

**Федак І.В., Гой Т.П.**

# **ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

**Навчальний посібник**

**для студентів напрямів підготовки  
«математика» , «прикладна математика»**

**Івано-Франківськ**

**2011**

УДК 517.94  
ББК 22.161.6  
Ф75

*Друкується за рішенням Вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №10 від 29 червня 2011 р.)*

*Рецензенти:*

Загороднюк А.В., завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, доктор фізико-математичних наук

Казмерчук А.І., доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кандидат фізико-математичних наук

**Федак І.В., Гой Т.П.**

Лінійні інтегральні рівняння: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Голіней, 2011. – 152с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми зі спеціального курсу «Інтегральні рівняння» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика», «прикладна математика» вищих навчальних закладів III – IV рівнів акредитації. Містить основні методи точного та наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь, задачі для самостійного розв'язування.

УДК 517.94  
ББК 22.161.6

© Федак І.В.,  
Гой Т.П., 2011

## Зміст

<b>Передмова</b>	6
<b>Розділ I. Інтегральні рівняння та задачі, які приводять до них</b>	8
§1.1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь.	8
§1.2. Математичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь.	12
§1.3. Прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь.	15
<b>Розділ II. Елементи функціонального аналізу в теорії інтегральних рівнянь</b>	19
§2.1. Метричні простори. Принцип стискаючих відображень.	19
§2.2. Лінійні нормовані та евклідові простори.	22
§2.3. Лінійні оператори та обернені до них.	26
§2.4. Компактні самоспряжені оператори. Теорема Гільберта-Шмідта.	30
§2.5. Наближене розв'язування операторних рівнянь.	35
<b>Розділ III. Метод ітерованих ядер. Формули Фредгольма</b>	37
§3.1. Степені інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерра.	37
§3.2. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.	38
§3.3. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.	41
§3.4. Наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду методом ітерованих ядер.	43
§3.5. Інтегральні рівняння, ядра яких мають слабку особливість.	44
§3.6. Формули Фредгольма. Резольвента Фредгольма.	46
<b>Розділ IV. Теорема Фредгольма</b>	48
§4.1. Інтегральні рівняння Фредгольма II роду з виродженим ядром. Перша теорема Фредгольма.	48
§4.2. Друга та третя теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь Фредгольма II роду з виродженим ядром.	50
§4.3. Теореми Фредгольма для довільних лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.	54
§4.4. Метод вироджених ядер.	57

<b><i>Розділ V. Ітераційні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду</i></b>	60
§5.1. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.	60
§5.2. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.	64
§5.3. Поняття про метод послідовних наближень для нелінійних інтегральних рівнянь.	66
§5.4. Наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду методом простої ітерації.	68
§5.5. Метод Положого.	71
§5.6. Метод усереднення функціональних поправок.	74
<b><i>Розділ VI. Апроксимаційні та проєкційні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду</i></b>	77
§6.1. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.	77
§6.2. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра II роду.	80
§6.3. Основні ідеї проєкційних методів розв'язування інтегральних рівнянь. Метод найменших квадратів.	82
§6.4. Методи Гальоркіна-Петрова та Бубнова-Гальоркіна.	85
§6.5. Метод колокації.	89
<b><i>Розділ VII. Симетричні інтегральні рівняння</i></b>	91
§7.1. Інтегральні рівняння Фредгольма II роду з симетричними ядрами.	91
§7.2. Зведення задачі про власні функції симетричного ядра до крайової задачі.	94
§7.3. Розвинення симетричного ядра та його ітерованих ядер за власними функціями ядра.	98
§7.4. Інтегральні рівняння та крайові задачі, які зводяться до інтегральних рівнянь з симетричним ядром.	99
<b><i>Розділ VIII. Лінійні інтегральні рівняння I роду</i></b>	103
§8.1. Лінійні інтегральні рівняння Фредгольма I роду. Теорема Пікара.	103
§8.2. Лінійні інтегральні рівняння Вольтерра I роду та методи їх зведення до рівнянь Вольтерра II роду.	107
§8.3. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.	112

<b><i>Розділ IX. Операційні методи розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки</i></b>	116
§9.1. Перетворення Лапласа та його властивості. Формули зображень.	116
§9.2. Методи відновлення функції за її зображенням.	120
§9.3. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки.	122
§9.4. Лінійні інтегро-диференціальні рівняння типу згортки.	127
<b><i>Завдання для самостійного розв'язування</i></b>	129
<b><i>Короткі відомості про вчених, які згадуються у посібнику</i></b>	149
<b><i>Список рекомендованої літератури</i></b>	151

## *Передмова*

Інтегральні рівняння та методи їх дослідження широко використовуються у різних галузях і розділах сучасної науки й техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії керування, біомеханіці, економіці, медицині. Саме теорія інтегральних рівнянь займає важливе місце у системі підготовки фахівців з математики, прикладної математики, фізики, механіки, електроніки, матеріалознавства тощо.

