічних рівнянь зі слабким та сильним степеневим виродженням в областях з вільними межами розглядались в [1], [2]. У даній роботі в області з вільною межею досліджується обернена задача для параболіч- ного рівняння, старший коефіцієнт якого довільним чином прямує до нуля при $t \to 0$.

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $h = h(t)$ розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3}$$

та додатковими умовами

$$a(t)\psi_0(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Відносно функції $\psi_0(t) > 0$, $t \in (0,T]$ припускається, що інтеграл $\int_0^t \left(\int_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau$ прямує до нуля при $t \to 0$. Під розв'язком задачі (1) - (5) розуміється трійка функцій $(a,h,u) \in C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, де $a(t) > 0$, $h(t) > 0, t \in [0,T]$, яка задовольняє рівняння (1) та умови (2) - (5).

На основі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови локального за часом існування розв'язку задачі (1) - (5). При доведенні єдиності розв'язку використовуються властивості систем однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості.

1. Гринців Н.М. Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею// Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 45–59.
2. Гринців Н.М. Про єдиність розв'язку оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння в області з вільною межею// Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12, вип.7. Матем. і мех. – С. 19–35.

вул. Роксоляни 18, кв. 88, Львів, 79052
e-mail: Hryntsiv@ukr.net

Одне узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора

Грушка Я.І.
(Інститут математики НАН України)

Нехай A — замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в комплексному банаховому просторі $(\mathfrak{X}\,\|\cdot\|)$. Через $C^\infty(A)$ та $\mathfrak{E}(A)$ будемо позначати відповідно множини *нескінченно диференційованих* векторів та *цілих векторів експоненціального типу* оператора A, тобто:

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n), \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\};$$

$$\mathfrak{E}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{E}^\alpha(A), \quad \text{де}$$

$$\mathfrak{E}^\alpha(A) = \left\{x \in C^\infty(A)\,|\,\exists c = c(x) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0\ \left\|A^k x\right\| \le c\alpha^k\right\},\ \alpha > 0.$$

Теорема 1. *Нехай*

1. $\{T(t) : t \ge 0\}$ — півгрупа класу C_0 в банаховому просторі $\mathfrak{X}$ з генератором A.

2. Множина $\mathfrak{E}(A)$ цілих векторів експоненціального типу оператора A всюди щільна в $\mathfrak{X}$.

Тоді, якщо існує вимірна, за Лебегом, функція $\beta : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, така, що:

$$\beta(t) \ge 0,\ t > 0; \quad \frac{\beta(t)}{t} \to 0,\ t \to +0, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, \|T(t) - T(\beta(t))\| < 1, \tag{2}$$

то генератор A — обмежений.

Зауваження 1. У випадку $\beta(t) \equiv 0$, $t \in [0,\infty)$, теорема 1 відома як *теорема про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора*, і в цьому випадку вона є правильною для довільної півгрупи класу C_0 в просторі $\mathfrak{X}$. Отже, на теорему 1 можна дивитись, як на певне узагальнення теореми про рівномірну збіжність півгрупи до одиничного оператора.

У частинному випадку, коли $\{T(t) : t \ge 0\}$ — C_0-півгрупа з нормальним генератором в (комплексному) гільбертовому просторі, теорема 1 була доведена в роботі [1].

1. Grushka Ya.I. On the Uniform Convergence Theorem of Semigroups // Operator Theory Advances and Applications, vol. 118. – Proceedings of the Mark Krein International Conference on Operator Theory and Applications. – Volume II : Birkhauser Verlag. – Bassel – Boston – Berlin, 2000. – P. 177–179.

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3, Київ-4, 01601
e-mail: grushka@imath.kiev.ua.

Скінченно-граничноелементні схеми методу декомпозиції області для локально нелінійних задач міцності багатошарових композитів

Дияк І.І., Макар І.Г., Прокопишин І.І.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Розглядається проблема дослідження концентрації напружень в багатошарових композитах з локальною нелінійністю, зумовленою властивостями матеріалів, пластичною течією в області дефектів, або умовами одностороннього контакту. Для розв'язування відповідних крайових задач за умов плоскої деформації використано метод декомпозиції області (МДО), який зводить розв'язування вихідної задачі до розв'язування крайових задач для окремих підобластей з простою геометрією чи властивостями. Це дозволяє використати оптимальні чисельні методи для кожної з підобластей.

Для розв'язування плоских задач пружно-пластичостичності шаруватих композитів розроблено ітераційні схеми МДО із використанням гетерогенних скінченно-граничноелементних апроксимацій. У підобластях можливих пластичних деформацій розв'язок отримано на основі моделі пластичної течії [2] методом скінченних елементів(МСЕ). У інших підобластях використано гомогенізовану модель теорії пружності з мікролокальними параметрами [3] та симетричний варіант прямого методу граничних елементів(МГЕ). Для випадку несумісних сіток на межі підобластей запропоновано схему методу мортарних елементів.

На основі варіаційного принципу Лагранжа зі штрафом та загальних ітераційних методів розв'язування варіаційних рівностей побудовано та обґрунтовано на континуальному рівні паралельні схеми МДО для розв'язування контактних задач теорії пружності без тертя для багатьох тіл. Проведено числовий аналіз цих схем для задачі контакту двох багатошарових композитних плит з використанням МСЕ. Досліджено вплив величини параметра штрафу на розв'язок, швидкість збіжності ітераційних схем та її залежність від величини ітераційних параметрів, збіжність по сітці МСЕ.

Чисельний аналіз ряду модельних задач підтверджує високу ефективність запропонованого підходу.

1. Дияк І., Макар І., Прокопишин І. Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій задач теорії пружності на підставі методу декомпозиції області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2007. – Вип. 12. – С. 93–100.
2. Crisfield M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. – Chichester: John Wiley & Sons, 2000
3. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., Petrowski D. M. On displacements and stress in a semi-infinite laminated layer: comparative results // Meccanica. – 2007. – Vol. 42. – P. 117–126.

Факультет прикладної математики та інформатики
Львівський національний університет ім. І. Франка
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: dyyak@franko.lviv.ua

Застосування фізичних маятників для гасіння коливань подовгастих елементів

Дівеєв Б.М., Грицай В.Я., Коваль Т.Б.
(Національний університет "Львівська політехніка")
Щербина Н.М. (ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Важливим питанням розробки сучасних колісних машин, висотних споруд є зменшення коливань. Традиційні методи віброізоляції часто стають недостатньо ефективними, особливо для такого класу машин, як обприскувачі з великогабаритною штангою, пересувні бурові установки, пожежні машини з великогабаритною стрілою, висотні споруди ... . Ефективним у даному випадку може стати застосування динамічного гасника коливань (ДГК) [1, 2]. Для гасіння коливань такого типу об'єктів у низькочастотному діапазоні широке застосування знаходять ДГК маятникового типу [3,4]. У [5-8] запропоновано адаптивний метод розрахунку складних конструкцій з використанням МСК на початковому етапі для визначення форм та частот коливань елементів конструкцій, які моделюються континуальними схемами. Цей спосіб дозволяє отримувати малопараметричні доступні для аналізу моделі. Запропоновані дві розрахункові схема взаємодії подовгастого континуального елементу з дискретними: 1) подовгастий елемент моделюється як балка Тимошенка змінного перерізу; 2) розглядаються подовгасті жорсткі масивні елементи, з'єднані пружними елементами. Отримані малопараметричні розрахункові схеми, що дозволяють аналізувати вплив параметрів конструкції на її нелінійну динамічну поведінку, в тому числі на динамічну стійкість.

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.– М.: Наука, 1967. – 444с.
2. Den Hartog, J. P. (1956), Mechanical Vibrations (4th edition) Mc Graw-Hill, New York.R.A.
3. R.A. Ibrahim. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. Journal of Sound and Vibration 314 (2008) 371–452.
4. O. Fischer Wind-excited vibrations—Solution by passive dynamic vibration absorbers of different types. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 95 (2007) 1028–1039.
5. Дівеєв Б.М. Інженерні проблеми оптимального проектування обприскувачів. // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: Пр. I–ї Міжнар. наук.-техн. конф. (DSR AM - I). – Тернопіль: ТДТУ, 2004. – С. 451–457.
6. Дівеєв Б.М., Дорош І.Р. Проблеми оптимального проектування штанг штангових обприскувачів // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів. – № 40, 2006. – С.105–111.
7. Дівеєв Б.М., Дорош І.А. Проблеми віброзахисту та динамічної стабілізації у штангових обприскувачах. // Всеукр. наук.-техн. журнал "Вібрації в техніці та технологіях". -– Вінниця: ВДАУ, 2006. – № 1 (43). – С. 27–29
8. Дівеєв Б.М., Коваль Т.Б., Бутитер І.Б. Динамічні гасники коливань у машинах з гнучкими подовгастими елементами. // Вібрації в техніці та технологіях. – №1(46), 2007. – С. 76–79.

вул С. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: divboglviv@yahoo.com

Нелінійні еластичні елементи у комплексній шумовіброзахисній схемі колісних машин

Дівеєв Б.М., Завербний А.Р., Костюк В.В., Смольський А.Г.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Малогабаритні еластичні елементи (МЕЕ) широко застосовуються у схемах вібро-та шумозахисту машин. Для моделювання технологічних процесів, що відбуваються за допомогою транспортних засобів, зокрема за допомогою колісних машин, розроблено ряд моделей [1]. Частий недолік традиційних моделей – недостатнє вивчення взаємозв'язку між великогабаритними елементами (корпусом, рамою) та МЕЕ (гумові амортизатори, пневмобалони, еластичні прокладки) що демонструють суттєво нелінійні механічні властивості. В даній роботі розглянуто клас дискретно-континуальних моделей [2-4], які дозволяють більш гнучко моделювати ці процеси. Отримані малопараметричні математичні моделі дозволяють не лише адекватно відображати перебіг динамічних процесів у агрегатах, але й достатньо швидко отримувати оптимальні проекти. Застосовано наступний метод декомпозиції: розіб'ємо множину елементів конструкції машини на дві множини: множину вузлів з'єднань (МЕЕ) та множину континуальних елементів. Для кожного континуального елемента виберемо систему координатних функцій з довільного ряду ортогональних за кінетичною енергією функцій. Тоді переміщення довільної точки елемента будуть сумами множників довільних часових функцій на задані координантні. Для оптимізації застосовувався генетичний алгоритм багатопараметричної оптимізації [5]. При невідомих динамічних характеристиках конструкції, коли можлива присутність резонансних частот у заданому діапазоні, цільова функція при оптимізації задавалася як деяке усереднене амплітудне значення на деякому частотному діапазоні, зазвичай центрованому або відносно резонансної частоти системи або відносно частоти основної гармоніки зовнішнього навантаження. При розрахунку та оптимізації враховувалася нелінійна динамічна поведінка системи, викликана нелінійними влакстивостями МЕЕ.

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.– М., Наука, 1967 –444с.
2. Дівеєв Б., Вікович І., Сухорольський М., Дубневич О. Розрахунок та оптимізація причепа з підвіскою змінної жорсткості. // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: Пр. I–ї Міжн. наук.-техн. конф. (DSR AM - I), 4 – 7 жовтня 2004 р., – Тернопіль: Терн. держ. техн. ун-т, 2004. – С. 458 – 463.
3. Б.М.Дівеєв Раціональне моделювання динамічних процесів у складних конструкціях // Вісн. НУЛП Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів. – № 41, 2007. – С. 103–108.
4. Дівеєв Б.М., Вітрух І.П., Смольський А.Г. Проектування системи гасників коливань для транспортних засобів // Вібрації в техніці та технологіях. – №3(48), 2007. – С. 37–41.
5. Goldberg, D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. – Addison-Wesley, 1989.

вул С. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: divboglviv@yahoo.com

Розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду за допомогою ланцюгових дробів

Дідак В.М., Пелех Я.М., Свізінський В.П.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Задачі гідроакустики, кінетики, електроніки, автоматичного управління, багатовимірної оптимізації приводять до необхідності розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} F[x, y, f(y)]dy, x \in I_L, \tag{1}$$

де функція $F[x, y, f(y)]$ володіє необхідною для обчислень гладкістю.

В обчислювальній математиці знаходять широке застосування ланцюгові (неперервні) дроби, у зв'язку з їх важливим теоретичним і прикладним значенням. При відповідних умовах, використання апарату ланцюгових дробів дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, сприяє обмеженому накопиченню похибок заокруглення і зменшенню кількості операцій при розрахунку на ПЕОМ. Апарат ланцюгових дробів є одним з основних джерел отримання дробово-раціональних наближень функцій, які використовуються в сучасному забезпеченні ПЕОМ. Значне підвищення інтересу до ланцюгових дробів пов'язане ще з тим, що процес їх обчислень є циклічним і легко піддається програмуванню на ПЕОМ.

Дане повідомлення присвячене застосуванню неперервних дробів для побудови нових числових методів розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при відповідних значеннях параметрів, які входять у запропоновані обчислювальні схеми, можна отримувати як нові, так і традиційні числові методи розв'язування інтегральних рівнянь (1).

Побудовано явні методи типу Рунге-Кутта другого та третього порядку точності для наближеного розв'язування рівняння (1). На відповідних класах функцій виведені двосторонні формули, які дозволяють знаходити не тільки верхнє та нижнє наближення до точного розв'язку, але й отримувати гарантовану оцінку похибки на кожному кроці без додаткових звертань до правої частини інтегрального рівняння (1).

Використовуючи модифіковане перетворення Фельберга та неперервні дроби, побудовано методи $(m+2)$-го та $(m+3)$-го порядку точності для знаходження наближеного розв'язку рівняння (1). Виведено співвідношення та знайдено значення відповідних параметрів, що визначають множини двосторонніх формул типу Рунге-Кутта-Фельберга $(m+2)$-го порядку точності.

Запропоновано числові методи розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах.

вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

Простори типу Лоренца ультрагладких векторів замкнених операторів

Дмитришин М.І.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з нормою $\|.\|$; $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — необмежений замкнений лінійний оператор із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Для будь-якого числа $\nu > 0$ і довільної послідовності додатних чисел $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ розглянемо послідовність $\{\mu_k^{-1}(A/\nu)^k x\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in \mathcal{D}(A^{\infty}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^k)$. Надалі покладаємо $x_k \equiv \mu_k^{-1}(A/\nu)^k x$ і нехай $\{x_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність, яка складається з тих самих елементів, розміщених в порядку незростання норм $\|x_0^*\| \geq \|x_1^*\| \geq \ldots \geq \|x_k^*\| \geq \ldots$.

Для довільних чисел $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ визначимо простори вигляду

$$\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^{\infty}) : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k-1}^*\|^q k^{\frac{q}{p}-1}\Big)^{1/q} < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}_{p,\infty}^{\nu}(A) \equiv \Big\{x \in \mathcal{D}(A^{\infty}) : \|x\|_{\mathcal{E}_{p,\infty}^{\nu}(A)} = \sup_k \|x_{k-1}^*\| k^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Простори $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A)$ назвемо *просторами типу Лоренца ультрагладких векторів оператора* A. При $p = q$ отримуємо відомі простори $\mathcal{E}_{p,p}^{\nu}(A) = \mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ ультрагладких векторів [1]. Якщо $\mu_k \equiv 1$, то $\mathcal{E}_p^{\nu}(A)$ — простір векторів експоненціального типу оператора A [2].

Встановлено інтерполяційні властивості просторів $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(A)$, а також, породжених ними, апроксимаційних просторів. Отримано нерівності, які з використанням квазінорм апроксимаційних просторів оцінюють мінімальну відстань від заданого вектора до підпростору типу Лоренца ультрагладких векторів з фіксованими індексами. За умови щільності множини ультрагладких векторів показано розклад банахового простору в ряди інваріантних підпросторів типу Лоренца.

1. Лопушанський О.В. Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, №4. С. 502–513.
2. Радыно Я.В. Пространство векторов экспоненциального типа// Доклады АН БССР. 1983. Т. 27, №9. С. 791–793.

e-mail: m_dmytryshyn@hotmail.com

Нелокальна багатоточкова задача для параболічних псевдодиференціальних рівнянь зі сталим символом

Дрінь М.М.

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Дрінь Я.М.

(Чернівецький торговельно-економічний інститут)

В шарі $\Pi = (0,T) \times E_n$ розглянемо крайову задачу для параболічного псевдодиференціального рівняння

$$\partial_t u + Au = f, \quad (t,x) \in \Pi,$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(t,x)|_{t=t_k} + \varphi(x), x \in E_n, \mu \in E_1, \tag{1}$$

$0 < t_1 < \ldots t_m = T$, $\nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m = 1$, A – ПДО, побудований за однорідним по σ степеня $\gamma \geq 1$ символом a: $\Pi \to E_1$, визначена в [1]. Задача (1) для $m = 1$ вивчена в [1].

Теорема. *Нехай виконуються умови: 1) φ: $E_n \to E_1$, $\varphi \in C(E) \bigcap L_1(E_n)$; 2) f: $\Pi \to E_1$, $f \in C(0,T) \bigcap C_2^\alpha(E_n) \bigcap L_1(E_n)$, $\alpha \geq (n-1)/\gamma$, $n > 1$ [2], $|\mu| > 1$ при $n \geq 1$, $\mu = 1$ при $n > \gamma \geq 1$. Тоді розв'язок задачі (1) визначається сумою згорток*

$$u(t,x) = \int G(t, x-\xi; \mu, \nu)\varphi(\xi)d\xi + \mu \int_0^t d\tau \int G(t-\tau, x-\xi; \mu, \nu) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \nu_k \int_t^{t_k} d\tau \int G(t + t_k - \tau, x - \xi; \mu, \nu) f(\tau, \xi) d\xi, \tag{2}$$

де $G(x-\xi, t; \nu, \mu) \equiv (2\pi)^{-n} \int \exp\{i(x-\xi, \sigma) - a(\sigma)t\} \left\{ \mu - \sum_{k=1}^{m} \nu_k \exp\{-a(\sigma)t_k\} \right\} d\sigma.$

Інтеграли в (2) збігаються рівномірно і абсолютно в Π при $\mu > 1$ і $\mu < 0$. Якщо $\mu = 1$, то вони рівномірно збіжні лише при $n > \gamma \geq 1$.

Аналогічна теорема є вірною для задачі (1) з умовами Неймана і псевдодиференціальними крайовими умовами.

1. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **51**, № 5. – С. 909 – 934.
2. Корбут Л.І., Матійчук М.І. Про зображення розв'язків нелокальних задач для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947 – 951.
3. М.Дрінь, Я.Дрінь. Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь. – Міжнародна наукова конференція "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (1 – 5 жовтня 2001 р., м. Дрогобич). – Тези доп. – Київ, 2001. – С. 56.

вул.Гете 5, кв. 3, Чернівці, 58000

e-mail: drin@chtei.cv.ua

Про квазіперіодичні розв'язки лінійних вироджених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Єрьоменко В.О.
(Тернопільський національний економічний університет)

Для системи диференціальних рівнянь виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \omega, \\ A(\varphi)\ddot{x} + B(\varphi)\dot{x} + C(\varphi)x = f(\varphi), \end{array} \right. \tag{1}$$

де $\varphi \in R^m$, $x \in R^1$, вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)'$ складається із неспіврозмірних чисел, $A, B, C, f \in C^r(\mathcal{T}_m)$, $\mathcal{T}_m = [0, 2\pi] \times \ldots \times [0, 2\pi]$, крапка означає диференціювання по незалежній змінній t, штрих — операцію транспонування, $A(\varphi)$ набирає нульове значення на множині довільної структури, змінюючи знак; досліджується задача про існування гладких квазіоперіодичних розв'язків для довільної неоднорідності $f(\varphi)$.

Нехай $C(\varphi) \neq 0 \ \forall \ \varphi \in \mathcal{T}_m$. Тоді система (1) рівносильна системі

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \omega, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2(\varphi) \end{pmatrix} \dot{X} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & -a_1(\varphi) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ g(\varphi) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \tag{2}$$

де $a_2 = AC^{-1}$, $a_1 = BC^{-1}$, $g = fC^{-1}$, $X = (x, \dot{x})'$. Знайдені невироджені двовимірні квадратні матриці $V(\varphi, z)$ та $W(z)$ такі, що внаслідок множення зліва другого рівняння системи (2) на $V(\varphi, z)$ та заміни $X = W(z)Y$ отримується система рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \omega, \\ \begin{pmatrix} 1 + a_2 z & a_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \dot{Y} = \begin{pmatrix} z + a_2 z^2 & 1 - a_1 \\ 0 & -(a_1 + a_2 z) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}, \end{array} \right. \tag{3}$$

де $z(\varphi)$ — розв'язок скалярного виродженого рівняння Ріккаті

$$a_2(\varphi)\dot{z} + a_1(\varphi)z + a_2(\varphi)z^2 + 1 = 0. \tag{4}$$

Доводиться, що існують додатні числа α_2, α_1 такі, що коли $|a_2(\varphi)| \leqslant \alpha_2$, $|a_1(\varphi)| \geqslant \alpha_1$, то рівняння (4) має розв'язок $z_0(\varphi) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_m)$, $z_0(\varphi) \neq 0$, друге рівняння системи (3) — розв'язок $Y_0(\varphi) \in C^{r-2}(\mathcal{T}_m)$.

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304с.

вул. Золотогірська 13/8, Тернопіль, 46012
e-mail: eba2008@ukr.net

Регулярне зростання цілих функцій нульового порядку

Заболоцький М.В., Борова О.І.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай f – ціла функція нульового порядку, $f(0) = 1$, $n(r, \alpha, \beta)$ – кількість нулів a_j функції f в секторі $\{z : |z| \leq r, \alpha < \arg z \leq \beta\}$, $\ln f$ є однозначною віткою Lnf в області $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \{z : |z| \geq |a_j|, \arg z = \arg a_j\}, \ln f(0) = 0, v(r) = r^{\lambda(r)}$, де $\lambda(r)$ уточнений порядок функції $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$. Промінь $\arg z = \theta$ є звичайним, якщо

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \, n(r, \theta - h, \theta + h)/v(r) = 0.$$

В [1] представлено нове поняття регулярного зростання цілих функцій нульового порядку. Будемо говорити, що функція f має сильно регулярне зростання (с.р.зр.) якщо для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi)$ промені $\arg z = \theta$ є звичайними і виконується

$$\lim_{r \to \infty, r \notin E} \{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)\}/v(r) = H_f(\theta),$$

де E деяка множина відносної міри нуль і $N(r) = \int_0^r n(t)/tdt$.

Будемо говорити, що множина нулів цілої функції має кутову щільність, якщо границя $\lim_{r \to \infty} n(r, \alpha, \beta)/v(r)$ існує для всіх α, β за винятком, можливо, зліченної множини.

Для цілих функцій f нульового порядку з нулями на скінченній системі променів $\arg z = \theta_j, j = 1, ..., k$. встановлено необхідні і достатні умови с.р.зр. в термінах кутової щільності її нулів; коефіцієнтів Фур'є функції $\ln f$; асимптотики логарифмічної похідної f.

1. Заболоцкий Н. В. Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Мат. заметки. – 1998. – Т. 63, №2, с.196-208.

вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: zabol@franko.lviv.ua

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах

Загороднюк А.В.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

В доповіді буде розглянуто різні алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на банахових просторах і досліджено множини максимальних ідеалів (спектр) цих алгебр, диференціювання та гомоморфізми на цих алгебрах, аналоги проблеми про корону та інші питання.

Основний результат доповіді полягає в тому, що спектр алгебри $H_b(X)$ цілих аналітичних функцій комплексного банахового простору X можна подати у вигляді лінійного простору послідовностей $(u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots)$, де кожен елемент u_k належить підпростору E_k лінійних функціоналів на просторі всіх неперервних n-однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$ на X. При цьому всі елементи з E_k є бі-ортогональними до всіх звідних поліномів з $\mathcal{P}(^n X)$. Простори E_k є замкненими (і, отже, банаховими) підпросторами. Послідовність $\mathfrak{u} = (u_k)_{k=1}^{\infty}$ породжує елемент спектру (лінійний мультиплікативний функціонал) алгебри $H_b(X)$ за формулою

$$\phi = \mathop{\circledast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k)$$

тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_k \|u_k\|^{1/k} < \infty$. В цьому випадку

$$\sup_k \|u_k\|^{1/k} \le R(\phi) \le e \sup_k \|u_k\|^{1/k},$$

де $R(\phi)$ – радіус-функція функціонала ϕ.

Вказані результати дають відповіді на питання, поставлені у роботах [1,2] і продовжують дослідження [3,4].

1. R.M. Aron, B.J. Cole, and T.W. Gamelin, Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.
2. R.M. Aron, B.J. Cole, and T.W. Gamelin, Weak-star continuous analytic funtions, Can. J. Math. **47** (1995), 673–683.
3. A. Zagorodnyuk, Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559–2569.
4. A. Zagorodnyuk, Spectra of Algebras of Analytic Functions and Polynomials on Banach Spaces, Contemporary Math. **435** (2007), 381-394.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76025
e-mail: andriyzag@yahoo.com

Опис ізоморфізмів, переставних з узагальненим інтегруванням Гельфонда-Леонтьєва

Звоздецький Т.І.

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Для $i = 1, 2$ розглянемо числа $\varrho_i > 0$ і $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_i > 0$), зіркову відносно нуля область $G_i \subseteq \mathbb{C}$ та оператор $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в $\mathcal{A}(G_i)$, який на функцію $f \in \mathcal{A}(G_i)$ діє за правилом [1]

$$(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} f)(z) = \frac{z}{\Gamma\left(\frac{1}{\varrho_i}\right)} \int\limits_0^1 t^{\mu_i - 1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho_i}-1} f\left(zt^{\frac{1}{\varrho_i}}\right) dt,$$

де $\mathcal{A}(G_i)$ – це простір усіх аналітичних в області G_i функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Дане повідомлення стосується опису всіх ізоморфізмів $T:\ \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$, які задовольняють операторне рівняння

$$T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} T. \tag{1}$$

Відзначимо, що коли $G_1 = G_2 = K_R = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < R\}$, $(0 < R \le +\infty)$, то ізоморфізми відповідного простору $\mathcal{A}(K_R)$, переставні зі звичайним інтегруванням, описані в [2], а ізоморфізми, переставні з оператором узагальненого інтегрування (для досить широкого класу таких операторів), описані в [3]. Крім цього, коли $G_1 = G_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$ і $\mu_1 = \mu_2$, то дана задача розв'язана в [4].

У [4] була побудована неперервна згортка $*$ для оператора $\mathcal{I}_{\varrho,\mu}$ в $\mathcal{A}(G)$ виду

$$(\varphi * f)(z) = \varphi(0) f(z) + \frac{z}{\varrho\Gamma(\mu)} \int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho}-1} \left(A_{\varrho,\mu}\varphi\right)' \left(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho}}\right) f\left(zt^{\frac{1}{\varrho}}\right) dt,$$

де $A_{\varrho,\mu}$ – ізоморфізм простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, причому

$$(A^{-1}_{\varrho,\mu} f)(z) = \left(\frac{\mu}{\Gamma(\mu)} + \frac{z}{\varrho\Gamma(\mu)}\frac{d}{dz}\right) \int\limits_0^1 (1-t)^{\mu-1} f(zt^{\frac{1}{\varrho}}) dt.$$

Теорема. *Ізоморфізм* $T:\ \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$ *є розв'язком операторного рівняння (1) тоді й лише тоді, коли* $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $G_1 = G_2 = G$ *і* T *подається у вигляді* $Tf = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)}[\varphi * (Bf)]$, *де оператор* B *визначається формулою* $Bf = A^{-1}_{\varrho,\mu_2} A_{\varrho,\mu_1} f$, *а* $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, *причому* $\varphi(0) \ne 0$.

1. Dimovski I.H., Kiryakova V.S. Convolution and commutant of Gelfond-Leontiev operator of integration // Конструктивная теория функций: Труды междунар. конф. (Варна, 1-5 июня, 1981). – София, 1983. – С. 288–294.
2. Нагнибида Н.И. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 6. – С. 888–999.
3. Царьков М.Ю. Изоморфизмы аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора обобщенного интегрирования // Теор. функц., функц. анализ и их прилож. – 1971. – Вып. 13. – С. 54–63.
4. Линчук Н.Е. Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 5. – С. 72–74.

e-mail: taras_zv@ukr.net

О кратности непрерывных отображений областей

Зелинский Ю.Б.
(Інститут математики НАН України)

Будет показано, что собственное отображение области n-мерного многообразия на область другого n-мерного многообразия степени k на открытой порции границы будет или внутренним отображением на $\operatorname{Int} D$, или существует точка в образе, имеющая не меньше $k+2$ прообраза.

Теорема. *Пусть $f : D \to D_1$ — непрерывное отображение областей такое, что:*

1) для некоторой открытой порции U границы ограничение $f_U : U \to f(U)$ будет k-кратным накрывающим отображением;

2) $f(\partial D) \cap f(D) = \emptyset$;

3) $f(U) \cap f(\partial D \setminus U) = \emptyset$.

Тогда либо f внутреннее отображение, либо существует точка, имеющая не менее чем $k+2$ прообраза. Если же известно, что f нульмерное отображение, то во втором случае множество точек, имеющих не менее чем $k+2$ прообраза, имеет полную размерность n.

Открытый вопрос. *Существует ли непрерывное отображение n-мерного проективного пространства на n-мерную сферу для которого прообраз каждой точки образа имеет не более трех прообразов при $n > 2$?*

1. Зелинский Ю.Б. О некоторых проблемах Косинского / Ю.Б. Зелинский // Укр.матем.журнал. 1975. т. 27, №4. С.510-516.

2. Зелинский Ю.Б. О кратности непрерывных отображений областей / Ю.Б. Зелинский // Укр.матем.журнал. 2005. т. 57, №10. С.1420-1423.

e-mail: zel@imath.kiev.ua

Модель Фрідріхса для транспортного оператора

Івасик Г.В., Черемних Є.В.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Транспортний оператор

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} f(x,\mu')d\mu' \tag{1}$$

де $x \in R, \mu \in [-1;1]$, який розглядається в просторі $L^2(D), D = R \times [-1,1]$ виникає в деяких фізичних задачах (наприклад, задача перенесення нейтронів). Серед багатьох праць, присвячених транспортному оператору, вкажемо роботу [1] де, серед іншого, досліджено точковий спектр оператора L. В роботі [2] використано інший підхід і для несамоспряженого випадку знайдено умови, при яких точковий спектр утворює скінчену множину. Оператор L є унітарно еквівалентним оператору деякої моделі Фрідріхса $T = S + V : H \to H$,де S- оператор множення на незалежну змінну, H - гільбертів простір функцій в області D з вагою $\rho(x,\mu) = \frac{1}{\mu}$, а збурення V допускає факторизацію вигляду $V = A^*B$, де оператори A, Bдіють з простору H в деякий допоміжний гільбертів простір G.

В даній доповіді розглядається оператор

$$Lf = -i\mu\frac{df}{dx} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')f(x,\mu')d\mu' \tag{2}$$

який є узагальненням оператора (1).

В доповіді подано модель Фрідріхса унітарно еквівалентну оператору L і побудовано відповідну факторизацію $V = A^*B$, яка дозволяє вказати умови, при яких збурення оператора (1), а саме, оператор (2) має скінчений точковий спектр. Вибрано факторизацію потенціала $c(x) = \overline{c_1(x)}c_2(x)$ так, що $|c_1(x)| = |c_2(x)|$ і вибрано $G = L^2(R)$. Тоді

$$B\varphi(x) = c_2(x)\int\limits_{R} e^{ix\tau}\left(\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi(\tau\mu',\mu')d\mu'\right)d\tau \tag{3}$$

$$A^*c(s,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R}\overline{c_1(x)}c(x)e^{-ix\frac{s}{\mu}}dx, \tag{4}$$

Оператори $A^* : G \to H, B : H \to G$ є обмеженими операторами.

1. Куперин Ю.А., Набоко С.Н., Романов Р.В. Спектральный анализ односкоростного оператора переноса и функциональная модель, Функ. анализ и его прил. Т.33, п.3, 1999, с. 47–58.

2. Diaba F.,Cheremnikh E. On the point spectrum of transport operator, Meth. Funct. Anal. And Topology, v.11 n.1, 2005, p. 21–36.

вул. Сонячна 9/1, Львів, 79000
e-mail: semenyuk@gmail.com

Про задачу Коші для одного квазілінійного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова

Івасишен С.Д.
(Національний технічний університет України "КПІ")
Мединський І.П.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглядається в області $\Pi \equiv (0, \infty] \times \mathbb{R}^n$ задача Коші для рівняння вигляду

$$(Au)(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де

$$A \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{n_3} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j\partial_{x_{1j}} - c$$

– ультрапараболічний диференціальний вираз типу Колмогорова, в якому n_i, $i \in \{1,2,3\}$, — натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$, $x_1 \equiv (x_{11}, ..., x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \equiv (x_{21}, ..., x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_3 \equiv (x_{31}, ..., x_{3n_3}) \in \mathbb{R}^{n_3}$, числа a_{jk}, b_j, $\{j,k\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і c є дійсними. Припускається, що для рівняння (1) виконується умова параболічності : існує стала $\delta > 0$ така, що для довільних $\sigma_1 \equiv (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність $\sum\limits_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2$.

Знайдені умови на функції f і φ за яких для задачі (1), (2) існує єдиний розв'язок, визначений в:

1) деякому шарі$(0,T] \times \mathbb{R}^n$,

2) області Π .

В другому випадку, крім потрібних умов гладкості, функція $f : \Pi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови

$$\exists\, C > 0\ \forall\ (t,x) \in \Pi\ \forall\ \{u, u_1, u_2\} \subset \mathbb{R} :$$

$$|f(t,x,u)| \leq C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2)| \leq C|u_1 - u_2| \max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\},$$

де β і C — деякі сталі.

При одержанні результатів використовується загальна теорема про існування глобального розв'язку з [1] та властивості відповідних потенціалів, породжених фундаментальним розв'язком рівняння $Au = 0$ з [2].

1. Івасишен С. Д., Мединський І.П. Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, №2. – С. 31–38.
2. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

вул С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: dpm.mip@polynet.lviv.ua

Спектральна теорія самоспряжених узагальнених Якобієвих матриць

Івасюк І.Я.

(Київський національний університет ім. Т. Шевченка)

Основним об'єктом дослідження є матриці виду

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Такі матриці мають назву Якобієвих. Добре відома теорія класичних Якобієвих матриць (див. [1]); тобто таких, коли елементи $a_i, b_i, c_i, i = 0, 1, \dots,$ є числами. Спектральна теорія самоспряжених класичних матриць застосовується, зокрема, для розв'язування класичної проблеми моментів.

Однак, при дослідженні комплексної проблеми моментів виникають трьох-діагональні блочні Якобієві матриці (див. [2]). Це матриці J виду (1), елементи яких є вже не числа, а матриці певної структури та розмірності. Матриці такого типу ми називатимемо узагальненими матрицями Якобі. Спектральна теорія трьох-діагональних блочних нормальних Якобієвих матриць, яка розроблена в [2], використовується також для розв'язування деяких рівнянь Лакса (див. [3]). А саме рівнянь виду,

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)(t) = J(t)A(t) - A(t)J(t), \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

де $J(t)$ - деяка шукана матриця виду (1) і $A(t)$ - задана нескінченновимірна матриця.

У доповіді розглядається спектральна теорія узагальнених самоспряжених Якобієвих матриць. Досліджена пряма спектральна задача: знайдені узагальнені власні функції, побудоване відповідне перетворення Фур'є та наведена спектральна теорема (див. [4]). Також розв'язана обернена спектральна проблема та отримані результати стосовно застосування даної теорії до розв'язування відповідних рівнянь Лакса виду (2).

1. Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961.
2. Yu. M. Berezansky and M. E. Dudkin, The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices, Methods Funct. Anal. Topology **12** (2006), no. 1, 1–31.
3. Березанский Ю.М., Мохонько А.А., Интегрирование некоторых дифференциально-разносных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц, Функ. анализ и его прилож., т. **42** (2008), вып. 1, 1–21.
4. I. Ya. Ivasiuk, Direct spectral problem for the generalized Jacobi Hermitian matrices, Methods Funct. Anal. Topology (to appear).

вул. Васильківська 94, кв. 920, Київ, 03022
e-mail: vanobsb@gmail.com

Обернена задача для квазілінійного рівняння першого порядку

Казмерчук А.І.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядається задача Коші

$$u_t + \varphi(u)_x = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ u_0(x) \in L_\infty\left(R^1\right), \tag{2}$$

Припустимо, що $\varphi \in C^2$, і на відрізку $[a, b]$ функція $\varphi''(x)$ має скінченну кількість нулів. Нехай $I : u_0(x) \to u(t, x)$, де $u(t, x)$ – узагальнений розв'язок задачу Коші у сенсі Кружкова [1].

Обернена задача для рівняння (1) полягає у наступному: для заданої множини $K_1 \subset L_\infty(R^1)$ описати допустимі множини $K \subset K_1$ такі, що сукупність $\{I_{u_0}\}$ однозначно визначає функцію $\varphi(u)$ на відрізку $[a, b]$.

Теорема 1. *Якщо $K_1 = C^1$, тоді допустимою є множина K, що складається з однієї функції $u_0(x) \in C^1$.*

Теорема 2. *Нехай* $K_1 = \left\{ v(x) \middle| v(x) = \begin{cases} v_1, x < 0, \\ v_2, x \geq 0, v_2 \neq v_1 \end{cases} \right\}$ *і* $N_1 \subset [a, b]$, $\overline{N_1} = [a, b]$. *Допустимою є множина K, що складається з функцій, які відповідають розривам $(v_1, v_2), v_i \in N_1$.*

Теорема 3. *Нехай K_1 це множина сходинкових функцій. Тоді існує допустима множина K, що складається з однієї функції.*

Отримані результати поширюються на загальне квазілінійне рівняння першого порядку і на системи квазілінійних рівнянь першого порядку.

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. – 1970. – Т. 81, №2. – С. 228–255.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000
e-mail: kaz@rambler.ru

Усереднення крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні

Казмерчук Ю.А.

(Київський національний університет ім. Т. Шевченка)

В доповіді будуть представлені сумісні результати, які отримані з науковим керівником професором Т.А. Мельником, для усереднення мішаної крайової задачі для рівняння Пуассона в плоскому густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області $\Omega_0 = \big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < \gamma(x_1)\big\}$ та великої кількості тонких стержнів

$$G_j(\varepsilon) = \left\{x : \left|\tfrac{x_1}{\varepsilon} - (j + \tfrac{1}{2})\right| < \tfrac{h}{2}, \ x_2 \in [-l, 0]\right\}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad \varepsilon = \tfrac{a}{N},$$

що ε-періодично приєднуються до Ω_0 вздовж $\partial\Omega_0 \cap [0, a]$. Тут $\gamma \in C^1([0, a])$; a, l – додатні числа; h – фіксоване число з інтервалу $(0, 1)$; N – велике натуральне число, тому величина $\frac{a}{N}$ – малий дискретний параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими стержнями, товщина яких рівна εh.

Такі з'єднання є прототипами багатьох сучасних інженерних конструкцій, таких, як мікро-електромеханічні системи, довгі мости на опорах, каркаси будинків, промислові установки, енергетичні системи космічних кораблів, а також багато інших фізичних і біологічних систем з дуже відмінними характерними розмірами і складною структурою.

Оскільки чисельні розрахунки крайових задач в густих з'єднаннях є неможливими, то основним підходом до дослідження таких задач є асимптотичні методи, які дають обгрунтовану можливість замінити складні моделі більш простішими. Їх суть полягає у вивчені асимптотичної поведінки розв'язку задачі, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

Постановка задачі. В густому з'єднанні Ω_ε розглядається крайова задача

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) \le g(x), \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) \le \varepsilon d(x), \quad x \in S_\varepsilon, \\ (u_\varepsilon(x) - g(x))\,(\partial_\nu u_\varepsilon(x) - \varepsilon d(x)) = 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \qquad \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

з неоднорідними крайовими умовами Сіньоріні на S_ε (об'єднання вертикальних сторін тонких стержнів). Тут Γ_ε – об'єднання основ тонких стержнів, задані функції f, d, g належать відповідно до просторів Соболєва $L^2(\Omega_1), H^1(D_0), H^1(D_0, I_l \cup I_0)$, де $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{D_0}$, $D_0 = (0, a) \times (-l, 0)$, $I_l = \{x : x_1 \in (0, a), \ x_2 = -l\}$, $I_0 = \{x : x_1 \in (0, a), \ x_2 = 0\}$.

Доведено теорему збіжності послідовності розв'язків задачі (1) до розв'язку відповідної граничної (усередненої) задачі та збіжність інтеграла енергії задачі (1) при $\varepsilon \to 0$ $(N \to \infty)$. При цьому, крайові умови Сіньоріні трансформуються у варіаційні нерівності в прямокутнику D_0, який заповнюється тонкими стержнями в граничному переході. При доведенні теореми збіжності використовується метод спеціальних інтегральних тотожностей (див. [1]).

1. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a boundary-value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008. Vol. 31. № 9. P. 1005–1027. published online: `http://dx.doi.org/10.1002/mma.951`

e-mail: ulyokaz@ukr.net

Продовження відображень зі значеннями в неметризовних просторах

Карлова О.О.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами називається відображенням першого класу Лебеґа, якщо для довільної відкритої в Y множини V прообраз $f^{-1}(V)$ є типу F_σ в X. Сукупність усіх таких відображень ми будемо позначати символом $H_1(X, Y)$.

Результати з [1] і [2], що стосуються продовження відображень першого класу Лебеґа, отримані для відображень, які набувають значень у метризовних просторах. Тому природно виникає питання про можливість продовження відображень з різних функціональних класів до відображень першого класу Лебеґа.

Теорема 1. *Нехай X – цілком регулярний простір, E – спадково берівський метризовний сепарабельний простір, Y – строга індуктивна границя зростаючої послідовності повнометризовних локально опуклих просторів Y_n. Тоді для довільного відображення $f \in H_1(E, Y)$ існує відображення $g \in H_1(X, Y)$, таке, що $g|_E = f$.*

Нагадаємо, що топологічний простір Y називається *сильно σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді зліченного об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Y_n, причому для кожної збіжної в Y послідовності $(y_k)_{k=1}^\infty$ існує номер n, такий, що $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_n$. Послідовність підпросторів $(Y_n)_{n=1}^\infty$ називається *вичерпуванням* простору Y.

Теорема 2. *Нехай X – цілком регулярний простір, Y – досконало нормальний простір, Z – сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^\infty$, де Z_n – польський простір для кожного n, $A \subseteq X$ – метризовний підпростір, $B \subseteq Y$ і*

(i) $A \times B$ – ліnделефовий G_δ-підпростір добутку $X \times Y$, або

(ii) $A \times B$ – ліnделефовий спадково берівський підпростір добутку $X \times Y$.

Тоді для довільного відображення $f \in CC(A \times B, Z)$ існує відображення $g \in H_1(X \times Y, Z)$, таке, що $g|_E = f$.

Теорема 3. *Нехай X – цілком регулярний простір, $E \subseteq X$, Z – σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^\infty$, де Z_n – повнометризовний простір для кожного n і виконується одна з наступних умов:*

(i) E – ліnделефовий G_δ, або

(ii) E – ліnделефовий спадково берівський, або

(iii) X – метризовний простір, E – G_δ.

Тоді для кожного неперервного відображення $f : E \to Z$ існує відображення $g \in H_1(X, Z)$, таке, що $g|_E = f$.

1. Kuratowski K. Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de varibles réelles // C.R. Paris, **197**, 1933.
2. Kalenda, O., Spurný, J. Extending Baire-one functions on topological spaces // Topol. Appl. 149 (2005), 195–216.
3. Karlova O. Extension of continuous mappings and H_1-retracts // Bull. Aust. Math. Soc. – preprint.

вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012
e-mail: mathan@ukr.net

Аналітично-числовий метод розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь та його застосування при дослідженні стаціонарних процесів

Кіт Г.С., Сушко О.П.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Різні фізичні та механічні процеси можна змоделювати двовимірними граничними інтегральними рівняннями. При розв'язуванні задачі стаціонарної теплопровідності, електростатики та теорії тріщин зустрічаються рівняння виду

$$\iint_S \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = f(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

$$\Delta \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = \varphi(x), \quad x \in S, \tag{2}$$

де S - плоска однозв'язна область інтегрування; $|x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$ - віддаль між точками $x(x_1, x_2)$ і $\xi(\xi_1, \xi_2)$, $f(x)$ і $\varphi(x)$ - задані в області S неперервні функції, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ - двовимірний оператор Лапласа. Система координат $Ox_1x_2x_3$ вибрана з центром в області S, до якої перпендикулярна вісь Ox_3. Функція $\mu(x)$ в рівнянні (1) характеризує інтенсивність теплових джерел в задачі стаціонарної теплопровідності і електричних зарядів в задачі електростатики для безмежного тіла, коли в області S задана температура або електричний потенціал $f(x)$. Також $\mu(x)$ описує контактний тиск, а $f(x)$ - осадку штампа в контактних задачах теорії пружності для півпростору, при цьому S - область контакту абсолютно жорсткого штампа з півпростором. Функція $\gamma(x)$ в рівнянні (2) описує густину теплових або електричних диполів при розв'язуванні задачі теплопровідності або електростатики для безмежного тіла з тонким теплоізольованим або електроізольованим включенням S при заданих поза включенням тепловому потоці або напруженості електричного поля, а також стрибок нормальних переміщень (в напрямі осі Ox_3) поверхонь S^+ і S^- при визначенні напружено-деформованого стану тіла з тріщиною S при заданому на ній навантаженні $\varphi(x)$.

При довільній правій частині рівняння (1) має єдиний необмежений на контурі $L(x)$ області S розв'язок, який записується у вигляді $\mu(x) = \psi(x)/\sqrt{L(x)}$. Розв'язок рівняння (2) $\gamma(x) = \psi(x)\sqrt{L(x)}$ є обмеженим і дорівнює нулю на цьому контурі.

Якщо область S - круг, то інтегральні рівняння (1), (2) при довільних правих частинах розв'язуємо аналітично-числовим методом. Для цього їх регуляризуємо, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо у колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій та різницеві схеми для похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно функції $\psi_i(\xi)$ у вузлах дискретизації. Для довільної однозв'язної області S, обмеженої гладким контуром $L(x)$, ці рівняння розв'язують чисельно, відобразивши попередньо $L(x)$ на коло одиничного радіуса .

Запропонованим вище методом розв'язуються також тривимірні задачі теплопровідності та термопружності для півбезмежних тіл з плоскими перпендикулярними або паралельними до їх межі круговими чи еліптичними тріщинами.

ІППММ НАН України, вул. Наукова 3"Б", Львів, 79000
e-mail: hkit@iapmm.lviv.ua; sushko@iapmm.lviv.ua

Розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь Ріккаті та квазіоптимальна стабілізація систем із запізненням

Клевчук І.І.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Розглядається система

$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Au(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t), \tag{1}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, всі корені характеристичного рівняння $\det(B + C\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать в півплощині $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Керування $u(t)$ повинно бути вибране так, щоб забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (1) і мінімізувати функціонал

$$J(u) = \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Fu(t))dt, \tag{2}$$

де Q та F – додатно визначені симетричні матриці, $x(t)$ – розв'язок системи (1) на многовиді $y_t = P(\varepsilon)x(t)$. Тут y_t – елемент простору $C[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Підставивши в (1) $\varepsilon = 0$, одержимо вироджену систему. Нехай система $dx/dt = [L + (M+N)P_0]x(t) + Au(t)$, де $P_0 = -(B+C)^{-1}D$, цілком керована. Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), причому $u(t) = g(\varepsilon)x(t)$, де функції $g(\varepsilon)$ та $P(\varepsilon)$ можна шукати у вигляді ряду за степенями ε [1]. Правильні зображення $P(\varepsilon) = P_0 + O(\varepsilon)$, $g(\varepsilon) = g_0 + O(\varepsilon)$, де $g_0 = -F^{-1}A'K$, симетрична додатно визначена матриця K є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті $KL_0 + L_0'K - KAF^{-1}A'K + Q = 0$, $L_0 = L + (M+N)P_0$.

Створено пакет програм в середовищі Delphi для розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь Ріккаті за допомогою методу матричної сигнум-функції, методу Ньютона-Рафсона та методу з використанням власних векторів.

Результати можна узагальнити на випадок лінійних неавтономних сингулярно збурених систем із запізненням.

1. Клевчук І.І. Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 56–59.

просп. Незалежності 112, кв. 34, Чернівці, 58029
e-mail: klevchuk@yandex.ru

Розв'язання лінійних алгебраїчних систем з тепліцевими матрицями рядів

Ковальчук О.Я., Бубняк М.М.
Перченко А.О., Муравський В.В.
(Тернопільський національний економічний університет)

Розглядається система лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$A(\lambda)Z(\lambda) = B(\lambda), \tag{1}$$

де $A(\lambda)$ – тепліцева матриця порядку $n \times n$; елементами матриці $A(\lambda)$ та вектора $B(\lambda)$ є степеневі ряди з комплексними членами [1-3].

Коефіцієнти системи (1) визначаються як $a_{i,j}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(\lambda)e^{ik\lambda}$, $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n+1})$, де $\{a_{i,j}(\lambda), (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n+1})\} \subset \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Матрицю $A(\lambda)$ та вектор $B(\lambda)$ представимо у вигляді рядів

$$A(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda}A_k, \qquad B(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda}B_k.$$

Розв'язок системи (1) будемо шукати у вигляді співвідношення двох матричних рядів

$$x(\lambda) = \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda}X_j}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda}y_j},$$

де X_0, X_1,..., X_n – вектори розмірності n, а y_0, y_1, ..., y_n – скалярні величини.

Обчислення ij-розв'язку порядку m зведено до розв'язання числової системи лінійних алгебраїчних рівнянь з такою структурою заповнення:

$$\begin{pmatrix} A_0 & \cdots & A_{-m} & A_{-m-1} & A_{-m-2} & \cdots & A_{-2m} & B_0 & \cdots & B_{1-m} & B_{-m} & B_{-m-1} & \cdots & B_{-2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m & \cdots & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \cdots & A_{-m} & B_m & \cdots & B_0 & B_{-1} & B_{-2} & \cdots & B_{-m} \\ A_{m+1} & \cdots & A_1 & A_0 & A_{-1} & \cdots & A_{-m+1} & B_{m+1} & \cdots & B_1 & B_0 & B_{-1} & \cdots & B_{-m+1} \\ A_{m+2} & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & A_{-m+2} & B_{m+2} & \cdots & B_2 & B_1 & B_0 & \cdots & B_{-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{2m} & \cdots & A_{m+1} & A_m & A_{m-1} & \cdots & A_0 & B_{2m} & \cdots & B_{m+1} & B_m & B_{m-1} & \cdots & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{-m} \\ \cdots \\ X_0 \\ \cdots \\ X_m \\ -y_{-m} \\ \cdots \\ -y_0 \\ \cdots \\ -y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Недашковський М.О. Про збіжність операторних гіллястих ланцюгових дробів // Тез. доп. учасників міжнар. математичної конф. ім. В.Я. Скорбогатька. - Дрогобич, 27 вересня - 1 жовтня 2004. - С. 157.

2. Недашковський М.О. Про розв'язання лінійних алгебраїчних систем з матрицями рядів // Тез. доп. учасників міжнар. конф. "Проблеми чисельного аналізу і прикладної математики". - Львів, 13-16 вересня 2004. - С. 47.

3. Ковальчук О.Я., Недашковский Н.А. Решение матричных уравнений ветвящимися цепными дробями // Кибернетика и системный анализ. - 2004. - №1. - С.22-33.

вул. Миру 10, кв. 34, Тернопіль, 46018
e-mail: Oluna13@ukr.net.

Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для рівняння з частинними похідними нескінченного порядку

Когут І.В.
(Національний університет "Львівська політехніка")

У шарі $t \in (0,h),\ x \in \mathbb{R}^s$ досліджується задача

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(0,x) + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(h,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз, загалом, нескінченного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілим аналітичним символом $a(\nu) \neq const$, $\nu \in \mathbb{R}^s$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами.

Задача (1), (2) є некоректною (див. [1]), оскільки існують нетривіальні розв'язки рівняння (1), що задовольняють однорідну умову

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(0,x) + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(h,x) = 0.$$

Введемо до розгляду клас K_M квазіполіномів вигляду $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(x)\exp\left[\alpha_j \cdot x\right]$, де $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{js}) \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $x \in \mathbb{R}^s$, $Q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами, $\alpha_j \cdot x = \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{jk}x_k$, а також клас $K_{\mathbb{C},M}$ квазіполіномів вигляду $f(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(t,x)\exp\left[\beta_j t + \alpha_j \cdot x\right]$, де $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ або $\beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $Q_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, – поліноми змінних t, x з комплексними коефіцієнтами.

Крім того, введемо до розгляду функцію $\eta(\nu) = p(\nu) + q(\nu)\exp\left[a(\nu)h\right]$ та множину її нулів $P = \{\nu \in \mathbb{C}^s : \quad \eta(\nu) = 0\}$. Оскільки $a(\nu) \neq const$, то множина P не є порожньою; крім того, $P \neq \mathbb{C}^s$. Отже, $P \subset \mathbb{C}^s$.

Теорема. *Нехай в умові* (2) $\varphi \in K_{\mathbb{C}^s \setminus P}$. *Тоді у класі функцій* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \setminus P}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]}{\eta(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Дослідження підтримані ДФФД України (Проект №14.1/017, Договір Ф-25/108).

1. Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. Про ядро задачі з нелокальною двоточковою умовою для рівняння із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С.116–128.

НУ "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: ikohutua@yahoo.com

Про алгеброїдні розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь з алгеброїдними коефіцієнтами

Коляса Л.І., Мохонько А.З.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглянемо систему

$$\frac{dy_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i, \quad 1 \le j \le n, \tag{1}$$

де всі $a_{ij}(z)$ належать класу алгеброїдних функцій. Нехай матриця коефіцієнтів системи (1) має вигляд

$A = \left\| \begin{array}{ccccc} s_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & s_2 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & p_{n-1} \\ a_{n,1} & \dots & \dots & \dots & s_n \end{array} \right\|$. Введемо позначення:

$$d_{jk}(A) = \left\| \begin{array}{ccccc} s_k & p_k & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,k} & s_{k+1} & p_{k+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k+j-1,k} & \dots & \dots & \dots & s_{k+j-1} \end{array} \right\|,$$

$d_{-jk}(A) \equiv 0,\ d_{0k} \equiv 1,\ H_j(A) = \sum_{k=1}^{n+1-j} d_{jk}(A),\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le n-j+1.$
Для фіксованого цілого числа $m,\ 0 \le m \le n-1$, визначимо:

$$\alpha = \alpha_m = \varlimsup_{x \to \infty} m(r, H_{n-m}(A)) / \ln r;$$
$$\beta = \beta_m = \max_{1 \le j \le n-m-1,\ 1 \le k \le n-j+1} \varlimsup m(r, d_{jk}(A)) / \ln r, \quad 0 \le m \le n-2,$$

$\beta_{n-1} = 0,\ K = K_m = \frac{1}{2}(n+m+2)(n-1),\ N = N_m = (m+1)(n-m).$

Якщо $\rho[y_j]$ – порядок компоненти y_j алгеброїдної вектор-функції $Y = (y_1, \dots, y_n)$, то порядок $\rho[Y]$ вектор-функції Y визначається за правилом $\rho[Y] = \max \rho[y_j],\ 1 \le j \le n$.