Пропонований навчальний посібник охоплює основну частину університетської програми з навчальної дисципліни «Інтегральні рівняння» для студентів напрямів підготовки «математика», «прикладна математика», але може бути використаний для студентів інших фізико-математичних напрямів підготовки, а також у інженерно-технічних вищих навчальних закладах.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями сучасної теорії інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник складається з 9 розділів. Матеріал охоплює основні точні та наближені методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра, інтегральні рівняння з виродженим ядром, ітераційні, апроксимаційні та проєкційні методи розв'язування інтегральних рівнянь, симетричні інтегральні рівняння, операційні методи розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра.

У першому розділі наведені основні поняття і твердження теорії інтегральних рівнянь, дається коротка класифікація інтегральних рівнянь, характеризуються області їх застосування.

У другому розділі представлені основні елементи функціонального аналізу, які мають широке застосування у теорії інтегральних рівнянь (означення та властивості метричних, нормованих та евклідових просторів, принцип стискаючих відображень, лінійні оператори, обернені оператори та їх властивості, самоспряжені оператори тощо).

Третій розділ посібника присвячений розв'язуванню лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра II роду методом ітерованих ядер.

У четвертому розділі вивчаються інтегральні рівняння з виродженим ядром. Наведені теореми Фредгольма, метод зведення довільних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду до рівнянь з виродженим ядром, метод наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду методом вироджених ядер.

У п'ятому розділі викладені ітераційні методи розв'язування інтегральних рівнянь II роду. Зокрема, обґрунтовується застосування принципу стискаючих відображень до лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра II роду, метод простої ітерації наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду та метод Положого наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

У розділі 6 висвітлюються апроксимаційні та проєкційні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь II роду, зокрема метод для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра II роду, методи найменших квадратів, Гальоркіна-Петрова, Бубнова-Гальоркіна, колокації.

Сьомий розділ посібника присвячений симетричним інтегральним рівнянням та звідним до них.

У розділі 8 вивчаються лінійні інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерра I роду, зокрема обґрунтовується метод квадратур для рівнянь Вольтерра I роду.

Дев'ятий розділ присвячений операційним методам (на основі перетворення Лапласа) розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки, систем таких рівнянь та лінійних інтегродиференціальних рівнянь типу згортки.

Для кращого розуміння важливих понять, теорем, методів в усіх розділах наведені приклади розв'язування конкретних задач. Крім того, посібник містить завдання для самостійного розв'язування, які можуть бути основою для проведення практичних занять.

Сподіваємось, що пропонований посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

## Короткі відомості про вчених, які згадуються у посібнику

**Абель** Нільс Генрік (Niels Henrik Abel; 1802 - 1829) – норвезький математик. Довів нерозв'язність у радикалах загальних алгебраїчних рівнянь п'ятого і вищих степенів. Знайшов функції, що не інтегруються за допомогою елементарних функцій.

**Банах** Стефан (Banach Stefan; 1892 - 1945) – польський математик, професор Львівського університету та Львівської Політехніки. Один з творців сучасного функціонального аналізу та львівської математичної школи.

**Бессель** Фрідріх Вільгельм (Friedrich Wilhelm Bessel; 1784 - 1846) – німецький астроном і математик, член Берлінської АН (1812). Його ім'ям названі циліндричні функції першого роду (функції Бесселя) і диференціальне рівняння, якому вони задовольняють (рівняння Бесселя), нерівність для коефіцієнтів ряду Фур'є (нерівність Бесселя).

**Бубнов** Іван Григорович (1872 - 1919) – російський інженер і математик. Один з авторів методу наближеного розв'язування крайової задачі для звичайних диференціального рівняння (метод Гальоркіна-Бубнова), який використовував для розв'язування задач теорії пружності.

**Буняковський** Віктор Якович (1804 - 1889) – російський математик. Народився в м. Бар (тепер – районний центр Вінницької області). Після навчання у Парижі – професор різних вищих закладів у Петербурзі. Автор понад 100 праць з математичного аналізу, теорії чисел, теорії ймовірностей.