Теорема. *Якщо $\alpha > K\beta$, то система (1) має не більше m лінійно незалежних алгеброїдних вектор розв'язків $Y = (y_1, \dots, y_n)$ порядку*

$$\rho[Y] < (\alpha - K\beta) N^{-1} + 1.$$

e-mail: lubovkolyasa@gmail.com

Про властивість Фату розв'язків параболічних крайових задач

Кондур О.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Для гармонічних функцій відома класична теорема Фату про існування нетангенціальної границі. Івасишеним С.Д. та автором вона узагальнена на розв'язки рівномірно параболічної крайової задачі [1]. При цьому нетангенціальній границі відповідає параболічна – в спеціальному параболічному конусі. Аналогічний результат одержано для розв'язків параболічної крайової задачі з оператором Бесселя для систем N рівнянь

$$\left(I\ D_t^1 - \sum_{|k|+2\ell \le 2b} a_{k\ell}\,(t,x)\, D_{x'}^{\ell} B_{x_n}^{\ell} \right) u\,(t,x) = 0,\ (t,x) \in Q, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \sum_{|k|+2\ell \le 2r_j} b_{jk\ell}\,(t,x)\, D_{x'}^{\ell} B_{x_n}^{\ell} u\,(t,x) \Big|_{\Gamma} = 0, \\ 0 \le r_j < 2b,\ 1 \le j \le bN,\ D'_{x_n} u\,(t,x)\big|_{\Gamma^0} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u\,(t,x)|_{t=0} = \varphi\,(x)\,,\ x \in \Omega. \tag{3}$$

Тут n, N, b – задані натуральні числа; Ω' – область у $\mathbb{R}^{n-1}$ з межею S', $\Omega \equiv \Omega' \times [0;+\infty)$ – циліндр у $\mathbb{R}^{n-1} \times [0;+\infty)$ з основою $S^0 \equiv \{\,(x,0)|\, x \in \Omega'\}$і бічною межею S; $Q \equiv [0,T) \times \Omega$ – циліндрична область із $\mathbb{R}^{n+1}$ з бічною поверхнею $\Gamma \cup \Gamma^0$, $\Gamma \equiv (0,T] \times S$, $\Gamma \equiv (0,T] \times S^0$; $x' \equiv (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \Omega'$; $k \equiv (k_1, \cdots, k_{n-1})$ – $(n-1)$-вимірний мультиіндекс, $|k| = k_1 + \cdots + k_{n-1}$; $B_{x_n} \equiv D_{x_n}^2 + \frac{2r+1}{x_n} D_{x_n}$, $r \ge -\frac{1}{2}$, $x_n \ge 0$, – оператор Бесселя; I – одинична матриця.

За умов, коли існує однорідна матриця Гріна G_0 задачі (1)–(3), розв'язок задачі зображається у вигляді інтеграла Пуассона елемента φ зі спеціальною ваговою простору L_p^a, $1 \le p \le \infty$.

Теорема. *Якщо $\varphi \in L_p^a$, $1 \le p \le \infty$, то для будь-якого γ>0 і майже всіх $x_0 \in \Omega$*

$$\lim_{\substack{(t,x) \to (0,x_0) \\ (t,x) \in \Gamma_\gamma(x_0)}} u\,(t,x) = \varphi(x_0),$$

де $\Gamma_\gamma\,(x_0) \equiv \left\{ (t,x) \in Q|\, |x - x_0| < \gamma t^{\frac{1}{2b}} \right\}$ *– параболічний конус.*

1. Кондур О.С., Ивасишен С.Д. Свойства интегралов Пуассона для параболических граничных задач// Черновц. Ун-т. – Черновцы, 1992. – 35с. – Деп. В УкрИНТЭИ 26.10.92, №1738-Ук92.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76025

Нелінійні інтегральні нерівності типу Вольтерра

Копач М.І.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Голубчак О.М.
(Івано-Франківський коледж Львівського національного аграрного університету)

Теореми про диференціальні, інтегральні, інтегро-диференціальні та інші класи операторних нерівностей широко використовуються як в якісній, так і в кількісній теорії диференціальних рівнянь. В умовах багатьох теорем (див., напр.[1]) про оцінки розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь чи нерівностей типу Вольтерра використовується функція

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dw}{g(w)}$$

чи деякі її видозміни.

В пропонованій авторами роботі серед інших теорем розглядається твердження, в умовах яких вимагається існування достатньої гладкої неспадної функції $G(x)$, такої, що для всякої достатньо гладкої функції $x(t)$ виконується нерівність

$$\frac{\partial^n G(x)}{\partial t_1 ... \partial t_n} \leq \frac{1}{g(x)} \frac{\partial^n x}{\partial t_1 ... \partial t_n}$$

Варіювання властивостей функції $G(x)$ дозволяє одержувати як нові так і відомі оцінки розв'язків нелінійних інтегральних нерівностей Вольтерра, в т.ч. і нерівність Вендроффа. Одержані авторами результати узагальнюють ряд теорем з [1], а також основний результат із [2].

1. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.
2. Gutowski R. Etude d'une inequalitie integrale nonlineare en deux variables // Ann. pol. math. – 1977. – V. 35, №3. – P. 247-252.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000

Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$

Косован В.М., Маслюченко В.К.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай $E \subset \mathbb{R}^n$. Функція $f\colon E \to \mathbb{R}$ називається поліноміальною, якщо існує такий поліном p на просторі $\mathbb{R}^n$, що $p|_E = f$. Кажуть, що f нарізно поліноміальна, якщо для будь-якої точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ з E і для будь-якого $k = 1, \ldots, n$ функція $f_{\hat{x}_k^0}\colon E_{\hat{x}_k^0} \to \mathbb{R}$, що визначена на множині $E_{\hat{x}_k^0} = \{x_k \in \mathbb{R} :\ (x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) \in E\}$ правилом $f_{\hat{x}_k^0}(x_k) = f(x_1^0, \ldots, x_{k_1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$ є поліноміальною як функція однієї дійсної змінної. Сукупність всіх поліноміальних функцій $f\colon E \to \mathbb{R}$ ми позначатимемо $P(E)$, а нарізно поліноміальних $S(E)$.

У праці [1] у випадку $E = X_1 \times \cdots \times X_n$ були подані необхідні та достатні умови на множини $X_1, \ldots, X_n$ для того, щоб кожна нарізно поліноміальна функція $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ була поліноміальною. Природно поставити це питання і для довільних підмножин E простору $\mathbb{R}^n$. Ця загальніша проблема виявляється значно складнішою і тут ми подамо лише деякі результати, що отримані нами у напрямку її розв'язання.

З доведеної в [1] теореми при $n = 2$ випливає, що включення $S(X_1 \times X_2) \subseteq P(X_1 \times X_2)$ виконується у тому випадку, коли одна з множин X_1 чи X_2 скінченна або незліченна. Наступні приклади показують, що для довільних множин $E \subseteq \mathbb{R}^2$ це вже не так.

Приклад 1. Нехай $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy \geq 0\}$ і $f(x, y) = xy$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$, і $f(x, y) = -xy$, якщо $x \leq 0$ і $y \leq 0$. Тоді $f \in S(E) \setminus P(E)$, хоча всі вертикальні та горизонтальні розрізи множини E континуальні.

Приклад 2. Нехай $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бієкція і $E = Gr(g) = \{(x, g(x)) :\ x \in \mathbb{R}\}$. Зрозуміло, що кожна функція $f\colon E \to \mathbb{R}$ є нарізно поліноміальною. Проте серед таких функцій є і не поліноміальні, бо множина всіх поліноміальних функцій на $\mathbb{R}^2$ має потужність континуума $\mathfrak{c}$, а множина всіх функцій $f\colon E \to \mathbb{R}$ має потужність $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.

Множину $E \subseteq \mathbb{R}^n$ назвемо *P-множиною*, якщо для довільного многочлена p на $\mathbb{R}^n$ з умови $p|_E = 0$ випливає, що $p = 0$. При $n = 1$ множина E буде P-множиною тоді й тільки тоді, коли вона нескінченна. Для $n \geq 2$ це вже не так, бо, наприклад, $E = \{(x, x) :\ x \in \mathbb{R}^2\}$ не є P-множиною, хоча нескінченна.

Теорема. *Нехай $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – функція, і $(A_t :\ t \in E)$ – сім'я підмножин A_t множини E, яка задовольняє умови:*

(i) $t \in A_t$ для кожного $t \in E$;

(ii) $f|_{A_t} \in P(A_t)$ для кожного $t \in E$;

(iii) для будь-яких точок t', $t'' \in E$ існують точки $t_1, \ldots, t_m \in E$, такі, що $t_1 = t'$, $t_m = t''$ і для кожного $k = 2, \ldots, m$ перетин $A_{t_{k-1}} \bigcap A_{t_k}$ є P-множиною.

Тоді $f \in P(E)$.

З цієї теореми легко вивести, наприклад, що для довільної області E в $\mathbb{R}^n$ виконується рівність $S(E) = P(E)$.

1. В.М.Косован, В.К.Маслюченко. Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісник Чернівецького університету. Вип. 374. Математика. Зб. наук. пр. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66 – 74.

вул. Університетська 28, Чернівці, 58001
mathan@ukr.net

Оператори з L_1 в строго опуклі банахові простори, які досягають норму

Красікова І.В.
(Запорізький національний університет)

Кажуть, що лінійний обмежений оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ (X,Y - банахові простори) *досягає норму на елементі* $x \in X \setminus \{0\}$, якщо $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$. Оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *досягає норму*, якщо він досягає норму на деякому елементі $x \in X$. Огляд деяких результатів про оператори, що досягають норму, наведений в [1].

Наступну проблему нам сповістив М. Попов.

Проблема. *Нехай Y - банахів простір. Чи для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(L_1,Y)$ існує нескінченновимірний підпростір $X \subseteq L_1$ такий, що звуження $T\big|_X$ досягає норму?*

Ми розв'язуємо негативно послаблену версію проблеми, будуючи банахів простір Y і оператор T з L_1 в Y, який не досягає своєї норми на жодному підпросторі $L_1(\mathcal{F})$ з безатомною σ-підалгеброю $\mathcal{F}$ борелівської σ-алгебри $\mathcal{B}$ на $[0,1]$.

Додатна і від'ємна частини довільного елемента $x \in L_1$ визначаюься так: $x^+(t) = x(t)$, якщо $x(t) \ge 0$, $x^+(t) = 0$, якщо $x(t) < 0$ і $x^- = x^+ - x$.

Теорема 1. *Нехай (Ω, Σ, μ) - простір з мірою, Y - банахів простір і $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu),Y)$ досягає норму на елементі $x \in L_1(\mu)$. Тоді T досягає норму на довільному елементі $0 \ne y \in L_1^+(\mathrm{supp}\ x^+) \cup L_1^+(\mathrm{supp}\ x^-)$.*

Символом $\mathrm{supp}\ x$ ми позначаємо носій $\omega \in \Omega \colon x(\omega) \ne 0$ елемента $x \in L_1(\mu)$, який визначається з точністю до множини міри нуль.

Кажуть, що банахів простір Y є *строго опуклим*, якщо одинична сфера $S(Y)$ простору Y не містить відрізків.

Теорема 2. *Нехай Y - строго опуклий банахів простір і оператор $T \in \mathcal{L}(L_1,Y)$: досягає норму на елементі $x \in L_1$. Позначимо $A_1 = \mathrm{supp}\ x^+$ і $A_1 = \mathrm{supp}\ x^-$. Тоді для $i = 1,2$ звуження $T\big|_{L_1(A_i)}$ на підпростір $L_1(A_i)$ є одновимірним оператором.*

Ще у 1959 році М.Й. Кадець [2] довів, що в кожному сепарабельному банаховому просторі існує еквівалентна локально рівномірно опукла (зокрема, строго опукла) норма. Таким чином, існує строго опуклий банахів простір Y, ізоморфний до L_1. Нехай $T\colon L_1 \to Y$ – ізоморфізм. Оскільки T є ін'єктивним, T не може бути одновимірним при звуженні на довільний нескінченновимірний підпростір. Отже, ми одержуємо наступний факт.

Теорема 3. *Нехай Y - строго опуклий банахів простір, ізоморфний до L_1, і $T\colon L_1 \to Y$ - ізоморфізм. Для довільної безатомної σ-підалгебри $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ звуження $T\big|_{L_1(\mathcal{F})}$ не досягає норми.*

1. Acosta M.D. Norm attaining operators into $L_1(\mu)$ // Contemp. Math. – 1999. – 232. – P. 1–11.
2. Кадец М.И. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам // Изв. вузов. Мат. – 1959. – 6. – С. 51–57.

вул Жуковського 66, Запоріжжя, 69063
e-mail: artem@ipms.kiev.ua

Деякі властивості операторів узагальненого зсуву

Лінчук Ю.С.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Оператори зсуву відіграють важливу роль у різних питаннях сучасної математики. В [1] досліджені умови еквівалентності двох різних диференціальних операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами у просторі многочленів. За допомогою цих результатів описано комутант довільного фіксованого оператора узагальненого зсуву. В цьому повідомленні результати з [1] узагальнюються на випадок операторів, які є сумою двох довільних узагальнених зсувів.

Через $\mathcal{L}(S)$ позначимо множину всіх лінійних операторів, які діють в S. Для фіксованої послідовності ненульових комплексних чисел $\{\alpha_n : n \geq 0\}$ через D_α позначатимемо оператор узагальненого диференціювання, який діє на многочлен $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n$ за правилом: $(D_\alpha P)(z) = \sum\limits_{n=1}^{m} p_n \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} z^{n-1}$. Для довільного ненульового комплексного числа h оператор узагальненого зсуву T_h, що відповідає оператору D_α, лінійно діє в просторі S за правилом:

$$(T_h P)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h^k (D_\alpha^k P)(z).$$

Нехай h_1 і h_2 – довільні фіксовані ненульові комплексні числа. В цьому повідомленні описано комутант оператора $T_{h_1} + T_{h_2}$ в $\mathcal{L}(S)$.

Теорема 1. *Нехай $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$, причому $h_1 + h_2 \neq 0$. Тоді оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ комутує з оператором $T_{h_1} + T_{h_2}$ в $\mathcal{L}(S)$ тоді і тільки тоді, коли він подається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку виду $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n D_\alpha^n$, де $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільна послідовність комплексних чисел.*

Розглянемо далі випадок, коли $h_1 + h_2 = 0$. Через $\mathcal{J}_\alpha$ позначимо оператор узагальненого інтегрування, що породжений послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ і лінійно діє в просторі S за правилом: $(\mathcal{J}_\alpha P)(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} p_n z^{n+1}$, де $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} p_n z^n \in S$.

Теорема 2. *Нехай h – фіксоване ненульове комплексне число. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(S)$ був переставним з оператором $T_h + T_{-h}$ необхідно і достатньо щоб він подавався у вигляді*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_\alpha^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n D_\alpha^n K + c(\mathcal{J}_\alpha + \mathcal{J}_\alpha K),$$

де $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ та $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ – довільні послідовності комплексних чисел, $c \in \mathbb{C}$, а $K \in \mathcal{L}(S)$ і діє за правилом: $(KP)(z) = P(-z)$.

1. Лінчук Ю.С. Деякі властивості диференціальних операторів нескінченного порядку, що пов'язані з узагальненим зсувом // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. International Conference DSMSI. Thesis of conference reports May 23-25, 2005. – Kyiv, 2005. – С. 79.

вул. О. Гузар 17А/4, Чернівці, 58022
e-mail: linyura@gmail.com

Розв'язки крайових задач для півлінійних еліптичних рівнянь у просторах узагальнених функцій

Лопушанська Г.П.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай $\Omega = \Omega_0$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \Omega_1$ класу C^∞, $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$ – еліптичний диференціальний вираз, на S задані крайові диференціальні вирази $B_j(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\le m_j} b_{j\alpha}(x)D^\alpha$, $b_{j\alpha} \in C^\infty(S)$, $j = \overline{1,m}$, система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна і задовольняє умову Лопатинського щодо $A(x,D)$.

Для фіксованої точки $\hat{x} \in S$ позначаємо через $\varrho(x,\hat{x})$ $(x \in \overline{\Omega})$ нескінченно диференційовну додатну в $\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}$ функцію порядку $|x-\hat{x}|$ при $|x-\hat{x}| \to 0$, через $\varrho(x)$ позначаємо нескінченно диференційовну функцію, додатну в Ω та порядку відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega$ до S при $d(x) \to 0$. Для $s,k \in \mathbb{R}_+$, $l_1, l \in \mathbb{R}_-$ визначаємо такі функційні простори:

$Z_k(\overline{\Omega}_j,\hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}_j \setminus \{\hat{x}\}) \cap C^{\overline{k}}(\overline{\Omega}_j)$: $\varrho^{|\alpha|-k}(\cdot,\hat{x})D^\alpha\varphi \in C(\overline{\Omega}_j)$ для всіх α, $|\alpha| > k$ та $\frac{D^\alpha\varphi}{ln\varrho(\cdot,\hat{x})} \in C(\overline{\Omega}_j)$, якщо $|\alpha| = k \in N\}$, $k > 0$, $\overline{k} = [k]$ при k нецілому та $\overline{k} = [k]-1$ при $k \in N$, $j = 0,1$,

$\tilde{Z}_{k,s}(\Omega,\hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(x) = \varrho^s(x)\varphi(x,\hat{x}), \varphi(\cdot,\hat{x}) \in \tilde{Z}_{k-s}(\overline{\Omega},\hat{x})\}$, $k > s$,

$\tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x}) = \{v : ||v||_{k,s} = \int\limits_\Omega \varrho^s(x)\varrho^{k-s}(x,\hat{x})|v(x)|dx < +\infty\}$,

$C_{ll_1}(\Omega,\hat{x}) = \{v \in C(\Omega) : \varrho^{-l_1}(\cdot)\varrho^{-(l-l_1)}(\cdot,\hat{x})v \in C(\overline{\Omega})\}$,

$$||v||_{C_{ll_1}(\Omega,\hat{x})} = \sup_{x\in\Omega} \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{l-l_1}(x,\hat{x})|v(x)|.$$

Простору $Z'_k(\overline{\Omega}_j,\hat{x})$ також належать узагальнені функції $F \in D'(\overline{\Omega}_j)$ порядків сингулярностей $s(F) < k$. Розглядаємо крайову задачу

$$A(x,D)u(x) = F_0(x) + \mu(x)|u(x)|^{q_0},\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x),\ x \in S,\ j = \overline{1,m} \tag{2}$$

за умови, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача однозначно розв'язна.

Теорема. *Нехай* $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega},\hat{x})$, $F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x})$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{0,m}$, $\mu \in L_\infty(\Omega)$, $0 < q_0 < 1$ *(також* $0 < q_0 < \frac{1}{n-2m}$ *у випадку* $2m < n$ *та* $s_j \ge 0$ *для всіх* $j = \overline{1,m}$*)*, $0 < p_0 < \frac{n}{q_0} + 2m - n$, $1 - 2m < p' = \max\limits_{1\le j\le m}(p_j - m_j) < \frac{n}{q_0} + 1 - n$, $2 - n < s' = \max\limits_{1\le j\le m}(\max\{s_j,0\} - m_j) < \frac{1}{q_0} + 1 - n$,

$$\max\{p'-1, p_0-2m\} = k_0 \le k < k_1 = \frac{n}{q_0} - n,\quad n-2+s' < s < \min\{\frac{1}{q_0}-1, k\}.$$

Тоді задача (1), (2) має розв'язок $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x})$. *Якщо, крім того,* $F_0 \in C(\Omega)$, $\mu \in C(\Omega)$, *а у випадку* $2m < n$ *також* $q_0 < \frac{2m}{n}$, *то* $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x}) \cap C^{2m-1}(\Omega)$.

Вивчаємо задачу і у підпросторах $C_{ll_1}(\Omega,\hat{x})$ простору $M_{k,s}(\Omega,\hat{x})$. Зокрема, за припущень $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1,m}$, $F_0 \in C_{\overline{l}_1}(\Omega)$, де $\overline{l}_1 \ge l_1 q_0$, $1 - n \le s' < \frac{1}{q_0} + 1 - n$, $q_0 < \frac{1}{n-2m}$, $-\frac{1}{q_0} < l_1 \le \min\{1-n-s', -\frac{n-2m-1}{1-q_0}\}$ при $2m < n$, $q_0 \in (0,1)$, $-\frac{1}{q_0} < l_1 \le 1 - n - s'$ при $2m \ge n$, задача (1), (2) розв'язна у $C_{l_1}(\Omega) = C_{l_1 l_1}(\Omega,\hat{x})$.

Ivan Franko Lviv National University
Universitetskaya str. 1, Lviv, 79000
e-mail: gp_lopushanska@franko.lviv.ua; lhp@ukr.net

Стабілізація розв'язку стохастичного диференціального рівняння дифузії з марковськими параметрами і перемиканням

Лукашів Т.О., Ясинська Л.І., Ясинський В.К.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай на ймовірносному базисі $(\Omega, F, \mathbb{P}, \mathbb{F} \equiv \{F_t \subset F, t \geq 0\})$ задано сильний розв'язок $x \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ стохастичним дифузійним рівнянням (СДР) [1]

$$dx = a(t, \xi(t), x, u)dt + b(t, \xi(t), x, u)d\omega(t) \tag{1}$$

з імпульсним марковським зовнішнім збуренням

$$x(t_k) = x(t_k-) + g(t_k-, \xi(t_k-), x(t_k-), \eta_k) \tag{2}$$

і з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \xi(t_0) = y \in \mathbb{Y}, \eta_{k_0} = h \in \mathbb{H}, \tag{3}$$

де $t_k \in S \equiv \{t_k \Uparrow, k \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, внутрішнє збурення $\{\xi(t), t \geq t_0\}$ є феллеровим марковським процесом із значеннями у метричному просторі $\mathbb{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbb{P}(s, y, t, \Gamma)$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ – феллеровий ланцюг Маркова зі значеннями у метричному просторі з перехідною ймовірністю на k-му кроці $\mathbb{P}_k(h, G)$ [1]; вектор $x \in \mathbb{R}^m$ – відхилення дійсних значень від його незбуреного значення $x \equiv 0$, $\forall t \geq 0$, величина $u \equiv u(t, y, x, h) \subset \mathbb{R}^r$ – r-вимірне керування [2].

Доведено загальні теореми про стійкість за ймовірністю в цілому і стійкість за першим наближенням.

Розв'язана задача про оптимальну стабілізацію, а саме: знайдено для СДР (1) з початковими даними (3) при імпульсному перемиканні (2) оптимальне керування $u^0(t, y, x, h)$, яке задовольняє умови: I) нульовий розв'язок СДР (1) при $u \equiv u^0(t, y, x, h)$ асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому; II) сума ряду

$$I_u(t_0, y_0, x_0, h_0) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{\infty} E\{W(t, \xi(t), x[t], \eta_0, u[t]) / \xi(t_0) = y_0, x(t_0) = x_0, \eta_{k_0}\} dt$$

скінченна; III) за довільними початковими умовами (3) виконана умова $I_{u^0}(t_0, y_0, x_0, h_0) = \min I_u(t_0, y_0, u_0, \eta_{k_0})$, де W – невід'ємна функція, визначена для $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ для $\forall \xi(t) = y \in \mathbb{Y}$, $\eta_k = h \in \mathbb{H}$, а min слід шукати за всіма керуваннями.

1. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х томах. – М.: Физматгиз. – 1994. – 544 с.; Т. 2. – 1994. – 473 с.
2. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с.

вул. Комарова 28-А, кв. 73, Чернівці, 58013
e-mail: yasinsk@cv.ukrtel.net

Метод функції Гріна в загальних моделях кондуктивних калоритметрів

Лусте І.П.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

В кондуктивних калориметрах вхідна енергія та потужність перетворюється в теплову енергію та відповідні теплові потоки через робоче тіло сенсора. Однак теплова інерція термоелектричного сенсора призводить до спотворення вимірюваної величини. Тому важливо дослідити сенсори у динамічному режимі та створити математичні методі відтворення з отриманих сигналів сенсора справжньої залежності від часу вимірюваної величини.

В лінійній теорії таких приладів [1] застосовується математичний апарат інтегральних перетворень. В літературі з термоелектричного приладобудування [2] існують поодинокі рекомендації експериментального визначення функції Гріна, яка використовується для відтворення істинної вимірюваної величини з експериментальних даних та дійсний перебіг у часі вимірюваного термоелектричним приладом теплового потоку.

Тому виникає задача побудови функції Гріна для загальної моделі термоелектричного вимірювального приладу. З цією метою створюється математична модель калориметра, в рамках якої розглядаються крайові задачі для нестаціонарного розподілу температур у приймальній ділянці, сенсорі та вході реєстратора: до системи рівнянь

$$c_i \delta_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = -\mathrm{div}(k_i \nabla T_i) - \nu_i \nabla T_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

з відповідними граничними умовами застосовується інтегральне перетворення Лапласа, внаслідок чого одержуються Лаплас-оригінали функції Гріна та шуканої істинної функції теплового потоку

1. Zielenkiewicz W. Theoretical models of calorimetric systems // J. Therm. Analyze. – 1978. – N 14. – P. 79 – 88.
2. Hemminger W., Honne G. Calorimetry, Fundamental and Practice, Weinhem. – 1984. – 175 p.

вул. Гакмана 15, кв. 7, Чернівці, 58000

Про один аспект застосування концепції квазіпохідних

Мазуренко В. В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Стасюк М. Ф.
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Відомо, що при дослідженні звичайних диференціальних виразів ідея введення квазіпохідних дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів або звести їх до мінімуму [1]. У доповіді йдеться про ще один аспект ефективного використання концепції квазіпохідних при дослідженні узагальнених задач на власні значення.

На проміжку $[0, l]$ розглядається нелінійна (за параметром λ) задача на власні значення

$$-\left[\alpha\left(\alpha y''\right)'\right]' - M^2 y'' = \lambda[(\alpha y')' + \alpha y''] + \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$y(0) = y(l) = 0, \quad \left[(\alpha(x)y''(x))' + Py'(x) + \frac{M^2}{\alpha(x)}y'(x)\right]_{\substack{x=0\\x=l}} = 0, \tag{2}$$

що виникає при дослідженні проблеми стійкості валу довжини l зі змінною жорсткістю $\alpha(x)$ під дією стискуючої сили $P = \lambda$ і крутильного моменту M [2, c. 26]. Окрім квадратичної залежності рівняння (1) від спектрального параметра λ, ще однією особливістю цієї задачі є входження параметра в крайові умови.

Досліджено спектральні властивості задачі (1), (2) у випадку, коли величина крутильного моменту M пропорційна (з коефіцієнтом k) величині стискуючої сили P. При цьому ефективно використовується концепція введення квазіпохідних. А саме, за допомогою вектора $\overline{Y} = col(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$, де $y^{[0]} = y$, $y^{[1]} = y'$ $y^{[2]} = \frac{\alpha}{k\lambda}y'' + \frac{1}{k}y$, $y^{[3]} = -\frac{1}{k\lambda^2}\alpha(\alpha y'')' - \frac{\alpha + k^2\lambda}{k\lambda}y'$ – квазіпохідні, узагальнена задача на власні значення (1), (2) зводиться до деякої іншої (добре вивченої) звичайної задачі на власні значення у просторі вектор-функцій. З еквівалентності цих задач негайно випливає, що усі власні значення λ_m задачі (1), (2) – дійсні, а відповідні нормовані власні функції $y_m(x)$ задовольняють умови ортогональності

$$\int_0^l \frac{1}{\alpha(x)} \sum_{i=0}^{3} \left(k^{i(3-i)} y_m^{[i]}(x) y_n^{[i]}(x) + (-1)^{i+1} k y_m^{[i]}(x) y_n^{[i+2(-1)^{i(i-1)/2}]}(x)\right) dx = \delta_{mn}, \tag{3}$$

де δ_{mn} – символ Кронекера.

Випадок, коли вал має постійний поперечний переріз, тобто $\alpha = \text{const}$, при заданому крутильному моменті M досліджено в [3].

1. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння // Препр. №1-94. – Львів: ІППММ АН України, 1994. – 53 с.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями): Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
3. Стасюк М. Про спектральні властивості однієї некласичної задачі на власні значення // Міжнар. математична конф. ім. В. Я. Скоробогатька (24-28 вересня, 2007, Дрогобич): Тези доповідей. – 2007. – С. 261.

mailto: mazvic@ukr.net; marta_stasiuk@yahoo.com

Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу систем рівнянь типу Колмогорова

Малицька Г.П.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u_j(t,X) - \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_{i+1}} u_j(t,X) = \sum_{k=0}^{2b}\sum_{r=1}^{m} a_k^{rj}(t,X)\partial_{x_1}^k u_r(t,X), \tag{1}$$

$$u_j(\tau,X) = u_{j0}(X); j=1,...,m, X=(x_1,...,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}, \tag{2}$$

де $\partial_t w_j(t,x_1) = \sum\limits_{k=0}^{2b}\sum\limits_{r=1}^{m} a_k^{rj}(t)\partial_{x_1}^k w_r(t,x_1),$ – система рівнянь рівномірно парабо–лічна за Петровським у $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x_1), 0\le t\le T, x_1\in\mathbb{R}^1\}, a_k^{rj}$– неперервні комплексно значні обмежені функції, $0\le\tau\le t\le T$.

Теорема. *Існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) (1), (2) $Z(t,X;\tau,S), t>\tau, \{X,S\}\in\mathbb{R}^{n+1}$, яка має вигляд*

$$Z(t,X;\tau,S) = (t-\tau)^{-\frac{(n+1)(bn+1)}{2b}}\Omega(t,\tau;(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}},(x_2-\xi_2+ +x_1(t-\tau))(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{2b}},...,(x_{n+1}-\xi_{n+1}+x_n(t-\tau)+x_{n-1}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+... +x_1\frac{(t-\tau)^n}{n!})(t-\tau)^{-\frac{2bn+1}{2b}})),$$

де $\Omega(t,\tau;z_1,...,z_{n+1})$–ціла функція аргументів $z_1,...,z_{n+1}$ порядку зростання $q = 2b(2b-1)^{-1}$ при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.

Для похідних справджується оцінка

$$|\partial_X^l Z(t,X;\tau,S)| \le C_k(t-\tau)^{-\frac{(n+1)(bn+1)+M}{2b}} \exp\{-c_0[(|x_1-\xi_1|(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}})^q + ... +(|x_{n+1}-\xi_{n+1}+x_n(t-\tau)+x_{n-1}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+...+x_1\frac{(t-\tau)^n}{n!}|(t-\tau)^{-\frac{2bn+1}{2b}}))^q]\},$$

де $M = \sum\limits_{j=1}^{n+1} k_j(2b(j-1)+1), l = k_1+...+k_{n+1}, k_j\in\mathbb{Z}^+, S=(\xi_1,...,\xi_{n+1}), C_k, c_0$– додатні сталі, які залежать від $m, n, \sup|a_k^{rj}(t)|, T$ сталої параболічності.

Нехай $Z^*(t,X;\tau,S)$ – ФМРЗК системи рівнянь спряженої за Лагранжем до (1), то ФМРЗК (1), (2) $Z(t,X;\tau,S)$ володіє властивістю нормальності

$$\acute{Z}(t,X;\tau,S) = Z^*(t,X;\tau,S)$$

1. Малицька Г.П. Про системи рівнянь типу Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від часової змінної. Деп. в ДНТБ України, 2007, №102 від 1.10.2007р., 0.9 др. арк. РЖДНР 2007, №1-2.

вул. Молодіжна 62/96, Івано-Франківськ, 76000
e-mail: malgp@meta.ua

Гладкі розв'язки еволюційних рівнянь вищого порядку по t з гармонійним осцилятором

Мартинюк О.В., Мартинюк С.В.

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Розглянемо рівняння

$$D_t^\beta u(t,x) + (-1)^{-[\beta]+1} D_t^{\{\beta\}} \widetilde{A}_f^\alpha u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \equiv \Omega_\infty, \tag{1}$$

де $\beta \in [-3,0)$, $\alpha > 0$ – фіксовані числа, $[\beta]$ – ціла, а $\{\beta\}$ – дробова частини числа β, $D_t^\beta \equiv I(\beta)$ – оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t у просторі D'_+, $\widetilde{A}_f^\alpha$ – степінь оператора $\widetilde{A}_f$:

$$L_2(\mathbb{R}) \supset D(\widetilde{A}_f^\alpha) \ni \sum_{k=0}^\infty c_k(\varphi)h_k = \varphi \longrightarrow \widetilde{A}_f^\alpha\varphi = \sum_{k=0}^\infty \mu_k^{\nu\alpha} c_k(\varphi)h_k \in L_2(\mathbb{R}),$$

де $D(\widetilde{A}_f^\alpha) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}): \ \sum\limits_{k=0}^\infty \mu_k^{2\nu\alpha}|c_k(\varphi)|^2 < \infty, \quad c_k(\varphi) = (\varphi, h_k), k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(\cdot,x) \in D'_+ \cap C^{-[\beta]}((0,\infty))$ при кожному $x \in \mathbb{R}$;

2) $u(t,\cdot) \in D(\widetilde{A}_f^\alpha) \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$; $u(t,\cdot) = 0$ при $t < 0$;

3) u задовольняє рівняння (1).

4) $\forall t > 0\ \exists c = c(t) > 0$: $\|D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c$.

Для (1) задамо початкову умову

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)|_{t=0} = \gamma, \tag{2}$$

де $\gamma \in (S_\omega^\omega)'$ ($(S_\omega^\omega)'$ – простір, топологічно спряжений до простору S_ω^ω; про простори типу S див. у [1]).

Під розв'язком задачі Коші (1), (2) розумітимемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (2) у тому сенсі, що

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot) \to \gamma, \quad t \to +0,$$

у просторі $(S_\omega^\omega)'$.

Теорема. *Задача Коші (1), (2) коректно розв'язна у просторі початкових даних $(S_\omega^\omega)'$. Її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^\infty (\theta(t)\exp\{-t\mu_k^{\nu\alpha/(-[\beta])}\} * g_{-\{\beta\}}(t)) c_k h_k(x), \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x \in \mathbb{R},$$

де $\gamma = \sum\limits_{k=0}^\infty c_k h_k \in (S_\omega^\omega)'$; $u(t,\cdot) \in S_\omega^\omega$ при кожному $t > 0$.

Таким чином, $(S_\omega^\omega)'$ є максимальним простором початкових даних задачі Коші, при яких відповідні розв'язки рівняння (1) є при $t > 0$ нескінченно диференційовними по x функціями.

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

вул. Українська 32, кв. 10, Чернівці, 58002

e-mail: alfaolga@rambler.ru

Оцінка фундаментальної матриці розв'язку параболічної системи з імпульсною дією в півпросторі по t

Масікевич М.І.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Для дослідження властивостей фундаментальної матриці розв'язків параболічної системи зі змінними коефіцієнтами в необмежених за часовою змінною областях, важливо одержати виконання умов Λ_ω [1]. Сформулюємо означення Λ_ω та розглянемо систему з імпульсною дією, для якої виконується ця умова.

Означення Λ_ω-умови. Параболічна система зі змінними коефіцієнтами задовольняє Λ_ω-умову, $\omega < 0$, якщо існує фундаментальна матриця розв'язку, для похідних якої справджується оцінка

$$|D_x^m Z(t,t_0,x,\xi)| \le Ca(t,t_0)^{k_m} e^{\omega(t-t_0)} e^{-c\left|\frac{x}{a(t,t_0)}\right|^q}.$$

Розглянемо в шарі $\Pi = (-\infty;T] \times E_n$ параболічну систему з параметром μ вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k \mu^{2b-|k|} u(t,x), \quad t \ne \tau_i \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x) \tag{2}$$

та імпульсною дією

$$\Delta_t u(t,x)|_{t=\tau_i} = B_i u(\tau_i,x), \ \ \tau_i < t_0 \le T, \ \tau_i \to -\infty \quad \text{при} \quad i \to \infty, \tag{3}$$

$$u(\tau_i,x) = \lim_{t\to\tau_i-0} u(t,x).$$

Ставилась задача з'ясувати, при яких обмеженнях на дані задачі можна отримати оцінку Λ_ω для фундаментальної матриці розв'язку задачі (1) – (3). Основний результат сформульований в наступній теоремі.

Теорема. *Нехай в шарі Π задано рівномірно параболічну систему (1), яка містить параметр μ і коефіцієнти якої залежать від t і x, задано початкову умову (2) та імпульсну дію (3). Нехай коефіцієнти $A_k(t,x)$ неперервні по t рівномірно щодо x при $|k| = 2b$ та задовольняють умову Гельдера по x при $t \in (-\infty;T]$, початкова функція $\varphi(x)$ є неперервною і обмеженою в E_n, матриці B_i сталі такі, що $E + B_i$ – невироджені.*

Якщо для системи з "замороженими" коефіцієнтами [3] виконується умова Λ_ω з $k_m = -n-|m|$, $a(t,t_0) = (t-t_0)^{\frac{1}{2b}}$ і $\omega = -\delta_0\mu^{2b}$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \ln C^i ||E+B_i||$ збіжний, то існує фундаментальна матриця розв'язків $Z(t,t_0,x,\xi)$ і при досить великому параметру μ для похідних $Z(t,t_0,x,\xi)$ справджується оцінка Λ_ω з $\omega < 0$, $\omega = -\delta_0\delta_1\mu^{2b}$, де δ_1 – довільна стала така, що $0 < \delta_1 < 1$.

1. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
2. А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Высшая школа: Головное изд., 1987. – 228 с.
3. Масікевич М.І., Матійчук М.І. Науковий вісник ЧНУ. Вип. 374. С. 88–95.

вул. Полєтаєва 6А, кв. 2, Чернівці, 58000
e-mail: mmi_marina@mail.ru

Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень

Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Фотій О.Г.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо для кожного $x \in X$ і для кожного $y \in Y$ відображення $F^x : Y \to Z$ і $F_y : X \to Z$ є неперервними, тобто неперервними як зверху, так і знизу. Під неперервністю відображення $F : X \times Y \to Z$ добутку топологічних просторів X і Y у топологічний простір Z у точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ ми розуміємо *сукупну неперервність у точці* p_0, тобто неперервність F у точці p_0 відносно топології добутку на $X \times Y$. У відповідності з цим множина $C(F)$ для такого відображення F – це множина його точок сукупної неперервності.

Починаючи з класичних робіт Р.Бера і В. Осґуда кінця XIX століття, математики впродовж XX століття і до наших днів активно досліджували множину $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$. Природно розглянути таку задачу і для многозначного відображення $F : X \times Y \to Z$. Наскільки нам відомо, дослідження в цьому напрямку раніше не проводилися.

Перший результат на цю тему легко отримується з відомого результату Калбрі-Труалліка [1], якщо використати метрику Гаусдорфа [2].

Теорема 1. *Нехай X, Y – топологічні простори, Z – метричний простір і F: $X \times Y \to Z$ – компактнозначне нарізно неперервне відображення. Тоді*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(F) = \{x \in X : (x, y) \in C(F)\}$ залишкова в X.

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(F) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(F)\}$ є залишковою в X.

Виникає питання наскільки істотною є та обставина, що відображення F у цій теоремі набуває лише компактних значень. Виявляється, що цю умову у випадку (i) можна дещо послабити.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *σ-компактним*, якщо він подається у вигляді зліченного об'єднання послідовності своїх компактних підпросторів X_n.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Z метризовний локально компактний σ-компактний простір і $F : X \times Y \to Z$ – замкненозначне нарізно неперервне відображення. Тоді множина $C_y(F)$ є залишковою в X для кожного $y \in Y$.*

1. Colbrix J., Troallic J.P. Aplications separement continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Sec. A. – 1979. – **288.** – P. 647–648.

2. Фотій О.Г. Зв'язки між неперервністю зверху і знизу, H^+-неперервністю і H^--неперервністю // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 189–196.

вул. Університетська 28, Чернівці, 58001
e-mail: ofotiy@ukr.net

До питання про зв'язки між нарізною неперервністю, квазінеперервністю і точковою розривністю

Маслюченко В.К., Філіпчук О.І.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

У праці [1] було поставлено питання: чи існують топологічні простори X і Y, такі, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною і разом з тим існує нарізно неперервна функція $f_0 : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не є точково розривною? Оскільки відповіді на нього поки що не знайдено, то природно цю проблему послабити, замінивши в ній числову пряму $\mathbb{R}$ на топологічний простір Z. А саме: чи існують такі топологічні простори X, Y і Z, що кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним, а деяке нарізно неперервне відображення $f_0 : X \times Y \to Z$ не є точково розривним? Виявляється, що відповідь на цю простішу проблему позитивна. Це випливає з наступних результатів.

Перший з них є наслідком теореми 1 з праці [2].

Теорема 1. *Для довільних топологічних просторів X і Y наступні умови рівносильні:*

(i) кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною;

(ii) для довільного цілком регулярного простору Z кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним.

Ще Віто Вольтерра помітив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною. Тому таким буде і довільне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ зі значеннями в будь-якому цілком регулярному просторі Z.

Розглянемо простір $Z_0 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ всіх функцій $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Цей простір є цілком регулярним, оскільки повна регулярність є мультиплікативною властивістю. Тому кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to Z_0$ є квазінеперервним.

Теорема 2. *Нехай $h_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – деяка нарізно неперервна функція, яка розривна тільки в точці $(0, 0)$, і $f_0(x, y)(u, v) = h_0(u - x, v - y)$ для довільних точок (x, y) і (u, v) з арифметичної площини $\mathbb{R}^2$. Тоді відображення $f_0 : \mathbb{R}^2 \to Z_0$ є нарізно неперервним і скрізь розривним.*

Якщо за h_0 взяти класичну функцію Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $sp(u, v) = \frac{2uv}{u^2+v^2}$ при $u^2 + v^2 \neq 0$ і $sp(0, 0) = 0$, то відповідна функція f_0 дасть нам відомий приклад Гофмана-Йорґенсена.

Таким чином, ми бачимо, що позитивну відповідь на поставлене питання дає трійка просторів $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z_0)$, причому для неї існує навіть скрізь розривне нарізно неперервне відображення $f_0 : \mathbb{R}^2 \to Z_0$.

1. Maslyuchenko V.K. Connections between joint and separate properties of functions of several variables. In "Some open problems of functional analysis and function theory"(Editors: V.K. Maslyuchenko, A.M. Plichko).– Extracta math. – 2005.– **20**, N1. – P.51-70.

2. Маслюченко В.К. Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 213–218.

вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012
e-mail: vmaslyuchenko@ukr.net

Квазінеперервність і функції зі зв'язним графіком

Маслюченко О.В., Нестеренко В.В.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення. Відображення f називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина U_1, така, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Відображення f є квазінеперервним, якщо воно є таким в кожній точці. Кажуть, що відображення f має *зв'язний графік*, якщо множина $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ є зв'язною в $X \times Y$. Відображення f має *властивість Дарбу*, якщо для кожної зв'язної множини G в X множина $f(G)$ є зв'язною в Y.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість проміжного значення*, якщо для довільних чисел p і q, таких, що $p \neq q$ і $f(p) < f(q)$, для кожного числа $y \in (f(p), f(q))$ існує число x, таке, що $y = f(x)$. З курсу математичного аналізу добре відомо, що кожна неперервна функція має властивість проміжного значення. В 1875р. Г.Дарбу показав, що існують функції з властивістю проміжного значення, які не є неперервними [1]. Оскільки він працював з функціями, які мають властивість проміжного значення, то такі функції називаються функціями типу Дарбу.

В роботах багатьох авторів (див., наприклад, [2,3,4]) вивчаються зв'язки між квазінеперервністю і властивостями типу Дарбу. Зокрема в [2] зауважується (правда, не вказується приклад), що властивість Дарбу і квазінеперервність, взагалі кажучи, не порівняльні.

Тут ми встановлюємо зв'язок між квазінеперервністю і властивістю зв'язного графіка, яка в класі всіх дійснозначних функцій сильніша за властивість Дарбу.

Занумерувавши всі канонічно замкнені множини в $[0, 1]^2$ у трансфінітну послідовність F_ξ, $|\xi| < \mathfrak{c}$, можна одержати наступний результат. Через frF позначимо межу множини F, тобто множину граничних точок множини F.

Теорема. *Існує функція $f : [0, 1] \to [0, 1]$, така, що $Gr(f) \cap frF \neq \emptyset$ для довільної канонічно замкненої множини F в $[0, 1]^2$.*

Наслідок. *Існує скрізь розривна (а значить, не квазінеперервна) функція $f : [0, 1] \to [0, 1]$ зі зв'язним графіком.*

1. Darboux G. Memoire sur les fonctions discontinues// Ann. Sci. Scuola Norm. Sup. – 1875. – 4. – P. 57–112.
2. Gibson R., Natkaniec T. Darboux like functions// Real Anal. Exch. – 1996. – 22, №2. – P. 492–533.
3. Jastrzebski J.M., Jedrzejewski J.M., Natkaniec T. On some subclasses of Darboux functions// Fundam. Math. – 1991. – 138, No.3. – P. 165–173.
4. Maliszewski A. On the averages of Darboux functions// Trans. Am. Math. Soc. – 1998. – 350, No.7. – P. 2833–2846.

вул. Університетська 28, Чернівці, 58012
e-mail: mathan@ukr.net

Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

Матвій О.В, Пернай С.А., Черевко І.М.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Розглядатимемо початкову задачу для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t)-\sum_{i=1}^{p}A_i(t)x(r-\tau_i)\Big]=f(t,x(t),x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_p)),t\in[a,T],p\geq 1, \quad (1)$$

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[a-\tau,a], \quad (2)$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, τ_i, $i=\overline{1,p}$ – запізнення, $0<\tau_i<\cdots<\tau_p=\tau$; $A_i(t)$, $i=\overline{1,p}$, $n\times n$-неперервні на $[a,T]$ матричні функції; $f(t,u_0,\ldots,u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t\in[a,T]$, $u_i\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{0,p}$, $\varphi(t)\in C[a-\tau,a]$.

Припустимо, що для рівняння (1) виконуються умови:

1) $\sum\limits_{i=1}^{p}\|A_i(t)\|\leq r<1$, $t\in[a,T]$;

2) $\|f(t,u_0',\ldots,u_p')-f(t,u_0'',\ldots,u_p'')\|\leq\sum\limits_{i=0}^{p}L_i\|u_i'-u_i''\|$, де $L_i>0$, u_i', $u_i''\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{0,p}$.

Нехай $m\in\mathbb{N}$. Визначимо функції $z_j(t)$, $j=\overline{0,m}$, як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dz}\Big[z_0(t)-\sum_{i=1}^{p}A_i(t)z_i(t)\Big]=f(t,z_0(t),z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_p}(t)), \quad (3)$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt}=\frac{m}{\tau}\Big(z_{j-1}(t)-z_j(t)\Big),j=\overline{1,m},t\in[a,T],$$

$$z_j(a)=\varphi\Big(a-\frac{\tau j}{m}\Big),j=\overline{0,m}, \quad (4)$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями $\dfrac{\tau l_j}{m}\leq\tau_j\leq\dfrac{\tau}{m}(l_j+1)$.

Будемо говорити, що розв'язки задачі Коші (3) – (4) апроксимують розв'язок початкової задачі (1) - (2), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$\Big\|x\Big(t-\frac{\tau j}{m}-z_i(t)\Big)\Big\|\to 0,\ j=\overline{0,m},t\in[a,T]\quad\text{при}\quad m\to\infty.$$

Теорема. *Нехай для рівняння (1) справджуються умови 1), 2). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (3) – (4) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (1) – (2) при $m\to\infty$ і $t\in[a,T]$.*

1. Матвій О.В., Черевко І.М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 28, №3. – С. 328-335.

вул. Червоноармійська 113, кв. 77, Чернівці, 58013
cherevko@chnu.cv.ua

Розвинення за власними функціями крайової задачі для векторного квазідиференціального рівняння з мірами

Махней О.В.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглядається КД вираз $L_{mn}(\bar{Y}) \equiv \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)})^{(m-j)}$, де $m,\ n$ – натуральні числа; $A_{i0}(x),\ A_{0j}(x)$ – квадратні матриці l-го порядку з квадратично сумовними на $[a,b]$ елементами; $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x),\ B_{ij}(x),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, – квадратні матриці l-го порядку з елементами, які мають обмежену варіацію на $[a,b]$ і є там неперервними справа; $\bar{Y}$ – вектор-стовпець. Штрих тут означає узагальнене диференціювання, а, отже, $A_{ij}(x)$ – матриці-міри. Припускаємо, що $A_{00} \equiv E$, $A_{01} \equiv A_{10} \equiv 0$.

Квазіпохідними функції $\bar{Y}(x)$, що відповідають виразу $L_{mn}(\bar{Y})$, будемо називати функції, які визначаються формулами $\bar{Y}^{[k]} = \bar{Y}^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, $\bar{Y}^{[n]} = \sum\limits_{i=0}^{n} A_{i0}\bar{Y}^{(n-i)}$, $\bar{Y}^{[n+k]} = -\,(\bar{Y}^{[n+k-1]})' + \sum\limits_{i=0}^{n} A_{ik}\bar{Y}^{(n-i)}$, $k = \overline{1,m}$.

Сформулюємо таку крайову задачу:

$$L_{mn}(\bar{Y}) = \lambda\bar{Y}, \tag{1}$$

$$U_\nu(\bar{Y}) = \sum_{j=0}^{r-1}\Big(\Gamma_{\nu j}\bar{Y}^{[j]}(a) + \Delta_{\nu j}\bar{Y}^{[j]}(b)\Big) = \bar{0}, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{2}$$

де $\Gamma_{\nu j},\quad \Delta_{\nu j}$ – матриці l-го порядку, складені з комплексних чисел; λ – комплексний параметр, $r = n + m$. Квазідиференціальний вираз $L_{mn}(\bar{Y})$ і крайові умови (2) породжують квазідиференціальний оператор L.

Теорема. *Нехай L – оператор, породжений регулярними крайовими умовами (див. [1, 2]), і нехай всі його власні значення є простими. Тоді будь-яка вектор-функція $f(x)$ з області визначення оператора L розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями $f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \bar{Y}_\nu(x)$, де при виконанні умови нормованості $\int\limits_a^b \bar{Z}_\nu^*(x)\bar{Y}_\nu(x)\,dx = 1$*

$$d_\nu = \int_a^b \bar{Z}_\nu^*(t)f(t)\,dt,$$

а $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(x)$ – власні функції крайової задачі (1), (2) та спряженої до неї, що відповідають власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$, зірочка означає ермітове спряження.

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
2. Махней О. В., Тацій Р. М. Асимптотика власних значень крайової задачі для векторного сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т. 12, вип. 7. – С. 110–120.

вул. Матейка 27/1, Івано-Франківськ, 76000
e-mail: makhney1@yahoo.com

Асимптотичний аналіз нелінійних крайових задач в густих з'єднаннях

Мельник Т.А.
(Київський національний університет ім. Т. Шевченка)

Багатомасштабне моделювання та обчислення є областю досліджень, що надзвичайно швидко розвивається, і в майбутньому матиме великий вплив на обчислювальну науку та прикладну математику. Це пов'язано з перспективою розвитку більш ефективних методів, які мають бути поєднанням нового класу чисельних і аналітичних прийомів моделювання. Одним з класів задач багатомасштабного моделювання є крайові задачі в збурених областях. Існує багато типів збурення областей, які потребують різних методів дослідження.

В доповіді буде розглянуто новий тип сингулярно збурених областей, а саме густі з'єднання (області типу густої щітки). Густим з'єднанням типу $k : p : d$ називається область в $\mathbb{R}^n$, яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що густо і періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k : p : d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям тіла з'єднання, зони приєднання і кожної з приєднаних тонких областей відповідно.

Зараз крайові задачі в густих з'єднаннях дуже інтенсивно вивчаються, оскільки такі з'єднання є прототипами багатьох сучасних інженерних та індустріальних конструкцій, а також фізичних і біологічних систем з дуже відмінними характерними розмірами. Так, останнім часом в альтернативних енергозберігаючих технологіях очистки води від шкідливих органічних домішок почали використовувати густі абсорбери (поглиначі), які мають форму густих з'єднань. Експериментально встановлено, що такі густі абсорбери виявляють хімічну активність без застосування зовнішніх полів в реакціях розщеплення органічних домішок у воді.

В доповіді буде представлена математична модель процесів в густих поглиначах як крайова задача для рівняння Пуассона в модельному густому з'єднанні типу $3 : 2 : 1$ з нелінійними умовами Фур'є на поверхнях тонких циліндрів, які формують дане з'єднання. Зроблений асимптотичний аналіз даної задачі, коли кількість тонких циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Зокрема, доведено теорему збіжності, яка показує, що нелінійні умовами Фур'є трансформуються в "вибуховий" член відповідного звичайного диференціального рівняння в регіоні, який заповнюється тонкими циліндрами в граничному переході. Якраз поява такого члена дає математичне обгрунтування вищезгаданих експериментальних даних і пояснює, чому посилюється хімічна активність між поверхнею густого поглинача і водою. Крім того, в роботі [1] обгрунтовано оцінки похибки між побудованою асимптотикою і точним розв'язком. Такі оцінки є одним із основних принципів, які мають бути застосовані до аналізу ефективності багатомасштабного методу.

1. Mel'nyk T. A. Homogenization of a boundary-value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008. Vol. 31. № 9. P. 1005–1027. published online: `http://dx.doi.org/10.1002/mma.951`

механіко-математичний факультет, КНУ
вул. Володимирська 64, Київ, 01033
e-mail: melnyk@imath.kiev.ua

Способи двосторонньої апроксимації періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь

Ментинський С.М., Шувар Б.А.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Двосторонні ітераційні методи мають відомі переваги перед іншими ітераційними методами, зумовлені тим, що отримані за їх допомогою наближення, дозволяють охопити вилкою шуканий розв'язок зверху та знизу, і монотонно звужувати отриману вилку. Проте їх застосування до розв'язування прикладних задач часто утрудняється різними несприятливими факторами, зокрема потребою врахування похибок визначення даних та похибок, які виникають при їх реалізації за допомогою обчислювальної техніки. За такої ситуації можуть втрачатися необхідні властивості монотонності відповідних операторів, постульовані при теоретичному обґрунтуванні цих методів (див. [1,2]).

Повідомлення присвячене дослідженню двостороннього алгоритму відшукання періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$x'(t) = f(t, x), \tag{1}$$

де $f(t,x) : (-\infty; +\infty) \times [a\,; b] \to E$ – неперервна за сукупністю аргументів, періодична за t з періодом T функція, $a, b \in E$, E – напівупорядкований простір. Шукаємо розв'язки системи (1), котрі задовольняють умову

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = x_0, \quad a \leq x(t) \leq b, \quad t \in (-\infty; +\infty) \tag{2}$$

Для побудови досторонніх наближень до розв'язку задачі (1), (2) використано конструкцію чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка [3] та припущення, що праву частину рівняння (1) можна подати у вигляді B-монотонної (за Покорним Ю. В.) за змінними y, z функції $F(t, y, z)$, для якої $F(t, x, x) \equiv f(t, x)$. Встановлені умови монотонності та рівномірної щодо $t \in [0; T]$ збіжності послідовностей верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі.