**Вольтерра** Віто (Vito Volterra; 1860 - 1940) – італійський математик і фізик. Найбільш відомі роботи стосуються диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії пружності, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, функціонального аналізу.

**Гальоркін** Борис Григорович (1871 - 1945) – російський інженер і математик. Розробив методи розв'язування диференціальних рівнянь теорії пружності. Його метод скінченних елементів використовується для числового й аналітичного розв'язування рівнянь з частинними похідними.

**Гаммерштейн** Адольф (Hammerstein; 1888 - 1945) – німецький математик. Основні праці стосуються функціонального аналізу (оператор Гаммерштейна) і теорії інтегральних рівнянь (рівняння Гаммерштейна).

**Гільберт** Давид (David Hilbert; 1862 - 1943) – німецький математик. Побудована ним теорія інтегральних рівнянь з симетричним ядром склала одну з основ сучасного функціонального аналізу (гільбертів простір) і особливо спектральної теорії лінійних операторів.

**Коші** Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis; 1789 - 1857) – французький математик. Усього опублікував понад 800 робіт з теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної механіки, математичної фізики тощо.



**Лаплас** П'єр-Сімон (Pierre-Simon Laplace; 1749 - 1827) – французький математик і астроном. Відомий працями в області небесної механіки, диференціальних рівнянь, математичної фізики. Фундаментальними є його роботи з диференціальних рівнянь (рівняння Лапласа). Для створеної ним теорії ймовірностей застосовував перетворення, яке тепер носить його ім'я.

**Лебег** Анрі Леон (Henri Leon Lebesgue; 1875 - 1941) – французький математик. Один із засновників сучасної теорії функцій дійсної змінної. Створив теорію міри, запровадив поняття вимірної функції, ввів нове визначення інтеграла (інтеграл Лебега).

**Парсеваль** Марк Антуан (Parseval Marc Antoin; 1755 - 1836) – французький математик. Основні праці з диференціальних рівнянь, теорії функцій дійсної змінної (рівність Парсевала).

**Петров** Георгій Іванович (1912 - 1987) – російський математик і механік. Основні праці стосуються аеродинаміки та гідродинаміки.

**Пікар** Шарль Еміль (Picard Charles Emile; 1856 - 1941) – французький математик. Основні праці з диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

**Положій** Георгій Миколайович (1914 - 1968) – український математик, професор Київського університету. Роботи з теорії функцій комплексної змінної, обчислювальної математики і математичної фізики.

**Ріс** Фрідеш (Riesz Frigyes; 1880 - 1956) – угорський математик. Основні праці з функціонального аналізу. Побудував теорію функцій від операторів. Один з засновників теорії топологічних просторів.

**Урисон** Павло Самуїлович (1898 - 1924) – російський математик. Народився в м. Одесі. Основні результати отримані в топології, теорії нелінійних диференціальних рівнянь, геометрії.

**Фішер** Ернст Сигізмунд (Ernst Sigismund Fischer; 1875 - 1954) – німецький математик. Основні праці стосуються теорії функцій і функціонального аналізу (теорема Піса-Фішера).

**Фредгольм** Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866 - 1927) – шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння та теореми Фредгольма).

**Фур'є** Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768 - 1830) – французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження багатьох задач астрономії, акустики, радіотехніки та ін.

**Шмідт** Ерхард (Schmidt Erhard; 1876 - 1959) – німецький математик, професор Берлінського університету. Основні праці з теорії функцій, інтегральних рівнянь, функціонального аналізу (теорема Гільберта-Шмідта).

## Список рекомендованої літератури

### *Основна література*

1. Васильева А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – К.: Техніка, 1997. – 288 с.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М. Л. Краснов. – М.: КомКнига, 2006. – 304 с.
5. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
6. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
7. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. – М.: Факториал, 1998. – 432 с.
8. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
9. Цегелик Г. Г. Наближені методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь / Г. Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – 140 с.
10. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 250 с.
11. Колмогоров А. М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. М. Колмогоров, С. В. Фомін. – К.: Вища школа, 1974. – 456 с.

12. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами математического анализа / П. И. Лизоркин. – М.: Наука, 1981. – 383 с.
13. Овчинников П. Ф. Высшая математика: Учебное пособие / П. Ф. Овчинников, Б. М. Лисицын, В. М. Михайленко. – К.: Высшая школа, 1989. – 679 с.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории линейных интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 120 с.
15. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: ИЛ, 1960. – 300 с.
16. Федак І. В. Функціональний аналіз. Навчальний посібник / І. В. Федак. – Івано-Франківськ.: Сімик, 2011. – 120 с.