Пропонований підхід дозволяє враховувати вплив на двосторонність та монотонність отриманих послідовних наближень похибок визначення та представлення даних, які виникають при розв'язуванні прикладних задач із використанням сучасної обчислювальної техніки.

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наук. думка. – 1980. – 268 с.
2. Двосторонні наближені методи / Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. - 516 с.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1992. – 277 с.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: sergement@mail.ru

Аналог теореми Вінера для деяких функції з ℓ_∞.

Митрофанов М.А.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Розглянемо всеможливі відображення $f : \ell_\infty \to \mathbb{C}$ вигляду:

$$\sum_{|k|=0}^{+\infty} a_{(k)} e^{i(k)\left(\sum_j m_j x_j\right)} = \sum_{k_1+\ldots+k_l=0}^{+\infty} a_{(k_1,\ldots,k_l)} e^{i\sum_{j=1}^{+\infty} k_j x_j}, \tag{1}$$

де $m_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},1,0,\ldots) \in \ell_\infty$, (k) – мультиіндекс, а i – уявна одиниця.

Вважатимемо, що $(k) = (k_1,\ldots,k_n,0,\ldots)$, k_j — цілі числа, та $(k) \in \ell_1$, тобто починаючи з деякого l всі наступні k_j є нульовими. Під $|k|$ матимемо на увазі суму модулів k_j, а саме $|k| = |k_1| + \ldots + |k_l|$.

Коефіцієнти $a_{(k)}$ взяті з простору ℓ_1, тобто $\sum\limits_{|k|=0}^{+\infty} a_{(k)} < +\infty$ (*).

Лема. *Елементи вигляду (1) при умові (*) утворюють алгебру W.*

На алгебрі W введемо норму:

$$||f|| = \sum_{|k|=0}^{+\infty} |a_{(k)}|, \quad \text{де} \quad f \in W.$$

Зауважимо, що простір послідовностей $a_{(k_1,\ldots,k_l)}{}_{k_1,\ldots,k_l\in\mathbb{Z}}$ ізометрично ізоморфний $\ell_1 \bigotimes_\pi \cdots \bigotimes_\pi \ell_1$ проективному тензорному степеню ℓ_1 який в свою чергу ізометрично ізоморфний до ℓ_1. Отже W є ℓ_1, сумою просторів ℓ_1. Тому W є ізометрично ізоморфний (як банахів простір) до ℓ_1. Отже, W є банаховою алгеброю.

Теорема 1. *Елементи вигляду (1) задовольняють аналогу теореми Вінера, а саме, якщо $f(x_0) \in W, f(x_0) \neq 0$ то існує $\frac{1}{f(x_0)} \in W$, і $\frac{1}{f}$ має такий самий вигляд як f.*

З вигляду (1) та властивості експоненти випливає, що кожна функція $f_j = (e^{ix_j})^{k_j}$ є періодичною, тому можна вважати, що функція $e^{i\sum_{j=1}^{+\infty} k_j x_j}$ задана на $[0,2\pi]^{\mathbb{N}}$. Якщо покласти $(e^{ix_j}) = z_j$, то $f_j = z_j^{k_j}$ – функція задана на одиничному колі $S \in \mathbb{C}$. Тоді функція $\prod\limits_{j=1}^{\infty} z_j^{k_j}$ задана на нескінченному добутку кіл S^∞ в банаховому просторі ℓ_∞. Для $z = (z_1,\ldots z_l,\ldots) \in \ell_\infty$, функція (1) набуває вигляду:

$$f(z) = \sum_{k_1+\ldots+k_l=0}^{+\infty} a_{(k_1,\ldots,k_l)} \prod_{j=1}^{\infty} z_j^{k_j} = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_{(k)} z^{(k)} \tag{2}$$

У випадку коли k_j приймають лише додатні значення, функція (2) продовжується до аналітичної на одиничній кулі в ℓ_∞.

1. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 334 с.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача, відділ №17
вул. Наукова 3Б, Львів, 79060
e-mail: mishmit@rambler.ru

Послідовності незалежних випадкових величин з нульовим середнім в просторі L_1

Михайлюк В.В., Холоменюк В.А.
(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай $d \in (0; \frac{1}{2}]$. *Функцією типу Радемахера* назвемо функцію $r_d : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$r_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, \ t \in [0; d]; \\ -\frac{1}{2(1-d)}, \ t \in (d; 1]. \end{cases}$$

Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ назвемо *послідовністю функцій типу Радемахера, породженою послідовністю* $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ *чисел* $d_n \in (0, \frac{1}{2}]$, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції x_n і r_{d_n} однаково розподілені, тобто $\mu(\{t \in [0,1] : x_n(t) = \frac{1}{2d_n}\}) = d_n$ і $\mu(\{t \in [0,1] : x_n(t) = -\frac{1}{2(1-d_n)}\}) = 1 - d_n$.

З результату Л.Дора і Т.Старбьорда випливає, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій типу Радемахера $x_n \in L_1$, породжена послідовністю $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел $d_n \in (0,1]$ еквівалентна стандартному базису в просторі l_1 тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ збіжний. З іншого боку, з узагальненої нерівності Хінчина [2] випливає, що така послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_2 тоді і тільки тоді, коли $d_n > \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і деякого $\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій типу Радемахера не еквівалентна стандартному базису в l_2 тоді і тільки тоді, коли існує підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка еквівалентна стандартному базису в l_1. Разом з тим, послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій типу Радемахера, породжена послідовністю $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел $d_n = \frac{1}{n}$, не є еквівалентною стандартному базису в l_1, і жодна її підпослідовність не є еквівалентною стандартному базису в l_2. Тому природно виникає наступне питання.

Питання 1. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функцій типу Радемахера, яка не еквівалентна стандартному базису в l_1. Чи існує блок-базис даної послідовності, який еквівалентний стандартному базису в l_2?

Теорема 2. *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність незалежних функцій типу Радемахера така, що $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не еквівалентна стандартному базису в l_1. Тоді існує блок-базис даної послідовності, який еквівалентний стандартному базису в l_2.*

Теорема 3. *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – квазінормована послідовність двозначних незалежних випадкових величин з нульовим середнім, $X = \overline{sp\,[x_n : n \in \mathbb{N}]}$. Тоді або X ізоморфний до l_1, або X містить підпростір, ізоморфний до l_2.*

Тепер природно виникає наступне питання.

Питання 4. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – нормована послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім, $X = \overline{sp\,[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ і X не містить підпросторів, ізоморфних до l_2 (має властивість Шура, асимптотичний до l_1). Чи обов'язково X ізоморфний до l_1 (послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1)?

1. L.E. Dor, T. Starbird. Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables // Compositio Mathematica. – 1979. – **39**, N.2. – P. 141-175.
2. И.К. Мацак, А.Н. Пличко. Неравенство Хинчина для k-кратных произведений независимых случайных величин // Математические заметки. – 1988. – **44**, N.3. – С. 378-384

вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012
e-mail: mathan@ukr.net

Приклад нелінійного гіперциклічного оператора

Можировська З.Г.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Нехай X — лінійний простір Фреше. Лінійний неперервний оператор $T : X \to X$ називається *гіперциклічним*, якщо існує вектор $x \in X$ *орбіта* якого при T

$$\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

є щільною в X. Відомо багато прикладів гіперциклічних лінійних операторів (іншими словами, гіперциклічних 1-однорідних поліномів) на банахових просторах (див. огляд Гроссе-Ердмана [2]). Проте, Н. Бернардес показав, що не існує гіперциклічних m-однорідних поліномів степеня $m > 1$ на довільному банаховому просторі [1]. В [3] доведено, що існують гіперциклічні однорідні поліноми степеня $m > 1$ на просторах Фреше.

Моєю метою було розглянути новий метод побудови нелінійних гіперциклічних операторів композиції на просторах Фреше.

Нехай X — банахів простір, V — аналітичний автоморфізм з X на X і T — гіперциклічний оператор на X. Тоді $T^V := V \circ T \circ V^{-1}$ є гіперциклічним [2], і в загальному випадку, не є лінійним.

Приклад. Нехай $A(D)$ — диск-алгебра всіх аналітичних функцій на одиничному диску D з $\mathbb{C}$, які є неперервні на замиканні $\overline{D}$. Позначимо $X_1 = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}t^{2k+1} \in A(D)\right\}$ і $X_2 = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}t^{2k} \in A(D)\right\}$. Зрозуміло, що $A(D) = X_1 \oplus X_2$.

Для кожного $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in X_1$, $f_2 \in X_2$ приймемо

$$\begin{cases} V(f_1) & := & f_1, \\ V(f_2) & := & f_2 + f_1^2. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} V^{-1}(f_1) & = & f_1, \\ V^{-1}(f_2) & = & f_2 - f_1^2. \end{cases}$$

Отже V є поліноміальним автоморфізмом на X.

Нехай $T(f(t)) = f(\frac{t+1}{2})$. Відомо, що T є гіперциклічним на $A(D)$. Тоді оператор $T^V = VTV^{-1}$ є поліноміальним гіперциклічним оператором.

1. N. Bernades. On orbits of polynomial maps in Banach space // Quaestiones Math. – 1998. – **21**. – P. 311–318.
2. K.-G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). – 1999. – **36**. – P. 345–381.
3. A. Peris. Erratum to: “Chaotic polynomials on Fréchet spaces” // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**. – P. 3601–3603.

e-mail: nzoriana@yandex.ru

Побудова розв'язків динамічних крайових задач термомеханіки електропровідних циліндричних тіл

Мусій Р.С., Гошко Л.В., Гіссовська Н.Б., Шиндер К.В.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглядаються електропровідні тіла циліндричної форми віднесені до циліндричної системи координат (r, φ, z), вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії. Тіла знаходяться за дії зовнішнього нестаціонарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого значеннями дотичних компонент $H_i\,(i = z, \varphi)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ на внутрішній $r = r_0$ і зовнішній $r = r_1$ поверхнях порожнистих чи на зовнішній поверхні $r = R$ суцільних циліндрів. Розподіл нестаціонарного ЕМП створює в тілі неперервно розподілені нестаціонарні джерела Джоулевого тепла $Q = 1/\sigma \left(rot\vec{H}\right)^2$ і пондеромоторну силу $\vec{F} = \mu rot\vec{H}\times\vec{H}$. Ці два фізичні чинники впливу нестаціонарного ЕМП на електропровідне тіло зумовлюють в ньому нестаціонарні температурне поле T та поле напружень, що описується тензором динамічних напружень $\hat{\sigma}$.

Ключові функції задачі термодинаміки електропровідних циліндричних тіл, якими є вектор $\vec{H}$ температура T і компоненти $\sigma_{ik}\ (i,k = r,\varphi,z)$ тензора динамічних напружень $\hat{\sigma}$, визначаються зі системи послідовно зв'язаних рівнянь Максвелла і динамічної термопружності, яка для тіл даної геометрії записана в роботі [1]. Для знаходження ключових функцій $\Phi(r,\varphi,z,t) = \{H_i, T, \sigma_{ik}\}$ апроксимуємо їх розподіл за радіальною змінною r кубічним многочленом, тобто подаємо їх у вигляді

$$\Phi(r,\varphi,z,t) = \sum_{i=0}^{3} a_i^{\Phi}(\varphi,z,t) r^i. \tag{1}$$

Коефіцієнти $a_i^{\Phi}(\varphi,z,t)$ апроксимаційних многочленів (1) виражаються через інтегральні характеристики $\Phi_s(\varphi,z,t)$ ключових функцій (віднесені до відповідної елементарної площі чи елементарного моменту), тобто

$$\Phi_s(\varphi,z,t) = \frac{s+1}{r_1^{s+1} - r_0^{s+1}} \int_{r_0}^{r_1} \Phi(r,\varphi,z,t)\times r^{s+1} dr, \quad s = 1,2 \tag{2}$$

і задані граничні значення $\Phi^{\pm}(\varphi,z,t)$ цих функцій чи відомі граничні умови стосовно них на граничних поверхнях. Зауважимо, що у випадку суцільного циліндра у виразі (2) покладаємо $r_1^{s+1} - r_0^{s+1} = R^{s+1}, r_0 = 0, r_1 = R$.

Рівняння для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(\varphi,z,t)$ знайдено шляхом домноження на r^{s+1} вихідних рівнянь стосовно відповідних ключових функцій $\Phi(r,\varphi,z,t)$ та інтегрування по r з врахуванням співвідношень (1), (2). Отже, вихідні тривимірні крайові задачі на ключові функції $\Phi(r,\varphi,z,t)$ зведено до задач меншої на одиницю розмірності на інтегральні характеристики.

1. Мусій Р.С. Формулювання і методика розв'язування просторових і двовимірних динамічних крайових задач електромагнітотермопружності для циліндричних тіл // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, №3. – С. 131–139.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013

Наближене розвязування задач нелінійного деформування товстостінних гнучких тіл, покритих текстурою

Муха І.С.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Розглядаються задачі, що моделюють процес плоского деформування шаруватого товстостінного тіла під дією масових та повехневих сил. Математична модель включає в себе як рівняння теорії оболонок [1], так і рівняння просторової теорії пружності. У виразах для компонент тензора Гріна збережено нелінійні члени, які враховують помірні повороти у тілі при малих переміщеннях його точок. Варіаційна постановка такої задачі зводиться до мінімізації функціонала Лагранжа

$$L(\Delta \mathbf{u}^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_V \Delta\varepsilon(\Delta \mathbf{u}^{(i)}) : A : \Delta\varepsilon(\Delta \mathbf{u}^{(i)}) dV + \int\limits_V (\overset{\circ}{\sigma} + \sigma^{(i)}) : \Delta\varepsilon(\Delta \mathbf{u}^{(i)}) dV -$$

$$- \int\limits_V (\overset{\circ}{\mathbf{q}} + \mathbf{q}) \cdot \Delta \mathbf{u}^{(i)} dV - \int\limits_{S_\sigma} (\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_\nu + \tilde{\sigma}_\nu) \cdot \Delta \mathbf{u}^{(i)} dS \;\to\; \min$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(i)}\,|_{S_u} = 0$$

Лінеаризацію варіаційних постановок задач здійснено методом Ньютона- Канторовича [2,3]. Завдяки цьому розвязування нелінійної варіаційної задачі зводиться до низки лінійних задач. Для розв'язування лінеаризованих крайових задач запропоновано оригінальну методику побудови просторових скінченних елементів у вигляді пакету, пов'язаного зі скінченними елементами на деякій базовій поверхні. Ця методика дозволяє суттєво скоротити час формування ключової системи МСЕ та підвищує її точність. У порівнянні з теоріями оболонок вищих порядків вона вільна від будь-яких гіпотез стосовно характеру деформування тіла. Отримана схема дозволяє враховувати фізичні властивості кожного шару і будувати адекватні моделі шаруватих тіл.

За допомогою запропонованої схеми МСЕ вивчено процеси пружного деформування шаруватих тіл та проаналізовано числові результати. Досліджено збіжність ітераційної процедури методу Ньютона та збіжність по сітці скінченних елементів при розвязуванні лінеаризованої задачі. Чисельний аналіз низки модельних задач демонструє ефективність запропонованої методики.

1. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха И.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения //Прикладная механика – т. 36, № 8. – 2000. – С. 3–27.
2. Муха І.С. Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів.-Вісник Львів. ун-ту.Сер.мех-мат. – Вип. 46. – 1997. – С. 35–42
3. Mukha I.S., Savula Ya. H. Nonlinear deformation and stability analysis of thin-walled compound constructions. Proceedings of the International conference on nonlinear dynamics. Kharkov, 2004. P. 137–140.

ЛНУ, кафедра прикладної математики
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: imukha@franko.lviv.ua

Диференціально-символьний метод розв'язування задач з умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними

Нитребич З.М.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Запропоновано диференціально-символьний метод [1] розв'язування задач вигляду

$$LU(t,x) \equiv \frac{\partial^n U}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} A_k\big(t, \frac{\partial}{\partial x}\big) \frac{\partial^{n-k} U}{\partial t^{n-k}} = F(t,x), \;\; t \in I \subseteq \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^s, \qquad (1)$$

$$l_j U(t,x) = \Phi_j(x), \; j = \overline{1,n}, \;\; x \in \mathbb{R}^s, \qquad (2)$$

де $A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right), k = \overline{1,n}$, – матричні диференціальні вирази з неперервно залежними від t коефіцієнтами, символами яких для кожного фіксованого $t \in I$ є цілі аналітичні матриці, l_j – лінійні функціонали, що діють за змінною t, $U(t,x) = (U_1(t,x), \; U_2(t,x), \; \ldots, \; U_p(t,x))^\tau$, τ – символ транспонування, $s \in \mathbb{N}$. Припускаючи, що $\Phi_j(x), j = \overline{1,n}, F(t,x)$ – цілі аналітичні вектор-функції, розв'язки задач (1), (2) зображаються у вигляді $U(t,x) = \left[\sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j^\tau\big(\frac{\partial}{\partial \nu}\big) \left\{ T_j(t,\nu) e^{\nu \cdot x} \right\} \Big|_{\nu=0} + F^\tau\big(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\big) \left\{ G(t,\lambda,\nu) e^{\nu \cdot x} \right\} \Big|_{\lambda=0,\nu=0} \right]^\tau$, де $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s)$, $\nu \cdot x = \sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k x_k$, $T_j(t,\nu), j = \overline{1,n}$, $G(t,\lambda,\nu)$ – деякі матриці, залежні від t, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, λ відповідно.

Детально досліджено такі задачі:

1) задача Коші ($l_j U = \frac{\partial^{j-1} U}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}, I = (0; +\infty)$);

2) багатоточкова задача ($l_j U = U(t_j, x), t_1 < t_2 < \ldots < t_n, I = (t_1, t_n), p = 1$);

3) задача типу Діріхле ($n = 2m, p = 1, I = (0;T), T > 0, s = 1$, $A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_k \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m-2k}}, a_k \in \mathbb{R}$, $l_j U = \frac{\partial^{2j-2} U}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=0}$, $l_j U = \frac{\partial^{2j-2} U}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=T}, j = \overline{1,m}$);

4) нелокальна крайова задача ($n = 1, A_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), I = (0,T), l_j U = u(0,x) + \mu U(T,x), \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);

5) задача з інтегральною умовою ($n = 1, p = 1, A_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), I = (0;T)$, $l_j U = \int\limits_0^T U(t,x) dt$).

Для цих задач вказано спосіб побудови матриць $T_j(t,\nu), j = \overline{1,n}, G(t,\lambda,\nu)$, з'ясовано поведінку елементів матриць за параметрами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, λ. Виділено класи цілих аналітичних функцій як класи однозначної розв'язності задач. Крім того, у класі квазіполіномів вказано алгоритм знаходження розв'язків однорідних задач $LU(t,x) = 0$, $l_j U(t,x) = 0$.

Дослідження підтримані ДФФД України (Проект №14.1/017, Договір Ф-25/108).

1. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013

e-mail: znytrebych@gmail.com

Ітераційний підхід в обґрунтуванні інтегральних нерівностей

Обшта А.Ф., Шувар Б.А.
(Національний Університет "Львівська політехніка")
Копач М.І.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Відому нерівність Гронуолла про оцінку $u(t) \le x^*(t)$ розв'язку $u(t)$ нерівності $u(t) \le f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(t)\beta(s)u(s)ds$ за допомогою розв'язку $x^*(t)$ рівняння $x(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(t)\beta(s)x(s)ds$, яку Р. Белман називає "фундаментальним результатом теорії стійкості", а також нерівності Біхарі, Лангенхопа та інші численні її узагальнення (див., напр., [1]) часто використовують у якісній та у кількісній теорії диференціальних, інтегральних та інших класів операторних рівнянь. Для їх обґрунтування здебільшого послуговуються методикою, яка спонукає вимагати, зокрема, додатності не тільки функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$, а й функцій $f(t)$, $u(t)$. Отримувати теореми про оцінку $u \le x^*$ розв'язку u операторної нерівності $u \le Fu$ за допомогою розв'язку x^* рівняння $x = Fx$ з монотонним неперервним оператором F, що діє у напівупорядкованому просторі, можна за допомогою методу послідовних наближень, побудованих за формулою $x_{n+1} = Fx_n$. При цьому, наприклад, для нерівності $u(t) \le f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(t)\beta(s)q(u(s))ds \overset{df}{=} Fu$ отримується оцінка $u(t) \le x^*(t)$ без припущення про знакосталість $f(t)$, $u(t)$, якщо є додатніми $\alpha(t)$ та $\beta(t)$, а функція $g(x)$ є ізотонною і строго додатньою. Записуючи у явному вигляді вираз для $x^*(t)$, матимемо нерівність Біхарі при скалярному t. У випадку векторного аргументу t отримуються також лінійні і нелінійні аналоги нерівностей Вендроффа, які водночас є узагальненнями нерівностей Гронуолла і Біхарі. Докладніша інформація щодо цього міститься в [2] і [3]. Зазначимо, що більшість результатів про інтегральні нерівності, отриманих з використанням методу послідовних наближень, можна формулювати і в термінах неперервних функцій і в термінах інших класів функцій, зокрема, в тих чи інших класах розривних функцій.

1. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.
2. Шувар Б.А. Интегральные неравенства типа Бихари и Вендроффа. //Укр. матем. журн. – 1984. – т. 36, № 4. – С. 532–536.
3. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: В-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. В.Стефаника. 2007. – 515 с.
4. Matarazzo G., Pecoraro M., Tucci D. About new Bihar's lemma for discontinuons functions. – Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука. Матеріали конференції. – Київ: ТОВ "Задруга", 2008. – С. 722–724.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013

Гіперболічна варіаційна нерівність зі змінним степенем нелінійності

Панат О.Т.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$– обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : \ x \in \Omega, \ t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $p \in L^\infty(\Omega)$, $2 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) \leq p(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < +\infty$. Вважатимемо, що межа $\partial\Omega$ нашої області Ω складається з двох кусково-гладких гіперповерхонь Γ_1, Γ_2 ($\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$), $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$, $\operatorname{mes}\Gamma_2 > 0$.

Нехай $L^{p(x)}(\Omega)$ – узагальнений простір Лебега введений в [1], тобто $L^{p(x)}(\Omega) = \{w \ : \ \int\limits_\Omega |w(x)|^{p(x)}dx \ < \ +\infty\}$. Відомо, що цей простір є банаховим, якщо на ньому визначити норму за допомогою формули $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega |w(x)/\lambda|^{p(x)}dx \leq 1\}$. Так само визначаємо $L^{p(x)}(Q_T)$.

Введемо простори $H^1_{0,l}(\Omega)$, $V_1(\Omega)$, $V_{1,0}(\Omega)$ таким чином:

$$H^1_{0,l}(\Omega) = \left\{z \in H^1(\Omega) : z|_l = 0\right\}, \ \ l = \Gamma_1 \text{ або } l = S, \text{ де } S \subset \Gamma_1, \ \operatorname{mes} S > 0;$$

$V_1(\Omega)$ – гільбертів простір такий, що $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \subset V_1(\Omega) \subset H^1_{0,S}(\Omega)$;

$$V_{1,0}(\Omega) = \{z \in V_1(\Omega) : z|_{\Gamma_2} = 0\}.$$

Нехай V – випуклий замкнений конус такий, що $K \subset V_1(\Omega)$, $\varphi K \subset K$ для довільної функції $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для довільних функцій v, ψ розглядаємо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[v_t(v-u_t)\psi(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i t}\big((v-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}\big((v-u_t)\psi(x)\big)_{x_j} + c(x)|u_t|^{p(x)-2}u_t(v-u_t)\psi(x) -$$

$$-f(x,t)(v-u_t)\psi(x)\Big]\,dxdt \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}(v-u_t)^2\psi(x)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}(v-u_1)^2\psi(x)\,dx. \quad (1)$$

Означення. Функцію u, що задовольняє включення $u \in L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big)$, $u_t \in L^\infty\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $u_{tt} \in L^\infty\big((0,T); L^2(\Omega)\big)$, $u_t \in K$ майже для всіх $t \in [0,T]$, нерівність (1) для кожного $\tau \in (0,T]$, всіх $v \in L^2\big((0,T); V_{1,0}(\Omega)\big) \cap L^{p(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$, $v_t \in K$ майже для всіх $t \in [0,T]$ та довільних $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, а також початкову умову $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, називаємо сильним розв'язком варіаційної нерівності (1).

Одержано певні достатні умови існування єдиного сильного розв'язку варіаційної нерівності (1).

1. Kovacik O., Rakosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – 41 (116). – P. 592–618.

вул. Гната Хоткевича 30А, кв. 106, Львів-70, 79070
e-mail: panat_ot@mail.ru

Узагальнена задача Коші та інтегральне рівняння у ваговому L_1- просторі

Пасічник О.В.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай $\Omega = \{(x,t): \ x \in R, \ t > 0\}$. $D'(R)-$ простір лінійних неперервних функціоналів на просторі дійсних нескінченно диференційовних функцій в R. Розглянемо в Ω задачу Коші

$$f_{-\alpha}(t) * u(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t,u), \quad (x,t) \in \Omega, \ \alpha \in (0;1) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

де $f_\lambda \in D'(R)$ з носієм на $[0;+\infty)$ така, що

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ \\ f'_{1+\lambda}, & \lambda \leq 0, \end{cases}$$

$\theta(t)$-одинична функція Хевісайда; оператор згортки $f_{-\lambda}*$ (при $\lambda > 0$) називається оператором дробового диференціювання; $u_0 \in D'(R)$, фінітна та має порядок сингулярності $s(u_0) \leq s_0$, функція $g(x,t,z)$, $((x,t) \in \Omega, \ z \in R)$ неперервна за змінною z майже для всіх (x,t) та локально інтегровна за змінними x,t.

Введемо ваговий простір

$$m_k(\Omega) = \{u \in L_{1,loc}(\Omega): \ \|u\|_k = \int\limits_\Omega \rho^k(x,t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\}$$

з вагою $\rho(x,t) = \frac{1}{1+t^\beta} \min\{\rho_1(t), \rho_2(x)\} e^{-\mu(|x|^2 t^{-\alpha})^{\frac{1}{2-\alpha}}}$, $\rho_1(t) = O(t)$ при $t \to 0$, а $\rho_2(x) = O(|x|^{\frac{2}{\alpha}})$ при $x \to 0$, $k > k_0, k_0 = k_0(s_0, \alpha)$, $\beta > 1, \mu = \mu(\alpha) > 0$.

В просторі $m_k(\Omega)$ задача Коші (1),(2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню Вольтерри другого роду

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi, t-\tau) g(\xi, \tau, u(\xi,\tau)) d\xi + G_1(x,t) * u_0(x), \ \ (x,t) \in \Omega, \tag{3}$$

де $(G_0(x,t), G_1(x,t))-$ двокомпонентна функція Гріна відповідної лінійної задачі Коші.

Досліджено деякі інтегральні оператори з ядрами $G_0(x,t), G_1(x,t)$. На базі цих досліджень встановлено достатні умови існування розв'язку інтегрального рівняння (3), а отже і задачі (1),(2).

вул. Величковського 16/63, Львів, 79002
e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

Властивості розв'язків лінійних та квазілінійних узагальнених диференціальних рівнянь

Пахолок Б.Б.
(Національний університет "Львівська політехніка")

В доповіді досліджуються на проміжку $I = [0, \infty)$ властивості розв'язків узагальнених диференціальних рівнянь вигляду

$$X' = A'(t)X + G'(t), \tag{1}$$

де $X, G \in R^{n\times 1}$, $A \in R^{n\times n}$, $A(t), G(t) \in BV_{loc}^{+}(I)$ – банахів простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації. Похідні та рівність в (1) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій. Це означає, що збурення $G'(t)$ є мірою і може мати, зокрема вигляд $G'(t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\delta(t - t_n)$, де $G_n, G_0 \in R^{n\times 1}$ і $G_0(t)$ є сумовною за Лебегом. Розв'язки рівняння (1) існують в просторі $BV_{loc}^{+}(I)$. Припускаємо, що для рівняння (1) виконуються необхідні та достатні умови коректності цього рівняння в просторі мір, вперше отримані в роботах Р.М.Тація. Зауважимо, що до рівняння типу (1) зводиться важливий клас квазідиференціальних рівнянь $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}(t)x^{(n-i)})^{(m-j)} = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j+1}f_j^{(j+1)}(t)$ за таких умов на функції $a_{ij}(t)$, $f_j(t)$ на проміжку I: $a_{00}^{-1}(t)$–вимірна і обмежена; $a_{i0}(t), a_{0j}(t) \in L_2(I)$ для $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$;, $a_{ij}(t)$– узагальнені функції типу міри, а $f_j(t) \in BV_{loc}^{+}(I)$ для $j = 1, 2, ..., m$. Нехай $\Phi(t, t_0)$– еволюційний оператор рівняння $X' = A'(t)X$. Тоді розв'язок $X(t)$ рівняння (1), який задовольняє початкову умову

$$X(0) = 0 \tag{2}$$

записується у вигляді

$$X(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)dG(\tau). \tag{3}$$

Позначимо через $BV_1^{+}(I)$–простір неперервних справа на I функцій $g(t)$ таких, що $\sup\limits_{t\geq 0} \overset{t+1}{\underset{t}{V}} g(t) < \infty$.

Теорема. Нехай $A(t) \in BV_1^{+}(I)$. Для того, щоб для довільної функції $G(t) \in BV_1^{+}(I)$ відповідав, в силу (3), обмежений розв'язок задачі (1),(2) необхідно і достатньо виконання умови $\|\Phi(t, t_0)\| \leq \beta \exp(-\alpha(t - t_0))$, де сталі $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ не залежать від t_0.

В доповіді також досліджуються властивості розв'язків узагальненого квазілінійного рівняння $X' = A'(t)X + F(X, t) + G'(t)$ за деяких умов на нелінійне збурення $F(X, t)$. Отримані результати узагальнюють для простору узагальнених функцій типу міри деякі теореми з [1].

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости.–М.: Наука, 1967.–224с.

вул С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: bohdanbp@ukr.net

Двосторонні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з оцінкою головного члена похибки

Пелех Р.Я.

(ДП ПКТБ АСУ Залізничного транспорту, м. Львів)

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок), у загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. За певних умов навантаження або припущень дану систему можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, x \in [x_0, x_0 + L], \tag{1}$$

де *y(x)* – дійсний m – компонентний вектор, f – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами. В прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, вірно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач.

В даній роботі, використовуючи апарат неперервних дробів та теорію побудови методів типу Рунге-Кутта, пропонуються двосторонні числові методи розв'язуванні задачі (1). Запропоновані обчислювальні схеми дають можливість на кожному кроці отримувати не тільки наближений розв'язок, але і оцінку головного члена похибки результату.

Ці двосторонні формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| = \omega h^p K F(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h–крок інтегрування, $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n), K – константа, p – порядок точності, ω – параметр двосторонності. За допомогою параметрів ω і h досягається двосторонність і необхідна точність на всьому інтервалі інтегрування. Зауважимо, що у запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення $F(f)$ без додаткових звертань до правої частини диференціального рівнянь, що вигідно відрізняє ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів.

вул. Гоголя 1, Львів, 79013

Взаємозв'язок класичного підходу в МОЗР і теорії бінарних перетворень типу Дарбу

Починайко М.Д.
(Національний університет "Львівська Політехніка")
Сидоренко Ю.М.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Пряма і обернена задачі розсіяння для нестаціонарної системи рівнянь Дірака $LY = 0$ в характеристичних змінних, що має вигляд

$$\begin{array}{l} \frac{\partial Y_1(x,y)}{\partial x} + u_1(x,y)Y_2(x,y) = 0, \\ \frac{\partial Y_2(x,y)}{\partial y} + u_2(x,y)Y_1(x,y) = 0, \;\; u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2), \end{array} \tag{1}$$

розглядались Л.П. Нижником в роботах [1,2]. Розв'язок $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ системи (1) допускає асимптотики

$$\begin{array}{l} a_1(y) = Y_1(-\infty, y),\, b_1(y) = Y_1(+\infty, y), \\ a_2(x) = Y_2(x, -\infty),\, b_2(x) = Y_2(x, +\infty). \end{array} \tag{2}$$

Обернена задача розсіяння для системи (1) полягає в знаходженні коефіцієнтів (потенціалів) u_1, u_2 за заданим оператором розсіяння S, який визначається рівністю

$$b = Sa, \;\; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \;\; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ми будуємо оператори розсіяння для системи Дірака використовуючи бінарні перетворення Дарбу [3-5]. Показано, що один з цих операторів, в спеціальному випадку, співпадає з оператором розсіяння, отриманим Л. Нижником. Продемонстровано, що оператор розсіяння для системи Дірака отримується як композиція трьох автоперетворень Дарбу або факторизується двома операторами бінарних перетворень спеціального вигляду. Розглянуто також декілька редукцій цих операторів.

1. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ. – 1982. – 16, в. 1. – С. 80–82.
3. Сидоренко Ю.М. Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С. 1531–1550.
4. Sydorenko Yu. Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev - Petviashvili (cKP) flows // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2004. – 50, P.1. – P. 470–477.
5. Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. журн. – 2006. – т.58, №8. – С. 1097–1115.

вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Багатоточкова задача для параболічного рівняння в циліндричній області[1]

Пташник Б.Й., Тимків І.Р.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in Q \subset \mathbb{R}^p\}$, де Q – обмежена однозв'язна область з гладкою межею ∂Q, розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right) u = \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r L^{b(n-r)/2} u(t,x) = f(t,x), (t,x) \in D, \quad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad x \in \overline{Q}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \quad (2)$$

$$L^m u(t,x)\big|_{\partial Q} = 0, \quad t \in [0,T], \quad m = 0, 1, \ldots, (bn/2 - 1), \quad (3)$$

де $b \in \mathbb{N}$ – парне число, $A_r \in \mathbb{R}$; $L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ – еліптичний в Q диференціальний вираз із досить гладкими в $\overline{Q}$ коефіцієнтами, $c(x) \ge 0$. Рівняння (1) – рівномірно параболічне за Петровським в D, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ і довільного $x \in Q$ корені рівняння $W(\xi, -\sum_{i,j=1}^{p} h_{ij}(x)\eta_i\eta_j) = 0$ задовольняють нерівності $Re\,\xi_j \le -\delta\|\eta\|^b$, $\delta > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Позначимо: $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ та $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ відповідно систему власних функцій та множину власних значень задачі $LX + \lambda X = 0$, $LX\big|_{\partial Q} = 0$; $\mu_j(\lambda_k)$, $j = 1, \ldots, n$, – корені рівняння $W(\mu, -\lambda_k) = 0$, (вважаємо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ вони є різними); $w_k^q(\zeta,t) = (w_k^{q-1}(\zeta,t) - w_k^{q-1}(\mu_q(\lambda_k),t))/(\zeta - \mu_q(\lambda_k))$, $q = 1, \ldots, n-1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{\mu_q(\lambda_k)\}$, де $w_k^0(\zeta,t) = \exp(\zeta t)$, – розділені різниці; $u_{kq}(t) = w_k^{q-1}(\mu_q(\lambda_k), t)$, $q = 1, \ldots, n$;
$\Delta(\lambda_k) := \det\left\|u_{kq}(t_j)\right\|_{j,q=1}^{n} = \prod_{1 \le r < q \le n} (\mu_q(\lambda_k) - \mu_r(\lambda_k))^{-1} \det\left\|\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\right\|_{j,q=1}^{n}$;
$G_{\alpha,\gamma}(Q), \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, – простір функцій $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k X_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\varphi(x); G_{\alpha,\gamma}(Q)\| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_k| \exp(\alpha\lambda_k^\gamma)$; $a_0 = \left(p \max_{1 \le i,j \le p}\left(\max_{x \in \overline{Q}} h_{ij}(x)\right)\right)^{-b/2}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1) – (3) у просторі $C^{(n,bn)}(\overline{D})$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall \lambda_k \in \Lambda \qquad \det\left\|\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\right\|_{j,q=1}^{n} \ne 0. \quad (4)$$

Теорема 2. *Нехай справджується умова (4), існують такі додатні сталі ω та ν, що для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| > \lambda_k^{-\omega} \exp(-\nu\lambda_k^{b/2}). \quad (5)$$

Якщо $\varphi_j(x) \in G_{\alpha_1,b/2}(Q)$, $j = 1, \ldots, n$, $f(t,x) \in C([0,T]; G_{\alpha_2,b/2}(Q))$, $\alpha_1 > \nu - (n-1)\delta a_0 t_1$, $\alpha_2 > \nu + (T - nt_1)\delta a_0$, то в просторі $C^{(n,bn)}(\overline{D})$ існує розв'язок задачі (1) – (3), який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n$ нерівність (5) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ при $\omega > (p+b)n(n-1)/4$, $\nu > 2nT \max_{1 \le s \le n} (|A_{n-s}|)^{1/s}$.

[1]Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень (проект №14.1/017).
e-mail: tymkiv_if@ukr.net

Нелокальна задача Діріхле та задача оптимізації для параболічних рівнянь з виродженням

Пукальський І.Д.

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича)

Нехай t_0, T – фіксовані додатні числа, $t_0 < T$, D – обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\overline{\Omega} \subset D$. В області $Q = (0,T] \times D$ вивчається задача про знаходження функцій (u,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}_1(t,x,u,p)dx + \int\limits_D \mathcal{F}_2(x, u(t_1,x,p,q), \dots u(t_N,x,p,q), q)dx$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q) \in V = \{p \in C^{\alpha}(Q), \Big| \psi_1 \le p \le \psi_2, q \in C^{2+\alpha}(D) \Big| g_1 \le q \le g_2\}$, із яких $u(t,x,p,q)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t,x,p), \tag{1}$$

$$u(0,x,p,q) + \sum_{j=1}^N b_j(x)u(t_j,x,p,q) = \varphi(x,q), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = (0,T] \times \partial D. \tag{3}$$

Нехай Ω – деяка обмежена область простору $\mathbb{R}^n$, $\dim \Omega \le n-1$, $\overline{\Omega} \subset \Omega$, $\rho(x, \partial\Omega)$ – відстань точки $x \in D \setminus \Omega$ до Ω.

Задачу досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $t \to t_0$, $\rho(x,\partial\Omega) \to 0$:

$$a_{ij}(t,x) = O(|t-t_0|^{k_i+k_j}\rho^{\beta_i+\beta_j}(x,\partial\Omega)),$$

$$a_l(t,x) = O(|t-t_0|^{\delta_l}\rho^{\alpha_l}(x,\partial\Omega)), \quad l \in \{0,1,\dots,n\},$$

$$a_0(t,x) \le k < +\infty, k_i \in (-\infty,\infty), \beta_i \in (-\infty,\infty), \delta_i \le 0, \alpha_l \le 0,$$

$$\sup_D \sum_{j=1}^N b_j(x)e^{-\lambda t_j} < 1, \quad \lambda < -a_0.$$

При накладених умовах гладкості на коефіцієнти рівняння (1), нелокальної умови (2), крайової умови (3) функції ψ_1, ψ_2, g_1, g_2, f, φ, F_1, F_2 і поверхню ∂D встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі оптимального керування.

1. Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

вул.Південно-Кільцева 1, кв. 40, Чернівці, 58000

Про існування локально інтегровних розв'язків мішаної задачі в необмеженій області для нелінійного еволюційного рівняння

Пукач П.Я.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Досліджено першу мішану задачу для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(a_{ij}(x,t) \left|u_{tx_ix_j}\right|^{p_2-2} u_{tx_ix_j}\Big)_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(x,t) \left|u_{tx_i}\right|^{p_1-2} u_{tx_i}\Big)_{x_i} + d(x,t)u_t +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D^\beta \left(b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u + g(x,u_t) = f(x,t), \qquad (1)$$

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1} \cdots \partial x_n{}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, ..., n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Коефіцієнти та права частина рівняння (1) є дійснозначними функціями. Рівняння та системи описаного вигляду вивчають у теорії пружності.

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, Ω – необмежена область з регулярною межею $\partial\Omega$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для вищезгаданого рівняння мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0,$$

$S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$. Припускаємо, зокрема, що функції a_{ij}, a_i, $i,j = 1, ..., n$ можуть зростати степеневим чином при $R \to +\infty$. Функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathrm{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $\left(g(x,\xi) - g(x,\eta)\right)(\xi - \eta) \ge g_0 \left|\xi - \eta\right|^p$, $g_0 = \mathrm{const} > 0$, $|g(x,\eta)| \le g_1 |\eta|^{p-1}$, $g_1 = \mathrm{const} > 0$, $p > 2$. Початкові дані u_0, u_1 належать до певних просторів локально інтегровних функцій.

Узагальненим розв'язком мішаної задачі називаємо функцію u, що належить до деяких просторів локально інтегровних функцій, задовольняє початкові та крайові умови і певну інтегральну тотожність.

Отримано умови існування узагальненого розв'язку без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини рівняння та початкових даних. Доповнено та розвинуто результати дослідження мішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння п'ятого порядку в необмеженій області, викладені в [1], на випадок $2 < p_2 < p_1 < p$.

1. Пукач П.Я. Мішана задача в необмеженій області для рівняння типу коливань балки зі збуреним лінійним оператором// Математичний вісник Наук. тов. ім. Шевченка.– 2007.– № 4. – С. 248–263.

вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

e-mail: ppukach@i.ua

Задача Коші для одного класу еволюційних рівняннь нескінченного порядку

Ратушняк В.П.
(Чернівецький торгівельно-економічний інститут КНТЕ)

У теорії задачі Коші для параболічних рівнянь (ППДР) з псевдо диференціальними операторами (ПДО), побудованими за негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК), за допомогою яких одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь; при цьому асимптотика ФРЗК вже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Якщо символ ПДО не залежить від просторових координат, то задача Коші для ППДР коректно розв'язана в просторі узагальнених функцій типу розподілів; при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРКЗ з початковою умовою, яка є узагальненою функцією. Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана, Я.М. Дріня, М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Літовченка та ін.

Природним узагальненням параболічних псевдодиференціальних рівнянь є еволюційні рівняння, які містять ПДО нескінченного порядку, тобто оператори вигляду $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, де $A = F^{-1}[aF]$ – псевдодиференціальний оператор, побудований за негладким однорідним символом-функцією a, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є, $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ – функція, яка задовольняє певні умови. Тут розвивається теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь вигляду $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k u = 0$, $(t, x) \in (0, T] \times R^n$, у класі початкових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів; при цьому, попередньо знайдено умови на функцію f, за яких у певному просторі основних функцій оператор $f(A)$ визначений і є неперервним.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для диференциально-операторних уравнений. - Киев: Наукова думка,1984. – 283с.

Інтегральні співвідношення з узагальненими гіпергеометричними функціями

Рум'янцева О.В.
(Національний технічний університет України "КПІ")

За допомогою методів дробового інтегро-диференціювання одержано низку інтегральних співвідношень, що містять узагальнені (за Wright-ом) гіпергеометричні функції. Подамо одну із теорем.

Теорема. За умов існування τ-узагальненої гіпергеометричної функції ${}_2F_1^\tau(a,b;c;z)$ [1] виконуються наступні інтегральні співвідношення:

$$1)\quad {}_2F_1^\tau(a,b;c;z^\tau) = \frac{\Gamma(c)z^{1-c}}{\Gamma(c-\lambda)\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^z y^{\lambda-1}(z-y)^{c-\lambda-1}\ {}_2F_1^\tau(a,b;\lambda;y^\tau z)dy, \qquad (1)$$

$$(\tau \in R, \tau > 0,\ Rec > Re\lambda > 0);$$

$$2)\quad \int\limits_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{c-\lambda-1}\ {}_2F_1^\tau(a,b;\lambda;x^\tau z)dx = \Gamma(c-\lambda)\Gamma(\lambda)\Gamma^{-1}(c)\ {}_2F_1^\tau(a,b;c;z) \quad (2)$$

$$(Rec > Re\lambda > 0,\ \tau \in R, \tau > 0; (b-\lambda) - \text{додатне ціле})$$

$$3)\quad {}_2F_1^\tau(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda)\Gamma(c-\lambda+\mu-\nu)} \int\limits_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{c-\lambda+\mu-\nu-1} \times \qquad (3)$$

$$\times {}_2F_1(\mu-\lambda,\ c-\lambda;\ c-\lambda+\mu-\nu;\ 1-x)\ {}_3F_2^\tau(a,b,\mu;\lambda,\nu;x^\tau z)dx,$$

де $Re\lambda > 0,\ Re\nu > 0,\ Re(c-\lambda+\mu-\nu) > 0,\ z \neq 1,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ {}_2F_1^\tau,\ {}_3F_2^\tau-$ узагальнені гіпергеометричні функції типу Wright'а.

1. Вірченко Н.О., Рум'яцева О.В. $(\tau,\beta)-$узагальнена гіпергеометрична функція Гауса та її застосування// Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №1. – С.139–143.

вул. Полярна 11, кв. 18, Київ, 04201
e-mail: LASTIC@users.ntu-kpi.kiev.ua

Нелокальна задача для рівнянь із частинними похідними та квадратично залежними коефіцієнтами

Савка І.Я.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Нелокальні крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність нестійка відносно як завгодно малих змін параметрів задачі.

Позначимо: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(ik, x) = i\sum_{j=1}^{p} k_j x_j$, $\widetilde{k} = \left(1 + \sum_{j=1}^{p} k_j^2\right)^{1/2}$, $s \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$; $\partial_t^n = \dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$, $\partial_x^s = \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots x_p^{s_p}}$;

$\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $\mathcal{D} = (0, T) \times \Omega$, $T > 0$;

$H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, – гільбертів простір (простір Соболєва) 2π-періодичних функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(ik, x)$ із скінченною нормою $\|\varphi\|_{H_q(\Omega)} = \big(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} |\varphi_k|^2\big)^{1/2}$;

$H_q^r(\mathcal{D})$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t, x)$ із скінченною нормою $\|u\|_{H_q^r(\mathcal{D})} = \big(\sum\limits_{j=0}^{r} \max\limits_{t \in [0,T]} \|\partial_t^j u(t, \cdot)\|_{H_{q-j}(\Omega)}\big)^{1/2}$.

В області $\mathcal{D}$ розглянемо нелокальну крайову задачу

$$\partial_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x) \partial_t^{n-j} u = 0, \qquad \partial_t^{j-1} u|_{t=0} - \mu \partial_t^{i-1} u|_{t=T} = \varphi_j(x), \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

де $A_j(\partial_x) = \sum\limits_{|s| \leq j} A_s^j \partial_x^s$, причому $A_n(\partial_x) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i \partial_{x_i}^n + \sum' A_s^j \partial_x^s$ і у сумі $\sum'$ немає старших чистих похідних, A_s^j, μ, a_i, – дійсні числа, функції φ_j із шкали $H_q(\Omega)$. Вважаємо, що коефіцієнти $a_1, \ldots, a_p$ пов'язані квадратичною залежністю

$$\sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} a_i a_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i + \alpha_0 = 0, \tag{2}$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Відомо [1], що у випадку незалежних коефіцієнтів $a_1, \ldots, a_p$ диференціального рівняння задача (1) розв'язна у просторах Соболєва для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів $(a_1, \ldots, a_p)$, а існування її розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників.

Однак ці результати не можна безпосередньо використати у випадку задачі (1), (2), бо встановлені раніше метричні теореми не розрізняють алгебричний многовид (2) – множину нульової міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$. Тому виникає питання про доведення нових теорем про оцінку малих знаменників на многовиді (2).

На основі доведених теорем встановлено умови єдиності та існування розв'язку u задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва.

Дослідження підтримані ДФФД України (Проект №14.1/017, Договір Ф-25/108).

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

вул. Дудаєва 15, кім. 58, Львів, 79005
e-mail: s-i@ukr.net

Нелінійна модель впливу потоку енергії на термочутливе циліндричне тіло

Сеник А.П.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Застосування концентрованих потоків енергії (КПЕ), якими, зокрема, є лазерне та електронне випромінювання, потік іонів і т.п. в наукових та технологічних цілях базується на результатах досліджень можливості отримання бажаних фізико-хімічних ефектів. Згідно з концепцією вважається що, температурне поле є єдиною незалежною характеристикою процесу, через яку визначаються всі останні, тому дослідження дії КПЕ на тіло проводиться в два етапи. На першому - будується математична модель ефективного теплового джерела (формулюється крайова задача теплопровідності) в якості параметрів якого є теплофізичні та геометричні характеристики об'єкту, характеристики технологічного процесу та КПЕ і визначається температурне поле. На другому - температурне поле вважається заданим і розраховуються швидкоплинні процеси та процеси, що не впливають на розподіл температурного поля.

В роботі подано математичну модель впливу КПЕ на поверхню циліндричного тіла, фізико-механічні характеристики матеріалу якого вважаються функціями температури. Початкова температура тіла рівна температурі оточуючого середовища $t_c = const$. Впливом структурно-фазових перетворень матеріалу на температуру тіла знехтувано.

Для визначення нестаціонарного температурного поля використаємо нелінійну задачу теплопровідності, що складається з рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\left(t\right)\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\left(t\right)\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\left(t\right)\frac{\partial t}{\partial z}\right)=c\left(t\right)\frac{\partial t}{\partial\tau},$$

граничної умови на боковій поверхні тіла $\lambda\left(t\right)\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=R}=\gamma\left(t\right)\ q\left(\varphi,\ z,\ \tau\right)$, умови на краях циліндра, а також початкової умови. Тут λ(t), c(t), γ(t) - коефіцієнти теплопровідності, об'ємної теплоємності і теплопоглинаючої здатності матеріалу відповідно, q- функція розподілення густини потужності теплового потоку на боковій поверхні циліндра. Розв'язок задачі теплопровідності будується за допомогою змінної Кіргофа.

Задача термопружності зводиться до визначення компонент тензорів напружень $\sigma\alpha\beta$ і деформацій $\varepsilon\alpha\beta$, а також вектора переміщень uα (α, β = r, φ, z), що задовольняють рівнянням

$$\left(\Delta-\frac{1}{r^{2}}\right)u_{r}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}=2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\ \Phi\left(t\right)-\frac{1}{G^{2}}\left[\frac{\partial G}{\partial r}\sigma_{rr}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial\varphi}\sigma_{r\varphi}+\frac{\partial G}{\partial z}\sigma_{rz}\right],$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{r^{2}}\right)u_{\varphi}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial e}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial u_{r}}{\partial\varphi}=\frac{2}{r}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ \Phi\left(t\right)-\frac{1}{G^{2}}\left[\frac{\partial G}{\partial r}\sigma_{r\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial\varphi}\sigma_{\varphi\varphi}+\frac{\partial G}{\partial z}\sigma_{\varphi z}\right],$$

$$\Delta u_{z}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}=2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\ \Phi\left(t\right)-\frac{1}{G^{2}}\left[\frac{\partial G}{\partial r}\sigma_{rz}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial\varphi}\sigma_{\varphi z}+\frac{\partial G}{\partial z}\sigma_{zz}\right].$$

Розв'язок представленої системи будується методом послідовних наближень. На основі отриманих розв'язків проведено ряд чисельних досліджень для різних умов нагріву.

Неперервні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості

Сівак О.А.
(Національний технічний університет України "КПІ")

Розглядається система лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + Bx(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in R$, $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $B = \{b_{ij}\}$, $-$дійсна стала $(n \times n)$-матриця, $F(t)-$дійсний вектор розмірності n, $q-$деяка дійсна стала. При цьому вивчаються питання існування неперервних розв'язків і досліджується структура їх множини. Зокрема, доведені наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < \lambda_i < 1, \;\; i = 1, ..., n, \;\; q > 1$*;*

2) $\theta = \dfrac{b}{1 - \lambda^*} < 1,$

де $b = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, ..., n\}$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, ..., n\}$*;*

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in R$ *функціями і* $\sup\limits_t |F(t)| = M < \infty$.

Тоді система рівнянь (1) має неперервний і обмежений при $t \in R$ *розв'язок* $y(t)$ *у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, ..., -$*деякі неперервні обмежені при* $t \in R$ *вектор-функції.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < \lambda_i < 1, \;\; i = 1, ..., n, \;\; q > 1$*;*

2) $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $\triangle = \dfrac{b}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1.$

Тоді відповідна (1) однорідна система рівнянь має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Аналогічні результати отримані для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = \Lambda(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{2}$$

де $t \in R$, $\Lambda(t), B(t), -$дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)-$дійсний вектор розмірності n, $q-$деяка дійсна стала.

вул. Металістів 4, к.5-02(3), Київ, 03057

Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею

Снітко Г.А.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ - невідома функція, розглянуто обернену задачу визначення коефіцієнта $c = c(t)$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad \int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}, t = t$ задачу (1)-(4) зведено до оберненої з невідомими $h(t), c(t), v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови існування класичного розв'язку вказаної задачі, локального за часом.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*
1) $a, b, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $a_x(x,t)$ *за змінною* x *задовольняє умову Гельдера з показником* $\alpha, 0 < \alpha < 1$, $\varphi \in C^1[0,\infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,4}$;
2) $a(x,t) > 0$, $f(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,4}$, $t \in [0,T]$;
3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\quad \varphi(h(0)) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0 : 0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h,c,v) \in C^1[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C(\overline{Q}_{T_0})$ *задачі (1)-(4), такий що* $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$.

Єдиність розв'язку задачі випливає з властивостей розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Теорема 2. *Нехай* $a \in C^{2,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $b, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(4) $(h,c,v) \in C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0, t \in [0,T]$ *єдиний.*

вул. Городоцька 209, кв. 2, Львів, 79015
e-mail: snitkog@ukr.net

Алгебраїчне представлення ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному конусі

Соломко А.В.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Для довільно вибраних векторів $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ і $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$, де $\nu \succeq 1$, $b \succ a$, визначимо простір нескінченно диференційованих функцій з носіями в n-вимірному паралелепіпеді $[a, b]$ вигляду $G_\nu[a, b] = \{\varphi : \quad \operatorname{supp} \varphi \subset [a, b], \quad \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} := \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}^n_+} \sup\limits_{t \in [a,b]} \frac{|\mathcal{D}^k \varphi(t)|}{\nu^k k^{k\aleph}} < \infty\}$. Вище $\aleph > 1$ – фіксоване, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $k^{k\aleph} = k_1^{k_1 \aleph} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n \aleph}$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$, $\mathcal{D}^k = \mathcal{D}_1^{k_1} \dots \mathcal{D}_n^{k_n}$, де $\mathcal{D}_j^{k_j} = \frac{(-i)^{k_j} \partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$ для всіх $j = 1, \dots, n$.

Розглянемо локально опуклу індуктивну границю вигляду

$$G(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\nu \succeq 1} \bigcup_{b \succ a} G_\nu[a, b] = \liminf_{b \succ a, \, |\nu| \to \infty} G_\nu[a, b],$$

відносно неперервних вкладень $G_\nu[a, b] \subset G_{\nu'}[a', b']$ таких, що $1 \preceq \nu \prec \nu'$ і $[a, b] \subset [a', b']$. Неважко перевірити, що простір $G(\mathbb{R}^n)$ є алгеброю відносно операції поточкового множення функцій.

Нехай $n = 1$, тоді для довільної функції $\varphi(t) \in G(\mathbb{R})$ визначимо оператор множення на функцію Хевісайда: $\Theta : G(\mathbb{R}) \ni \varphi(t) \to \varphi(\tau) = \theta(t)\varphi(t), \tau \in [0, +\infty)$. Фактор-простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) := G(\mathbb{R})/\operatorname{Ker} \Theta$ будемо називати простором ультрадиференційованих функцій класу Жевре на додатній півосі.

Простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) := \mathcal{G}(\mathbb{R}_+) \widetilde{\otimes}_p \dots \widetilde{\otimes}_p \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$, де через $\widetilde{\otimes}_p$ позначено поповнення тензорного добутку в проективній топології, називаємо простором ультрадиференційованих функцій класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному конусі.

Сильно спряжений простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ будемо позначати через $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$. Ці функціонали будемо називати ультрарозподілами класу Жевре в конусі $\mathbb{R}^n_+$. Зауважимо, що простір $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ є алгеброю відносно операції згортки ультрарозподілів.

Теорема. *Нехай задано відображення* $\Phi : \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni f \to f_\Phi \in L[\widehat{\mathcal{G}}_+]$, *де* $L[\widehat{\mathcal{G}}_+]$ *– простір лінійних неперервних відображень над Фур'є-образом простору* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ *з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах, і* f_Φ *діє на кожну функцію* $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{G}}_+$ *за правилом* $(f_\Phi \widehat{\varphi})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \langle f(\sigma), U_\sigma \varphi(\tau) \rangle e^{-i(\tau, \xi)} d\tau, \tau, \sigma \in \mathbb{R}^n_+, \xi \in \mathbb{R}^n$, U_σ *– n-параметрична одностайно неперервна* (C_o)*-напівгрупа операторів зсуву.*

Перетворення Φ *здійснює лінійний топологічний ізоморфізм згорткової алгебри* $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ *на підалгебру* $\Phi[\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)]$ *тих операторів, які комутують з оператором* $\widehat{U}_\sigma = F \circ U_\sigma \circ F^{-1}$, *де* F *та* F^{-1} *– відповідно оператор перетворення Фур'є простору* $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+)$ *та обернений до нього.*

1. Лопушанський О.В., Соломко А.В. Операторне числення для генераторів сильно неперервних операторних напівгруп в алгебрі ультрарозподілів класу Жевре. Препринт. – Львів: ІППММ, 2007. – 22 с.

2. Komatsu H. Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. – №20. – 1973. – P. 25–105.

e-mail: ansolvas@rambler.ru

Суперпозиції лінійних функцій, що породжують вільні напівгрупи

Сумарюк М.І.
(Київський національний університет ім. Т. Шевченка)

Деякі методи дослідження питання про вільність однієї спеціальної групи, що породжується двома дробово-лінійними перетвореннями, запропоновано у статті Ліндона та Ульмана [1]. У даному випадку розглянемо питання про вільність напівгрупи, яка породжується деякою системою лінійних функцій $\{f_i, i \in I\}$ індексованих множиною I, де кожна функція розглядається на всій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Таким чином, одержуємо напівгрупу $G =< f_i, i \in I >$, породжену цими функціями відносно операції суперпозиції функцій.

Символом $\mathrm{Arg}z$ позначимо аргумент комплексного числа $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тоді, оскільки кожне лінійне перетворення точок комплексної площини зводиться до операцій повороту, розтягу та паралельного перенесення радіус-векторів цих точок, то на основі певних геометричних міркувань приходимо до такого твердження, яке визначає достатні умови вільності напівгруп.

Теорема 1. *Якщо для довільних різних $l (l \in \mathbb{N})$ функцій*

$$g_r = a_r z + b_r, a_r \neq 0, r = \overline{1, l},$$

із системи лінійних функцій $\{f_i, i \in I\}$ та цілочисельного набору

$$(0, 0, \ldots, 0) \neq (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \in \mathbb{Z}^l, l \in \mathbb{N},$$

виконується умова

$$\sum_{r=1}^{l} |\alpha_r| \mathrm{Arg} a_r \neq 2k\pi, l \in \mathbb{N},$$

для деяких $k \in \mathbb{Z}$, або

$$\sum_{r=1}^{l} |\alpha_r| b_r \neq 0,$$

то напівгрупа G є вільною напівгрупою.

Наведена теорема може бути застосована, наприклад, до напівгрупи, що породжується такими лінійними функціями

$$f_1 = iz + 1, f_2 = z - i, z \in \mathbb{C}.$$

У результаті одержуємо твердження.

Теорема 2. *Напіврупа, породжена лінійними перетвореннями f_1 та f_2, є вільною напівгрупою.*

1. Lindon R.S., Ullman J.L. Groups generated by two parabolic linear fractional transformations. Can. J. Math. 1969. V21. №6. P.1388–1403.

вул. Васильківська 94/908, Київ
e-mail: MishaSumaryuk@ukr.net

До побудови числових розв'язків інтегральних рівнянь з сингулярними ядрами

Сухорольський М.А., Гошко Л.В., Шопа Т.В.
(Національний університет "Львівська політехніка")

У даній роботі розглядається метод розв'язування крайових задач для рівнянь в частинних похідних в двозв'язній області, який базується на послідовнісному підході до зображення узагальнених функцій, які дають змогу шукати фундаментальний розв'язок відповідних задач методом Фур'є. Зображення дельта функції Дірака у прямокутнику подається у вигляді фінітної дельтаподібної слабко збіжної послідовності неперервних функцій:

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\xi-\xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \le \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon; \end{cases}$$

де $g(\xi)$ $(0 \le \xi \le 1)$ – спадна гладка функція; $g(1) = 0$; $\int\limits_0^1 g(\xi)d\xi = 1$.

Методом граничних інтегральних рівнянь задачі для рівнянь в частинних похідних зводяться до інтегральних рівнянь, в яких функція Гріна у прямокутнику представлена як границя узагальнених сум тригонометричного ряду. Такий підхід дозволяє розглядати системи диференціальних рівнянь, зводячи їх до систем інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння розв'язуються методом колокацій, в наслідок якого ми отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Числову схему проілюстровано на прикладі рівняння Гельмгольца в прямокутнику з еліптичним отвором з різними типами крайових умов на контурі та з однорідними умовами на краю прямокутника. Досліджено два випадки розподілу фіктивних функцій на прямолінійних відрізках розбиття контуру в методі колокацій та вплив параметрів чисельної апроксимації на точність і стійкість розв'язку. Наведено приклади застосування такого роду задач в механіці теорії пластин та оболонок.

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с

НУ "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013
tetyana.sh@gmail.com

Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами

Тацій Р.М., Стасюк М.Ф.
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)
Власій О.О.
(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Розглянемо систему

$$\overline{Y}'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=0}^{n} C_k\delta(x-x_k)\right)\overline{Y}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{R}_k(x)\Theta_k(x)+\sum_{k=0}^{n}\overline{S}_k\delta(x-x_k), \tag{1}$$

де $\overline{Y}(x)$ – невідома вектор-функція (деякого порядку m); $A_k(x)$ і $\overline{R}_k(x)$ – неперервні на проміжках $[x_k; x_{k+1})$ $m\times m$ матриці-функції і m-вимірні вектор-функції відповідно, $k = 0, 1, \dots, n-1$; $C_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\overline{S}_k \in \mathbb{R}^m$, $0, 1, \dots, n$; $\delta(x - x_k)$ – функція Дірака з носієм у точці x_k; $\Theta_k(x)$ – характеристична функція проміжка $[x_k; x_{k+1})$, тобто $\Theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_k; x_{k+1}) \\ 0, & x \notin [x_k; x_{k+1}) \end{cases}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для системи (1) поставимо початкову умову:

$$\overline{Y}(x_0) = \overline{Y}_0 \tag{2}$$

Називатимемо визначальною систему $\overline{Y}'(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k(x)\Theta_k(x)\right)\overline{Y}(x)$. Позначимо $\widetilde{B}_k(x,s)$ – фундаментальну матрицю системи $\overline{Y}'(x) = A_k(x)\overline{Y}(x)$ (тобто визначальної системи на проміжку $[x_k; x_{k+1})$) і вважатимемо її відомою.

Теорема 1. *Фундаментальна матриця $B(x, x_0)$ системи (1) визначається рекурентними формулами:*

$$B_0(x, x_0) = \widetilde{B}_0(x, x_0)\widetilde{C}_0, x \in [x_0; x_1);$$

$$B_k(x, x_0) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\widetilde{C}_k B_{k-1}(x_k - 0, x_0), x \in [x_k; x_{k+1}), k = 1, \dots, n-1;$$

$$B(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(x, x_0)\Theta_k(x);$$

$$B(x_n, x_0) = B_n(x_n, x_0) = \widetilde{C}_n B_{n-1}(x_n - 0, x_0),$$

де $\widetilde{C}_k = E + C_k, k = 0, 1, \dots, n$ (E – одинична матриця m-го порядку).

Теорема 2. *Розв'язок початкової задачі (1)-(2) подається у вигляді:*

$$\overline{Y}(x) = B(x, x_0)\overline{Y}_0 + I_1(x) + I_2(x),$$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} B_k(x, x_{i+1})\widetilde{C}_{i+1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\widetilde{B}_i(x_{i+1}, s)\overline{R}_i(s)ds + \int\limits_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x, s)\overline{R}_k(s)ds\right)\Theta_k(x),$$

$$I_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\widetilde{B}_k(x, x_k)\sum_{i=0}^{k-1} B_k(x_k, x_i)\overline{S}_i\right)\Theta_k(x),$$

причому матриці $B_k(x, x_{i+1})$ та $B_k(x_k, x_i)$ обчислюються аналогічно, як і в теоремі 1.

e-mail: olesyav@ukr.net

Про існування інваріантних торів зліченних лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах

Теплінський Ю.В.
(Кам'янець-Подільський національний університет)
Пасюк К.В.
(Буковинська державна фінансова академія)

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x(t) + B(\varphi, t)x(t + \Delta) + c(\varphi, t). \tag{1}$$

У цій системі:

1) $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots) \in \mathfrak{M}$; відображення $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), a_3(\varphi), \dots\}$ визначене періодичними $\forall i \in N$ відносно координат $\varphi_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π функціями $a_i(\varphi) : \mathfrak{M} \to R^1$, що дозволяє вважати перше рівняння системи (1) визначеним на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$, а ці координати вважати кутовими координатами на ньому; N — множина натуральних чисел, $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$; символом $\frac{d\varphi}{dt}$ позначено вектор $\{\frac{d\varphi_1}{dt}; \frac{d\varphi_2}{dt}; \frac{d\varphi_3}{dt}, \dots\}$; $\varphi_t(\varphi) = (\varphi_{1_t}(\varphi), \varphi_{2_t}(\varphi), \dots)$ — розв'язок вказаного рівняння, що задовольняє початкову умову $\varphi = \phi_0(\varphi)$;

2) $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{ij=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця з неперервними по φ і періодичними відносно $\varphi_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π елементами;

3) $B(\varphi, t) = [b_{ij}(\varphi, t)]_{ij=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця; функції

$$b_{ij}(\varphi, t) = b_{ij}(y_1(\varphi, t), y_2(\varphi, t), \dots)$$

здійснюють відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty = \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{T}_\infty \times \dots$ у простір R^1; точки

$$y_i(\varphi, t) = \left(\varphi_{1_{t+\Gamma_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Gamma_{i2}}}(\varphi), \dots\right)$$

$\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$; $x(t + \Delta) = (x_1(t + \Delta_1), x_2(t + \Delta_2), \dots)$; Γ_{ij} та Δ_i — довільні фіксовані дійсні числа (сталі відхилення аргументу t); $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$;

4) функція $c(\varphi, t) = (c_1(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), c_2(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), \dots)$ здійснює відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty$ у простір $\mathfrak{M}$, тобто $c_i(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ для будь-якого натурального числа i; точки

$$z_i(\varphi, t) = \left(\varphi_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\varphi), \varphi_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\varphi), \dots\right)$$

$\forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — довільні фіксовані дійсні числа, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$.

У цій доповіді пропонуються достатні умови існування в просторі обмежених числових послідовностей інваріантного тору системи диференціально-різницевих рівнянь (1).

До цього часу така задача у математичній літературі не досліджувалась.

Ю.В. Теплінський
вул. Космонавтів 2, кв. 48, Кам'янець-Подільський, 32315
e-mail: yuriy-teplinsky@yandex.ru

Прямі й обернені теореми в теорії наближеного розв'язування операторних рівнянь методом Рітца

Торба С.М.
(Інститут математики НАН України)

Нехай A — додатновизначений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ над полем комплексних чисел.

Для числа $\alpha > 0$ розглянемо

$$\mathfrak{E}^\alpha(A) = \left\{ x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n) \,|\, \exists c = c(x) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}: \quad \|A^k x\| \le c\alpha^k \right\},$$

та нехай $\mathfrak{E}(A) = \cup_{\alpha>0} \mathfrak{E}^\alpha(A)$.

Тип $\sigma(x, A)$ вектора $x \in \mathfrak{E}(A)$ визначається як

$$\sigma(x, A) = \inf\{\alpha > 0 : \ x \in \mathfrak{E}^\alpha(A)\} = \limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n}.$$

Для самоспряженого оператора A виконується $\overline{\mathfrak{E}(A)} = \mathfrak{H}$, отже задача наближення довільного $x \in \mathfrak{H}$ векторами $y \in \mathfrak{E}(A)$ змістовна. Для довільного $x \in \mathfrak{H}$ покладемо

$$\mathcal{E}_r(x, A) = \inf_{y\in\mathfrak{E}(A):\sigma(y,A)\le r} \|x - y\|, \quad r > 0$$

— найкраще наближення вектора x цілими векторами y експоненціального типу, що не перевищує σ.

Нехай $G(\lambda)$ — невід'ємна диференційовна парна функція на $\mathbb{R}$, неспадна на $\mathbb{R}_+$, $\varphi(r) = G(r)G'(r)$.

Теорема 1. $x \in \mathcal{D}(G(A))$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\int_1^\infty \varphi(r)\mathcal{E}_r^2(x, A)\, dr < +\infty.$$

2. Розглянемо рівняння

$$Bx = y, \tag{$*$}$$

де B — додатновизначений самоспряжений оператор з дискретним спектром, $y \in \mathfrak{H}$ — відома права частина, x — розв'язок рівняння.

Позначимо через $\mathfrak{H}_+$ поповнення $\mathcal{D}(B)$ відносно норми $(x, y)_+ = (Bx, y)$. Згідно з принципом Дирихле знаходження цього розв'язку еквівалентне відшуканню вектора $u \in \mathcal{D}(B)$, на якому функціонал $F(z) = (Bz, z) - 2\mathrm{Re}\,(y, z)$, заданий на $\mathcal{D}(B)$, досягає свого мінімуму.

Нехай координатною системою в методі Рітца є ортонормований базис самоспряженого додатновизначеного оператора A з дискретним і простим спектром, спорідненого з B в тому сенсі, що $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Позначимо через x_n наближений за Рітцем розв'язок ($*$). Має місце характеризація апріорної швидкості збіжності методу Рітца.

Теорема 2. $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha \ge 1$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{2(\alpha-1)} \|x - x_n\|_+^2 < +\infty.$$

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3, Київ, 01601
e-mail: sergiy.torba@gmail.com

Неіснування глобального розв'язку мішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана

Торган Г.Р.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Нехай $k,\ m \in \mathbb{N},\ \Omega_x$ – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_x \in C^1,\ \Omega_y$ – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^k$ з межею $\partial\Omega_y \in C^1,\ \Omega = \Omega_x \times \Omega_y,\ Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty,\ S_T = \partial\Omega \times (0,T),\ n = k+m,\ z = (x,y),\ x \in \Omega_x,\ y \in \Omega_y$.

В області Q_T розглянемо рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом

$$u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^{k} (a_{ij}^{sl}(z,t)u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(z,t)|u_{z_i}|^{p-2}u_{z_i})_{z_i} + \sum_{i=1}^{k} b_i(z,t)u_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} b_i^0(z,t)u_{y_i} + b(z,t)u - g(z,t)|u|^{q-2}u = f(z,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z),\ z \in \Omega, \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T),\ p > 2,\ q > 2$.

При виконанні певних умов гладкості коефіцієнтів рівняння у випадку $2 < p < q,\ \ n < \dfrac{pq}{q-p}$ доведено існування локального за часовою змінною і неіснування глобального узагальненого розв'язку задачі (1) – (3).

вул. Руданського 3/7, Львів, 79000

e-mail: torgan_g@yahoo.com

Двостороння апроксимація розв'язків звичайних диференціальних рівнянь за допомогою аналогів методу Чаплигіна

Угрин С.З.

(Національний університет "Львівська політехніка")

Численні дослідження методу Чаплигіна та його модифікацій і узагальнень стимулюються двома факторами. Йдеться про переваги цього методу перед іншими ітераційними методами, що грунтуються на можливості отримувати зручні апостеріорні оцінки розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу завдяки його двосторонності і монотонності, та на квадратичному характері збіжності, на яку, зокрема, звернув увагу М.М.Лузін. Застосовність основних варіантів методу Чаплигіна обмежена, бо здебільшого оператори, з якими доводиться мати справу не мають потрібних властивостей опуклості і монотонності. Крім того, виникають труднощі з обчисленням похідних від відповідних операторів та з їх оберненням на кожному кроці ітераційного процесу. В більшості ситуацій це доводиться робити наближено, що може призводити до практичної втрати зазначених переваг. У пропонованому повідомленні досліджені аналоги методу Чаплигіна для скалярного рівняння вигляду

$$f(t,x,x') = 0 \ \ (x\,(t_0) = 0)$$

за припущень що функція $f(t,x,p)$ не конче має похідні щодо x та p. Встановлені оцінки збіжності ітерацій, які можуть мати надлінійний, зокрема, квадратичний характер без припущення про диференційовність $f(t,x,p)$. Зокрема постулюємо такі припущення: 1) з нерівності $y \le z$, $p \le q$ випливають нерівності

$$h\,(t,p,q)\,(q-p) \ge f\,(t,y,q) - f\,(t,y,p)\,,$$

$$(g\,(t,y,z) - \alpha\,(t,y,z))\,(z-y) \ge f\,(t,z,p) - f\,(t,y,q)$$

при $t \in [t_0,t_1]$, $|p| < T$, $|q| < T$, $y_0\,(t) \le y \le z_0\,(t)$, $y_0\,(t) \le z \le z_0\,(t)$ з неперервними функціями $h\,(t,p,q)$, $g\,(t,y,z)$, $\alpha\,(t,y,z)$, для яких властиве неспадання щодо p, y та незростання щодо q, z відповідно; 2) система рівнянь

$$h\,(t,y_n,y_n')\left(y_{n+1}' - y_n'\right) - g\,(t,y_n,y_n')\,(y_{n+1} - y_n) - f\,(t,y_n,y_n') = 0,$$

$$h\,(t,y_n,y_n')\left(z_{n+1}' - z_n'\right) - (g\,(t,y_n,y_n') + \alpha\,(t,y_n,y_n'))\,(z_{n+1} - z_n) - f\,(t,z_n,z_n') = 0$$

за початкових умов $y_{n+1}\,(t_0) = z_{n+1}\,(t_0) = x_0$ в класі неперервно диференційовних на $[t_0,t_1]$ функцій, однозначно розв'язна щодо $y_{n+1}\,(t)$, $z_{n+1}\,(t)$. Встановлені умови, за яких матимемо нерівності

$$y_n\,(t) \le y_{n+1}\,(t) \le x^*\,(t) \le z_{n+1}\,(t) \le z_n\,(t)\,, (n = 0,1,...;\ t \in [t_0,t_1])\,,$$

а також умови, які забезпечують квадратичну збіжність ітерацій. Результати повідомлення близькі до результатів із [1].

1. 1. Б.А.Шувар, М.І.Копач, С.М.Ментинський, А.Ф.Обшта. Двосторонні наближені методи.- Івано-Франківськ, 2007, 515 с.

НУ"Львівська політехніка", кафедра ОМП
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

Про одну властивість послідовностей типу Фібоначчі

Федак І.В.

(Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

Зауважимо, що для послідовності Фібоначчі: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ a_1 = a_2 = 1$, при кожному натуральному $n \geq 2$ виконується рівність

$$\Delta_n = a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Розглянемо послідовності вигляду $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = a$, і опишемо всі класи таких послідовностей, для яких $|\Delta_n| = 1$ при кожному натуральному $n \geq 2$.

Нехай $\lambda_1, \ \lambda_2 -$ корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$.

Якщо $D = \alpha^2 + 4\beta > 0$, то

$$a_n = \frac{a - \lambda_1}{\lambda_2^2 + \beta}\lambda_1^n + \frac{a - \lambda_2}{\lambda_1^2 + \beta}\lambda_2^n.$$

При цьому $|\Delta_n| = 1, \ n \geq 2$, у наступних випадках:

1). $\beta = 1, \ \alpha = a, \ a \in N$. При $a = 1$ як частковий випадок отримуємо класичну послідовність Фібоначчі.

2). $\beta = -1, \ \alpha = a, \ a \in N, \ a > 2$. При $a = 3$ це підпослідовність послідовності Фібоначчі з парними номерами.

3). $\beta = -1, \ \alpha = 3, \ a = 2$. Це підпослідовність послідовності Фібоначчі з непарними номерами.

4). $\beta = 1, \ \alpha = 1, \ a = 2$. Це підпослідовність послідовності Фібоначчі, починаючи з другого номера.

5). $\beta = -1, \ \alpha = 3, \ a = 1$. Ще одна з підпослідовностей послідовності Фібоначчі.

Якщо ж $D = 0$, то при $\alpha = 2, \ \beta = -1, \ a = 2$ отримуємо ще одну шукану послідовність $a_n = n$.

вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000

Нелінійна задача теплообміну для кусково-однорідної смуги з чужорідним включенням

Федасюк Д., Гавриш В., Кузьмін А.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглядається кусково-однорідна термочутлива ізотропна в сенсі теплофізичних характеристик смуга, яка складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами. Дана система віднесена до прямокутної декартової системи координат Oxy із початком на одному з його країв. У j-му $(j = \overline{2, n-1})$ елементі смуги знаходиться включення прямокутної форми, в області $\Omega_0 = \{(x, y) : |x| \leq h, y_{j-1} \leq y < y_j\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На прямих спряження $y = y_i$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ та відрізках спряження $L_{\pm} = \{(|h|, y) : y_{j-1} \leq y < y_j\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на краях смуги

$$K_0 = \{(x, 0) : |x| < \infty\}, \quad K_n = \{(x, y_n) : |x| < \infty\}$$

відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c.

Розподіл стаціонарного температурного поля $t(x, y)$ в кусково-однорідній термочутливій смузі отримується шляхом розв'язування нелінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial y}\right] = -q_0 \cdot N(x, h) \cdot N(y, y_{j-1}) \tag{1}$$

із врахуванням таких граничних умов:

$$\lambda_1(t) \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0 \cdot \left(t|_{y=0} - t_c\right), \quad \lambda_n(t) \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=y_n} = \alpha_n \cdot \left(t_c - t|_{y=y_n}\right), \tag{2}$$

$$t|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0,$$

де $\lambda(t, x, y) = \lambda_1(t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1}[\lambda_{i+1}(t) - \lambda_i(t)] \cdot S_-(y - y_i) + [\lambda_0(t) - \lambda_j(t)] \cdot N(x, h) \cdot N(y, y_{j-1})$ – коефіцієнт теплопровідності кусково-однорідної смуги; $\lambda_i(t)$, $\lambda_0(t)$ – коефіцієнти теплопровідності i-го елемента смуги та включення відповідно; α_0, α_n – коефіцієнти тепловіддачі з країв смуги K_0 та K_n відповідно; $N(x, h) = S_-(x + h) - S_+(x - h)$; $N(y, y_{j-1}) = S_-(y - y_{j-1}) - S_-(y - y_j)$; $S_{\pm}(\xi)$ – асиметричні одиничні функції.

Наведена задача теплообміну розв'язується для $x \geq 0$, оскільки розподіл температурного поля відносно осі Oy є симетричним.

Введемо функцію

$$\vartheta = \int\limits_{0}^{t(x,y)} \lambda_1(\xi) \cdot d\xi + \sum_{i=1}^{n-1} S_-(y-y_i) \cdot \int\limits_{t(x,y_i)}^{t(x,y)} \left[\lambda_{i+1}(\zeta) - \lambda_i(\zeta)\right] \cdot d\zeta +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{t(h,y)}^{t(x,y)} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right] \cdot d\zeta \cdot N(y, y_{j-1}) - \int\limits_{t(h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right] \cdot d\zeta \cdot S_-(y-y_{j-1}) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t(h,y_j)}^{t(x,y_j)} \left[\lambda_0(\zeta) - \lambda_j(\zeta)\right] \cdot d\zeta \cdot S_-(y-y_j) \right\} \cdot S_-(h-x), \qquad (3)$$

за допомогою якої нелінійна гранична задача (1), (2) частково лінеаризується. Із використанням кусково-лінійної апроксимації температури $t(x,y)$ на відрізках спряження $L_\pm$ та краях смуги K_0, K_n задача (1), (2) цілком лінеаризується. На основі цього отримано наближений аналітичний розв'язок для введеної функції ϑ. Шукане температурне поле знаходиться з отриманого аналітичного розв'язку, виразу (3) для введеної функції ϑ та конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності елементів кусково-однорідної смуги.

НУ "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013

Про застосування нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ для побудови класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,3) \times R(u)$

Федорчук В.І.
(ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ – група поворотів та трансляцій в п'ятивимірному просторі Мінковського $M(1,4)$. Вона використовується при розв'язуванні різних задач теоретичної та математичної фізики (див., наприклад [1]).

Нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку окремо для розщеплюваних і нерозщеплюваних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ вивчалися в роботах [2, 3].

В даному повідомленні мова йтиме про застосування критерію еквівалентності [4, 5] функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k локальних груп Лі точкових перетворень для побудови нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Отримані нееквівалентні функціональні базиси використовуються для побудови класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,3) \times R(u)$.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
2. В. М. Федорчук, В. І. Федорчук, Диференціальні інваріанти першого порядку розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – <u>44</u>, N 1. – С. 16–21.
3. Vasyl M. Fedorchuk, Volodymyr I. Fedorchuk, On the differential first-order invariants for the non-splitting subgroups of the generalized Poincare group P(1,4), Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica IV (2004), Folia 23, 65–74.
4. Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I. First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincare group P(1,4) // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2006, Fasciculus XLIV. – P. 35–44.
5. Василь Федорчук, Володимир Федорчук, Про еквівалентність функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку неспряжених підгруп локальних груп Лі точкових перетворень // Сучасні проблеми механіки та математики, т. 3, Львів: Інститут ППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2008, 202–204.

вул. Наукова 3-б, Львів, МСП, 79000
e-mail: volfed@gmail.com

Про застосування нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку локальних груп Лі точкових перетворень для побудови та дослідження диференціальних рівнянь

Федорчук В.М.

(Педагогічна Академія ім. Комісії Народної Освіти, Краків; ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України)

Функціональні базиси диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k локальних груп Лі точкових перетворень відіграють важливу роль в геометрії, теоретичній та математичній фізиці, механіці, газовій динаміці і т.д. (див., наприклад [1–3]).

При побудові функціональних базисів диференціальних інваріантів для конкретних груп Лі точкових перетворень виявилося, що немає взаємно-однозначної відповідності між неспряженими підгрупами цих груп і відповідними фукціональними базисами. Це означає що різним неспряженим підгрупам можуть відповідати однакові (еквівалентні) функціональні базиси. Однак, для застосувать важливими є різні (нееквівалентні) функціональні базиси. Для відбору таких базисів з множини всіх базисів які відповідають неспряженим підгрупам локальних груп Лі точкових перетворень можна використати критерій еквівалентності двох функціональних базисів [4, 5].

В даному повідомленні мова йтиме про застосування нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку k локальних груп Лі точкових перетворень для побудови та дослідження диференціальних рівнянь з нетривіальною симетрією.

1. Lie S. Über Differentialinvarianten// Math. Ann. – 1884. – **24**, N 1. – P. 537–578.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
4. Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I. First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincare group P(1,4) // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2006, Fasciculus XLIV. – P. 35–44.
5. Василь Федорчук, Володимир Федорчук, Про еквівалентність функціональних базисів диференціальних інваріантів довільного скінченного порядку неспряжених підгруп локальних груп Лі точкових перетворень // Сучасні проблеми механіки та математики, т. 3, Львів: Інститут ППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2008, 202–204.

вул. Наукова 3-б, Львів, МСП, 79000
e-mail: vasfed@gmail.com

Екстраполяційний метод чисельного розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь

Цегелик Г.Г., Лещишин Н.Р.

(Львівський національний університет ім. І. Франка)

Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i,0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Шукатимемо розв'язок задачі на проміжку $[x_0, x_0 + c]$. При цьому вважатимемо, що на цьому проміжку задача має єдиний розв'язок. На проміжку $[x_0, x_0 + c]$ виберемо систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_m$, де $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $h = c/m$, і, використовуючи новий підхід до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1], побудуємо чисельний метод відшукання наближених значень $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, точного розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задачі (1) в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Нехай $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, -– шуканий розв'язок задачі (1). Підставляючи його в диференціальні рівняння, одержимо тотожності

$$y_i'(x) \equiv f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Проінтегруємо ці тотожності на кожному з проміжків $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Матимемо

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

При цьому вважатимемо, що $f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для всіх $x \in [x_0, x_0 + c]$.

Якщо підінтегральну функцію замінити мажорантою Ньютона $\widetilde{M}_{f_i}(x)$, побудованою за двома точками $\big(x_{k-1}, f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \ldots, y_n(x_{k-1}))\big)$ і $\big(x_k, f_i(x_k, y_1(x_k), \ldots, y_n(x_k))\big)$, тобто

$$\widetilde{M}_{f_i}(x) = \ln \frac{\mathrm{e}^{A_{i,k}}(x_k - x) + \mathrm{e}^{B_{i,k}}(x - x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $A_{i,k} = f_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \ldots, y_n(x_{k-1}))$, $B_{i,k} = f_i(x_k, y_1(x_k), \ldots, y_n(x_k))$, і обчислити інтеграл, то одержимо таку формулу для відшукання $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, розв'язку $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} y_{i,k+1} = y_{i,k} + h\Big(& f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}) - 1 + \\ &+ \frac{2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \ldots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}))}{1 - \exp\left(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \ldots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k})\right)} \times \\ &\times \ln\left(2 - \exp(f_i(x_{k-1}, y_{1,k-1}, \ldots, y_{n,k-1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}))\right)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Нами встановлена ознака збіжності методу та його обчислювальна стійкість. Проведено порівняльний аналіз ефективності методу.

1. Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Новий підхід до побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій та його застосування // Волинський матем. Вісн., Сер. Прикл. матем., 2005, Вип. 3(12), С. 186–200.

Одне представлення генератора стрибкової еволюції з дифузійним збуренням

Чабанюк Я.М., Подун І.М.
(Національний університет "Львівська політехніка")

Розглянемо стрибкову еволюцію, що задається співвідношення

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^2)-1} C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, t > 0, (\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) := 0), \tag{1}$$

де функція $C^\varepsilon(u,x) := C(u,x) + \varepsilon^{-1}C_0(u,x), u \in R^d, x \in X$, така, що задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем $du_x(t)/dt = C^\varepsilon(u_x(t),x), x \in X$; $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$ - лічильний процес числа стрибків рівномірно ергодичного марковського процесу (МП) $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$;$\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення МП $x(t), t \geq 0$. МП $x(t), t \geq 0$, задається породжуючим оператором $Q\varphi(x) := q(x) \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$ [1], у банаховому просторі $B(X)$ дійсно-значних функцій $\varphi(x)$, $x \in X$, з супремум нормою $\|\varphi(x)\| := \sup\limits_{x\in X} \mid \varphi(x) \mid$, де $q(x)$- інтенсивність, така, що $\|q(x)\| := \sup\limits_{x\in X} q(x) < \infty$, а стохастичне ядро $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, задається ймовірностями переходу вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \geq 0, P(x,B) := P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}$, і визначає оператор $\boldsymbol{P}\varphi(x) := \int\limits_X P(x,dy)\varphi(y)$.

Лема. *Генератор* $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ *двохкомпонентного МП* $u^\varepsilon(t)$, $x^\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon^2), t \geq 0$ *стрибкової еволюції* (1) *на тричі неперервно диференційованих по u функціях* $\varphi(u,x)$ *має представлення:*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-2} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{C}_0(x)Q_0\varphi(u,x) + \mathbf{C}(x)Q_0\varphi(u,x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbf{C}_0^2(x)Q_0\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_1(x)Q_0\varphi(u,x), \tag{2}$$

де

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(u,x) = C_0(u,x)\varphi'(u,x),$$

$$Q_0 = q(x)\mathbf{P},$$

$$\theta_1(x)\varphi(u,x) = [2C(u,x)C_0(u,x) + \varepsilon C^2(u,x)]\varphi''(u,x).$$

Доведення. Представлення (2) генератора випливають з обчислення умовного математичного сподівання, згідно схеми [2].

1. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space./World Scientific Publishing. – 2005. – 330 P.
2. Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnios N. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point.// France Academy of Sciences. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 2007. – 345. – P. 405–410.

НУ "Львівська Політехніка"
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

Про першу нелінійну узагальнену крайову задачу для рівняння теплопровідності

Чмир О.Ю.

(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega\times(0,T]$, $\Sigma = S\times(0,T]$, $0 < T < +\infty$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D^\eta \equiv D^\eta_x = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t})$ – довільна фіксована точка $\overline{Q}$, $P = (x,t) \in \overline{Q}$

$|P\widehat{P}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \hat{x}_i|^2 + |t - \hat{t}|}$ – параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$\varrho_0(P,\widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \geq \varepsilon_0, \end{cases}$ $\quad \varrho_0(P,\widehat{P}) \leq 1$, де $\varepsilon_0 \in (0,1]$,

$\widetilde{\varrho}(\sigma)$ – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$.

Введемо функційний простір:
$\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} :$
$||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \max\left\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\, dxdt;\ \int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\, dSdt\right\} < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Нехай $(\hat{x},\hat{t}) \in \Sigma$. Припустимо, що функції $f_0(x,t,\mathrm{v})$, $g_0(x,t,\mathrm{v})$ визначені в $Q \times (-\infty,+\infty)$, $\Sigma \times (-\infty,+\infty)$ відповідно та

$$F_1(x,t) = \sum_{|l|\leq p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x-\hat{x})\delta^{(m)}(t-\hat{t}),$$

$$\text{де } C_{lm} = const, \quad l = \overline{0,p_1}, \quad m = \overline{0,p_2}, \quad p_1,\, p_2 \in \mathbb{N},$$

$$F_2(x) = \sum_{|r|\leq p_3} C_r D_x^r \delta(x-\hat{x}), \quad C_r = const, \quad r = \overline{0,p_3}, \quad p_3 \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо першу узагальнену нелінійну крайову параболічну задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u\,|_{\Sigma} = F_1(x,t) + g_0(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

За допомогою принципу Шаудера встановлено достатні умови розв'язності задачі (1)-(3) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$, зокрема, для функцій $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}$ та $g_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_1}$, де $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$.

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Клепарівська 35, Львів, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Двосторонні наближення розв'язків систем різницевих рівнянь з нелінійними крайовими умовами

Чорний В.З.(ТНПУ), Хома Г.П.(ТКІ),
Струк О.О., Цинайко П.В.(ТНПУ ім.В.Гнатюка, Тернопіль)

Розглянемо систему різницевих рівнянь виду

$$x(n+1) = x(n) + g(n, x(n)) \tag{1}$$

де $x = x(x_1, x_2, ..., x_m), g(n, x, y) = (g_1(n, x, y), g_2(n, x, y), ..., g_m(n, x, y))$– елементи евклідового простору E_m. Нехай $g(n, x(n)) = f(n, x(n), x(n))$ і розглянемо систему рівнянь

$$x(n+1) = x(n) + f(n, x(n), x(n)),$$

відносно якої припустимо, що функція $f(n, x, y)$ визначена в замкнутій області, неперервна по сукупності змінних n, x, y

$$m \le f(n, x, y) \le M,$$

$$f(n, x, y) \le f(n, \bar{x}, \bar{y})$$

при $x \le \bar{x}, y \ge \bar{y}$. Означимо дві послідовності функцій $\{u_k(n, x_0)\}$, $\{v_k(n, x_0)\}$, $k = 0, 1, 2...$, за допомогою рекурентних співвідношень

$$u_{k+1}(n+1, x_0) = x_0 + \tfrac{b-x_0}{N} n + \Big(1 - \tfrac{n}{N}\Big) \sum_{i=0}^{n} f\Big(i, u_k(i, x_0), \nu_k(i, x_0)\Big) -$$

$$-\tfrac{n}{N} \sum_{j=0}^{N} f\Big(j, \nu_k(j, x_0), u_k(j, x_0)\Big), \tag{2}$$

$$\nu_{k+1}(n+1, x_0) = x_0 + \tfrac{b-x_0}{N} n + \Big(1 - \tfrac{n}{N}\Big) \sum_{i=0}^{n} f\Big(i, \nu_k(i, x_0), u_k(i, x_0)\Big) -$$

$$-\tfrac{n}{N} \sum_{j=0}^{N} f\Big(j, u_k(j, x_0), \nu_k(j, x_0), \nu_{n+1}(i, x_0)\Big)$$

причому

$$\nu_0(n, x_0) = x_0 + \frac{b - x_0}{N} n - \frac{1}{2}\alpha_1(n)(M - m), u_0(n, x_0) = x_0 + \frac{b - x_0}{N} n - \frac{1}{2}\alpha_1(n)(M - m),$$

де $\alpha_1(n) = 2n\Big(1 - \frac{n}{N}\Big)$.

Очевидно, що функції $u_n(t, x_0), \nu_n(t, x_0)$ задовольняють умовам

$$u_k(0) = x_0, u_k(N) = b,$$
$$\nu_k(0) = x_0, \nu_k(N) = b.$$

Встановлено умови, за яких спільна границя послідовностей (2) є розв'язком рівняння (1), який задовольняє крайовим умовам: $\varphi[x_0, x_N] = 0$.

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартинюк Д.И.* Системы эволюционых уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами.—Киев:Наук.думка, 1985.—216 с.

46027 м.Тернопіль,
вул.Громницького, буд.2, кв.9
e-mail: nadija_khoma@mail.ru,
glnoskho@hotmail.com

Математичне моделювання процесу "ресурс - споживач"

Щербатий М.В., Шиманський В.М.
(Львівський національний університет ім. І. Франка)

В роботі приводяться результати досліджень математичної моделі 'ресурс - споживач', що відображає взаємне існування популяцій ресурсу та споживача на ареалі. Споживач є рухомою популяцією на ареалі, натомість, ресурс - нерухомою. Модель 'ресурс - споживач' описується нелінійною системою диференціальних рівнянь, одне з яких є звичайне диференціальне рівняння, а інше - рівняння в частинних похідних параболічного типу. Дана система рівнянь доповняється відповідними початковими та крайовими умовами.[1]

Для того, щоб в загальному охарактеризувати процес росту популяції, необхідно дослідити математичну модель, яка його описує, а саме - стійкість точок спокою та з'ясувати, як розміщуються траєкторії в їх околі. Досліджено вигляд траєкторій системи (фазовий портрет), в залежності від відповідних співвідношень між коефіцієнтами цієї системи. Ці співвідношення визначаються умовами на власні значення матриці Якобі в кожній стаціонарній точці та відповідними їм власними векторами. Проаналізувавши отримані точки спокою системи, можна стверджувати, що в реальності існування двох популяцій ресурсу і споживача може відбуватися за такими напрямками: вимирання обох популяцій, розмноження ресурсу до певної межі та вимирання споживачів, взаємне існування ресурсу та споживачів (при цьому кількість особин цих популяцій встановлюється на певній межі). Відповідно до класифікації Пуанкаре типів особливих точок, точки спокою системи будуть наступними: сідло, вузол та фокус відповідно.

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь використано явну двохшарову схему [3], для прогнозування результатів, та неявну схему Кранка - Ніколсона [2], для корекції попередньо отриманих результатів. Таким чином, застосування вищенаведених методів розв'язання системи диференціальних рівнянь, дозволяє побудувати наближений розв'язок моделі 'ресурс - споживач'. Проведений для різних значень параматрів моделі числовий аналіз, показує збіжність ітераційних схем і узгоджується з результатами аналітичного дослідження моделі.

1. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в екологии. - М.: Наука, 1987 - 368 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. - 320 с.
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Н.: Наука, 1967. - 197 с.

Факультет прикладної математики та інформатики
Львівський національний університет ім. І. Франка
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: shcherb@franko.lviv.ua
e-mail: vshymanskiy@gmail.com

Construction of Scattering Operators for Nonstationary System of Dirac Equations by the Method of Binary Darboux Transformations

Berkela Yu.Yu. ***(Carpathian Biosphere Reserve)***
Sydorenko Yu.M. ***(Ivan Franko National University of Lviv)***

Let us consider Dirac system of the form

$$LY = 0,\ \ Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix},\ \ L = \begin{pmatrix} \alpha\partial_y - \partial_x & u_1(x,y) \\ u_2(x,y) & \alpha\partial_y + \partial_x \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, α – real constant, $u_1(x,y)$, $u_1(x,y)$ be decreasing functions in infinity.

The direct and inverse scattering problems for the Dirac system (1), where variable $y \equiv t$ (time) and constant $\alpha = 1$, were studied by L. Nizhnik in [1] (see also [2]). In that paper L.Nizhnik described the properties of the scattering operator S which was defined by the equation

$$b = Sa, \tag{2}$$

where

$$b = \begin{pmatrix} b_1(y+\alpha x) \\ b_2(y-\alpha x) \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_1(y+\alpha x) \\ a_2(y-\alpha x) \end{pmatrix},$$

were the asymptotics of the solution $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ of the system $LY = 0$ (1):

$$Y_1(x,y) = a_1(y+\alpha x) + 0(1),\ Y_2(x,y) = b_2(y-\alpha x) + 0(1),\ \ x \to +\infty;$$

$$Y_1(x,y) = b_1(y+\alpha x) + 0(1),\ Y_2(x,y) = a_2(y-\alpha x) + 0(1),\ \ x \to -\infty.$$

The result of the given work is the explicit construction of the scattering operator S (2) for the system (1) using the binary Darboux transformations [3-5].

1. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ. – 1982. – 16, в. 1. – С. 80–82.
3. Сидоренко Ю.М. Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С. 1531–1550.
4. Sydorenko Yu. Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev - Petviashvili (cKP) flows // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2004. – 50, P.1. – P. 470–477.
5. Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. журн. – 2006. – т.58, №8. – С. 1097–1115.

а/с 8, Рахів, 90600
e-mail: yuriy.berkela@gmail.com

вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Differential preradicals in differential module categories

Natalia Burban
(Ivan Franko Lviv National University)
Omelian Horbachuk
(Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics)
Yuriy Maturin
(Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University)

All rings are considered to be differential associative with $1 \neq 0$. All modules are unitary differential right modules.

Definition 1. Let σ be a differential preredical of the category of differential right A–modules. We shall say that σ splits if for every differential right A –module M there exists a differential submodule K of M such that $M = \sigma(M) \oplus K$.

Theorem 2. *Let A be a differential ring and B be a multiplicatively closed system of differential two-sided ideals of A, which are finitely generated as differential right ideals of A. Then the set $\{T | \exists L \in B : L \subseteq T\}$ of differential right ideals of A is a differential radical filter of A.*

Theorem 3. *Let A be a differential ring. If I is an idempotent ideal of A then $\sigma\colon M \mapsto \sigma(M)$ $(\sigma(M) = \{m \in M | \forall a \in I \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\} : m^{(n)}a = 0\})$ is a differential hereditary radical.*

Theorem 4. *If F is a differential field with $char(F) = 0$ then every differential hereditary radical of the category of differential right F–modules splits if and only if F is differentially closed.*

1. O. Horbachuk, M. Komarnytskyi, Yu. Maturin. On differential preradicals. Algebra and Discrete Mathematics. Number 4 (2007), 73–83.
2. Horbachuk O., Komarnytskyi M. Radical filters in principal ideal domains. Dopovidi Akademii Nauk URSR, Fiz.-Mat. Ta Tehn Nauky, 1977, 2, A, p. 103–104.
3. Kashu A. I. Radicals and torsions in modules. Kishinev: Stiinca, 1983 (in Russian).
4. Cozzens J. H. Homological properties of the ring of differential polinomials. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, №1, p. 15–19.

Shafaryka str. 4/15, Lviv, 79032
e-mail: o_horbachuk@yahoo.com

Nonlinear elliptic variational inequalities in quasicylindrical domains

Domanska O.V.
(Ivan Franko National University of Lviv)

Let Ω be an unbounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ with regular boundary $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega$. We suppose that there exists $k \leq n$ such that the set $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=\overline{1,k}} x_i^2 < R^2\}$ is bounded for arbitrary $R > 0$ and for every $j \in \{1, \ldots, k\}$ the set $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=\overline{1,k}, i \neq j} x_i^2 < R^2\}$ is unbounded at least for one $R > 0$. For all $\tau > 0$ we denote by Ω_τ the connected component of the set $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=\overline{1,k}} x_i^2} < 1 + \tau\}$ such that $0 \in \Omega_\tau$.

Put $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, where $p_0 = \ldots = p_k = 2$ and $p_i \in L_\infty(\Omega)$, $p_i(x) > 1$ $(i = \overline{k+1, n})$ for a.e. $x \in \Omega$. For every $\tau > 0$ define $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ be the closure of $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ by the norm $\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} = \|v\|_{L_{p\,0(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p\,i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, where $L_{p\,i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ denotes the general Lebesgue space (see [1]). On the space $C^1(\overline{\Omega})$ introduce a topology generated by the system of seminorms $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$, and let $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ be the completion of $C^1(\overline{\Omega})$ in this topology.

Let K be a convex closed subset of $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ containing 0. We consider a problem of finding $u \in K$ such that the inequality

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)(w(v-u))_{x_i} + a_0(x, u, \nabla u) w(v-u)\Big]\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)(w(v-u))_{x_i} + f_0(x) w(v-u)\Big]\, dx \tag{1}$$

holds for every $v \in K$ and $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $w \geq 0$, $\operatorname{supp} w$ is bounded. Here $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$; $f_i \in L_{p^*_i(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^*(x)} = 1$ for a.e. $x \in \Omega$, $i = \overline{0,n}$; for every $i \in \{0, \ldots, n\}$ $a_i(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, is a Caratheodory function and

$$|a_i(x, s, \xi)| \leq h_{1i}(x)\Big(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p^*_i(x)} + |s|^{p_0(x)/p^*_i(x)}\Big) + h_{2i}(x),$$

where $h_{1i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_{2i} \in L_{p^*_i(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

We prove the existence and uniqueness of the weak solution of problem (1) using the combination of method, based on analogue of Saint-Venant's principle and monotonicity method. We establish the uniqueness of the problem's solution under some conditions on its behaviour at infinity and its existence under some conditions on the growth of initial data at infinity.

1. Kováčik O., Rákosníc J. On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ Czechosl. Math. J. – 1991. – V.41, №4. – P.592–618.

Liubinska str. 160, apt. 84, Lviv, 79040
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Transformation and Scattering Operators for Hyperbolic System of Three Equations

Sydorenko Yu.M. ***(Ivan Franko National University of Lviv)***

Let us consider the system:

$$LY = 0,\ \ Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \\ Y_3(x,y) \end{pmatrix},\ \ L = \alpha I \partial_y - \sigma \partial_x - [\sigma, U], \tag{1}$$

where $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$, α, ξ_i, $(i = \overline{1,3})$ – arbitrary constants, u_{ij} $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3})$ be decreasing functions at infinity.

The scattering problem for the system (1), where $y \equiv t$, $\alpha = 1$, were studied by L. Nizhnik [1]. In that paper L. Nizhnik considered the system $LY = 0$:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \sigma \frac{\partial Y}{\partial x} + U(x,y)Y(x,y), \tag{2}$$

where $Y = (Y_1, ..., Y_n)^\top$, $(\xi_i > \xi_{i+1},\ i = \overline{1, n-1})$, $u_{ii}(x,y) = 0$ $(i = \overline{1,n})$.

L. Nizhnik described properties of the scattering operator S, which was defined by the equation

$$b = Sa, \tag{3}$$

where $b_i = b_i(x + \xi_i y)$, $a_i = a_i(x + \xi_i y)$, are the asymptotic of the solution $Y = (Y_1, ..., Y_n)^\top$ of the system (2): $Y_i(x,y) = a_i(x + \xi_i y) + o(1),\ \ y \to -\infty$, $Y_i(x,y) = b_i(x + \xi_i y) + o(1),\ \ y \to +\infty,\ i = \overline{1,n}$.

We consider the system (1), where $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > 0$, $\alpha > 0$:

$$\alpha Y_{iy} = \xi_i Y_{ix} + \sum_{j=1}^{3} (\xi_i - \xi_j) u_{ij} Y_j,\ \ i = \overline{1,3}, \tag{4}$$

which is equivalent to the following system of the integral equations:

$$\begin{gathered} Y_i(x,y) = a_i(\xi_i y + \alpha x) + \tfrac{1}{\alpha} \textstyle\sum_{j=1}^{3} (\xi_i - \xi_j) \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{y} u_{ij} \left(x + \tfrac{\xi_i}{\alpha}(y - s), s \right) Y_j \left(x + \tfrac{\xi_i}{\alpha}(y - s), s \right) ds, i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{5}$$

The result of the given work is the explicit construction of the scattering operator S (3) for the system (1), (4), (5) using the binary Darboux transformations [2-3].

1. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. - Киев: Наук. думка, 1991. - 232 с.
2. Сидоренко Ю.М. Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С. 1531–1550.
3. Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. журн. – 2006. – т.58, №8. – С. 1097–1115.

вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Іменний покажчик

Андрусяк Р.В. 2
Антонова Т.М. 3
Атаманюк Б.В. 4, 5
Атаманюк О.Б. 4, 6
Баб'як-Білецька Л.С. 7
Баранецький Я.О. 8
Бігун Я.Й. 9
Боднар Д.І. 10
Бокало М.М. 11
Борова О.І. 34
Бубняк М.М. 45
Бугрій О.М. 12
Бурдейна Н.О. 2
Бутитер І.Б. 13
Василишин Б.В. 14
Василишин П.Б. 14
Вікович І.А. 13
Вірченко Н.О. 15
Власій О.О. 90
Войтко М.В. 16
Гавриш В. 96
Герасименко В.І. 17
Гіссовська Н.Б. 69
Гладун В.Р. 18
Гнатів Л.Б. 19
Гоєнко Н.П. 18
Головатий Ю.Д. 20
Горбачук В.І. 21
Горбачук М.Л. 21
Горбачук О.Л. 7
Городецький В.В. 22
Городецький В.В. 23
Гошко З.О. 24
Гошко Л.В. 69
Грабчак Г.Є. 20
Гринців Н.М. 25
Грицай В.Я. 28
Грушка Я.І. 26
Дияк І.І. 27
Дівеєв Б.М. 28, 29
Дідак В.М. 30
Дмитришин М.І. 31
Дмитришин Р.І. 10
Дрінь М.М. 32
Дрінь Я.М. 22, 32
Єрьоменко В.О. 33
Заболоцький М.В. 34
Завербний А.Р. 29
Загороднюк А.В. 35
Звоздецький Т.І. 36
Зелинский Ю.Б. 37
Івасик Г.В. 38
Івасишен С.Д. 39
Івасюк І.Я. 40
Казмерчук А.І. 41
Казмерчук Ю.А. 42
Карлова О.О. 43
Кирилич В.М. 2
Кіт Г.С. 44
Клевчук І.І. 45
Коваль Т.Б. 28
Ковальчук О.Я. 46
Когут І.В. 47
Коляса Л.І. 48
Кондур О. 49
Копач М.І. 50, 74
Копчук-Кашецький А.В. 8
Косован В.М. 51
Костюк В.В. 29
Красікова І.В. 52
Кузьмін А. 98
Куриляк Д.Б. 16
Кутень А.С. 24
Лещишин Н.Р. 102
Лінчук Ю.С. 53
Лопушанська Г.П. 54
Лукашів Т.О. 55
Лусте І.П. 56
Мазуренко В.В. 57
Макар І.Г. 27
Малицька Г.П. 58
Мартинюк О.В. 59
Мартинюк С.В. 59
Масікевич М.І. 60
Маслюченко В.К. 51, 61, 62
Маслюченко О.В. 63
Матвій О.В 64
Махней О.В. 65
Мединський І.П. 39
Мельник Т.А. 66
Ментинський С.М. 67
Миронник В.І. 23
Митрофанов М.А. 68
Михайлюк В.В. 61, 69

Можировська З.Г. 70
Мохонько А.З. 48
Муравський В.В. 46
Мусій Р.С. 71
Муха І.С. 72
Нестеренко В.В. 63
Нитребич З.М. 73
Обшта А.Ф. 74
Панат О.Т. 75
Пасічник О.В. 76
Пасюк К.В. 93
Пахолок Б.Б. 77
Пелех Р.Я. 78
Пелех Я.М. 30
Пернай С.А. 64
Перченко А.О. 46
Подун І.М. 103
Починайко М.Д. 79
Прокопишин І.І. 27
Пташник Б.Й. 80
Пукальський І.Д. 81
Пукач П.Я. 82
Ратушняк В.П. 83
Рум'янцева О.В. 84
Савка І.Я. 85
Свізінський В.П. 30
Сеник А.П. 86
Сидоренко Ю.М. 79
Сівак О.А. 87
Смольський А.Г. 29
Снітко Г. А. 88
Соломко А.В. 89
Стасюк М.Ф. 57, 92
Струк О.О. 105
Сумарюк М.І. 90
Сусь О.М. 3
Сухорольський М.А. 91
Сушко О.П. 43
Тацій Р.М. 92
Теплінський Ю.В. 93
Тимків І.Р. 80
Токар В.Б. 14
Торба С.М. 94
Торган Г.Р. 95
Тороус Н.В. 5
Тороус С.В. 5
Угрин С.З. 96
Федак І.В. 97
Федасюк Д. 98
Федорчук В.І. 100
Федорчук В.М. 101
Філіпчук О.І. 62
Фотій О.Г. 61
Холоменюк В.А. 69
Хома Г.П. 105
Цегелик Г.Г. 102
Цинайко П.В. 105
Чабанюк Я.М. 103
Черевко І.М. 64
Черемних Є.В. 38
Чмир О.Ю. 104
Чорний В.З. 105
Шиманський В.М. 106
Шиндер К.В. 71
Шопа Т.В. 71
Шувар Б.А. 67, 74
Шувар О.Б. 24
Щербатий М.В. 106
Ярка У.Б. 8
Ясинська Л.І. 55
Ясинський В.К. 55
Berkela Yu.Yu. 107
Burban N. 108
Domanska O.V. 109
Horbachuk O. 108
Maturin Yu. 108
Sydorenko Yu.M. 107, 110